Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

SUBESPACIOS INVARIANTES EN $L^p(\mu)$ SOBRE EL TORO

José J. Guadalupe Hernández

Colegio Universitario de Logroño

Abstract: Given a measure μ on the unit circle T whose weight function w satisfies $\log w \in L^1(T)$, we characterize the doubly and simply invariant subspaces for the shift operator on $L^p(\mu)$ $1 < p < \infty$. In particular, Szego's theorem appears when p=2, and like in the classical case, $H^p(\mu_c)$ can be factorized as the product of inner and μ_c-outer functions.

1.- Sea μ una medida finita y positiva definida sobre la circunferencia unidad T, $\mu=\mu_c+\mu_s$, $\mu_c=w\,d\theta$ la descomposición de Lebesgue de dicha medida.

Consideremos el espacio de Banach $L^p(\mu)$ de las funciones complejas definidas sobre T con potencia p-ésima integrable respecto de μ. El operador shift en $L^p(\mu)$, que denotamos por S, viene definido por $S(f)(e^{i\theta})=e^{i\theta}f(e^{i\theta})$. Un subespacio $M\subset L^p(\mu)$ se dice invariante si $S(M)\subset M$. Si representamos por S^{-1} el inverso de S, ó sea, $S^{-1}(f)(e^{i\theta})=e^{-i\theta}f(e^{i\theta})$ entonces M se dice doblemente invariante si $S(M)\subset M$ y $S^{-1}(M)\subset M$, y simplemente invariante si es invariante pero no doblemente invariante.

En este trabajo caracterizamos tales subespacios, generalizando los resultados de Beurling (v. [3]).

Teorema 1 . Para cada subconjunto medible E de T, denotamos por M_E el conjunto de las funciones de $L^p(\mu)$ que se anulan μ-a.e. sobre el complementario de E. Entonces M_E es doblemente invariante y cada subespacio doblemente invariante tiene esta forma.

Demostración: Es inmediato que M_E es subespacio cerrado de $L^p(\mu)$ doblemente