Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE PREVARIEDADES DE ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

Antonio Francisco Fernández García

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Sevilla

Abstract

"In this paper we introduce for $p\geq 1$, the class of p-space. We denote by $\mathcal{P}_p$ this class and we prove that $\mathcal{P}_p$ is a prevarietie of locally convex space in the sense of F. Bellenot. Every locally convex nuclear space is a p-space, for every $p\geq 1$. Nevertheless there exist locally convex space in $\bigcap_{p} \mathcal{P}_p$ that aren't nuclear spaces. We stablish the relations in $\mathcal{P}_p$.

Notaciones

Para $p\geq 1$ y $p<\infty$ ponemos $l^p=\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n\in R\ \sum_n |x_n|^p<\infty\}$. En el caso $p=\infty$, l^∞ denotará el espacio $\{(x_n)_{n=1}^{\infty}; \lim_{n\to\infty} x_n=0\}$. Además utilizaremos sus normas habituales. Si se quiere espacificar la topologia de un espacio E pondremos $E[\tau]$. La familia de entornos del origen en E se denotará por $\mathcal{U}(E)$. Para operar con los espacios E_U, $E'(V^\circ)$, con $U,V\in \mathcal{U}(E)$ se puede consultar [3] en la bibliografia.

La convergencia local en el dual de un espacio loc. convexo.

Si E es un e.l.c. $(u_n)_{n=1}^{\infty}\subset E'$, diremos que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ converge "localmente" hacia cero en l^p $(1\leq p<\infty)$, si existe un $V\in \mathcal{U}(E)$ tal que $u_n\in E'(V^\circ)$ para cada $n\in N$ y además $\sum P_{V^\circ}(u_n)^p<\infty$.

Si $p=\infty$, se dice que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ está localmente en l^∞, si existe $V\in\mathcal{U}(E)$ con $\lim_{n\to\infty} P_{V^\circ}(u_n)=0$. Ver [5]. Para expresar este hecho emplearemos la notación $(loc)u_n \xmapsto{p} 0$. $(1\leq p\leq\infty)$

Proposición 1.

"Se verifican las siguientes propiedades:

a) Si $p<q$ y $(loc)u_n\xmapsto{p} 0$, entonces $(loc)u_n\xmapsto{q} 0$.

b) Si en $E[\tau]$ $(loc)u_n\xmapsto{p} 0$ y $\tau\leq\tau'$, $\sigma(E,E')\leq\tau'\leq\tau(E,E')$ entonces $(loc)u_n\xmapsto{p} 0$ en $E[\tau']$

c) Si $(loc)u_n \xrightarrow{p} o$, entonces para cada $x \in E \sum_n |\langle x, u_n\rangle|^p < +\infty$.

Definición 1.

" Diremos que E es un p-espacio ($1 \leq p \leq \infty$), si $\forall U \in \mathcal{U}(E)$ existe $V \in \mathcal{U}(E)$ y $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $(loc)u_n \xrightarrow{p} o$, de forma que para cada $x \in E$, la relación

$$P_U(x)^p \leq \sum_n |\langle x, u_n\rangle|^p \quad \text{es válida."}$$

Teorema 1.

" Sea $E[\mathcal{T}]$ un p-espacio ($1 \leq p \leq \infty$), entonces E es un espacio de Schwartz."

Demostración(Esquema).

Sea $U \in \mathcal{U}(E)$ y elijamos $V \in \mathcal{U}(E)$ tal que exista $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'(V^o)$ verificando $(loc)u_n \xrightarrow{p} o$; $\sum_n P_{V^o}(u_n)^p < \infty$ y $P_U^p(x) \leq \sum_n |\langle x, u_n\rangle|^p$. Sea M el hiperplano de ecuación $\langle x, u_j\rangle = o$ $j=1,2,3,\ldots N$, donde N es el entero definido por la relación $\left\{\sum_{n=1}^{\infty} P_{V^o}(u_n)^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Siendo ε un número arbitrario. Ahora se demuestra que $V \cap M \subset \varepsilon U$.

Proposición 2.

" Si E es un espacio de Schwartz, entonces E es un ∞-espacio."

Teorema 3.

"E es un espacio de Schwartz si y solo si E es un ∞-espacio."

Ver [5] .

Proposición 3.

"Si E es un espacio nuclear , entonces E es un 1-espacio."

Corolario.

" E es nuclear si y solo si E es un 1-espacio."

Teorema 4.

" Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio nuclear, entonces E es un 2-espacio."

Demostración. (Esquema)

Sea $U \in \mathcal{U}(E)$ con $E'(U^o)$ de Hilbert y $V \in \mathcal{U}(E)$ tal que $E'(V^o)$ tambien sea de Hilbert y la inyección canónica $K_{V^oU^o}: E'(U^o) \mapsto E'(V^o)$ sea nuclear.

Representemos $K_{V^oU^o}$ en la forma $K_{V^oU^o}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u/e_n) f_n$, con $\sum_n \lambda_n = \lambda$ y $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ bases ortonormales en $E'(U^o)$ y $E'(V^o)$ respectivamente. La sucesión (λ_n) es decreciente. Utilizando la desigualdad de Hölder se demuestra que si $u \in U^o$ y $x \in E$ entonces $|\langle x, u\rangle| \leq \left\{\sum_n |\langle x, u_n\rangle|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ donde $u_n = \frac{\lambda f_n}{n}$. Finalmente como $\sum_n P_{V^o}(u_n)^2 < \infty$ se deduce el teorema.

Proposición 4.

" Si $E \in \mathcal{P}_p$ y F es un subespacio de E, entonces $F \in \mathcal{P}_p$."

Demostración(Esquema)

Este resultado se deduce de la definición de p-espacio y de que para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ y $x \in F$ se verifica $P_U(x) = P_{U \cap F}(x)$.

Proposición 5.

" Si $E_i \in \mathcal{P}_p$ para cada $i \in I$, entonces $\prod_{i \in I} E_i \in \mathcal{P}_p$."

Demostración(Esquema)

Si $U \in \mathcal{U}(\prod_{i \in I} E_i)$ entonces $P_U((x_i)_{i \in I}) = \sup_i P_{U_i}(x_i)$ donde $U = \prod_{i \in I} U_i$.

Pongamos $A = \{i \in I / U_i \neq E_i\}$. Si $i \in A$ se elijen las sucesiones $(u_{ni}) \subset E_i'$ tal que $(loc) u_{ni} \xrightarrow{p} o$ y $P_{U_i}(x_i) \leq \left(\sum_n |\langle x_i, u_{ni}\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $x_i \in E_i$ y tambien verifiquen $\sum_n P_{V_i^o}(u_{ni})^p < \infty$.

Formemos $V = \prod_i V_i \in \mathcal{U}(\prod_{i \in I} E_i)$ y definimos sobre $\prod_{i \in I} E_i$ las formas lineales u_{ni} mediantes las fórmulas $\langle x, u_{ni}\rangle = \langle x_i, u_{ni}\rangle$. Finalmente se demuestra que $(loc) u_{ni} \xrightarrow{p} o$, $\sum_i \sum_n P_{V^o}(u_{ni})^p < \infty$ y que $P_U(x) \leq P_V \cdot$ $\left(\sum_i \sum_n P_{V^o}(u_{ni})^p\right)^{1/p}$.

Proposición 6.

" Sea $E \in \mathcal{P}_p$ y F isomorfo a E entonces F es un p-espacio."

Demostración(Esquema)

Sea $f: E \longmapsto F$ el isomorfismo supuesto. Si $U \in \mathcal{U}(F)$, elejimos $V_1 \in \mathcal{U}(E)$ y $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'(V_1^o)$ con $\sum_n P_{V_1^o}(a_n)^p < \infty$, además si $z \in E$, la relación $P_W(z) \leq \left(\sum_n |\langle z, a_n\rangle|^p\right)^{1/p}$, suponemos que es válida. $W = f^{-1}(U)$.

Puesto que $f^t: F' \longmapsto E'$ es sobreyectiva, podemos encontrar $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset F'$ con $f^t(u_n) = a_n$. Entonces de las definiciones sigue que

$$P_U(x) \leq \left(\sum_n |\langle x, u_n\rangle|^p\right)^{1/p} \quad u_n \in F'_{W(V_1)} \text{ y } \sum_n P_{W_1}(u_n)^p < \infty \text{ ,donde}$$

$W_1 = f(V_1)$.

Teorema 5.

"Designemos por $\mathcal{N}$ y $\mathcal{S}$ las variedades de los espacios de Schwartz y Nucleares, respectivamente.

Si $p \in [1, \infty]$, entonces $\mathcal{P}_p$ es una prevariedad de espacios localmente convexos, tal que: a) $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{S}$ b) $\mathcal{P}_1 = \mathcal{N}$. c) $\mathcal{P}_p \subset \mathcal{S}$. d) $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{S}$."

Teorema 6.

" Sea $E[\mathcal{C}]$ un espacio Nuclear y $p \in [1, \infty]$, entonces $E \in \mathcal{P}_p$."

Demostración(Esquema)

Excluimos ya los casos $p = 1$ $p = \infty$ y separamos esta prueba en dos etapas.

a) $p > 2$. Se elije $\varepsilon > o$ tal que $p - \varepsilon > 2$. Exactamente como en el teorema 4, se toman entornos $U, V \in \mathcal{U}(E)$ y representamos $K_{V^o U^o}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u/e_n) f_n$ con $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ decreciente y formada por números positivos, llamamos $\lambda = \sum_n \lambda_n$. Si $u \in U^o$ se demuestra la siguiente acotación para $\langle x, u\rangle$:

$$|\langle x,u\rangle| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p-1}}\lambda_n^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(u/e_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle x,\frac{f_n}{n^{(p-1)^{-1}}}\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$ Donde $r=\frac{2p}{p-2}$.

Llamando $M^r=\sum_n n^{\frac{r}{p-1}}\lambda_n^r$, podemos escribir:

$|\langle x,u\rangle|^p \le \sum_n |\langle x,u_n\rangle|^p$ donde $u_n=\frac{M\cdot f_n}{n^{(p-1)^{-1}}}$.

De aqui se deduce el resultado tomando superiores cuando $u \in U°$.

Finalmente notemos que $\sum_n P_{V°}(u_n)^p < +\infty$ y $E \in \mathcal{G}_p$.

b) $1 < p < 2$.

Elijamos $\varepsilon > 0$ tal que $p-\varepsilon > 1$ y trabajando de una forma similar a la del apartado a) deducimos

$$|\langle x,u\rangle| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{2}{p-\varepsilon}}\lambda_n^2 |(u/e_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle x,\frac{f_n}{n^{(p-\varepsilon)^{-1}}}\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_n|\langle x,u_n\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\lambda$$

donde $u_n=\frac{\lambda f_n}{n^{(p-\varepsilon)^{-1}}}$ y $\sum_n P_{V°}(u_n)^p < \infty$.

Hemos demostrado así, que $\mathcal{L} \subset \bigcap_{p>1}\mathcal{G}_p$. Para ver que dicha inclusión es estricta, razonamos como sigue. Tomemos un espacio de Banach E, definimos sobre E una topologia dada por las seminormas $p(x)$, $p(x) \le \sup_n \{|\lambda_n \langle x,x_n'\rangle|\}$ con $\sum_n \|x_n'\|^p < \infty$ si $p>1$.

Facilmente se demuestra que $E \in \mathcal{G}_p$, pero $E \notin \mathcal{G}_1$ lo cual tambien es de facil dedución.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Bellenot S.F. " Prevarieties and interwined completeness of locally convex spaces." Math.Ann. 217 (1975) pgs.59-67.

[2] Horvath.J." Topológical vector spaces and distributions," Vol I,Reading ,Mass (1966).

[3] Pietsch.A." Nuclear Locally Convex spaces." Berlin-Heidelberg-New-York. Springer.(1972).

[4] Robertson and Robertson. " Topológical vector spaces." Cambrige University Press,Cambrige-New-York.(1964)

[5] Terzioglou.A." On Schwartz spaces." Math.Ann.182.(1969).pgs.236-242.

[6] Brudovskii.B.S." Associated nuclear topology,mappings of types,and strongly nuclear spaces." Sov.Math.(1968) Vol 9 (Ene-Feb).pg.61.

[7] T.Komura and Y.Komura." Uber die Einbettung del nuklearen Raume in (s)^{A}." Math.Ann.162 (1966).pgs.284-288.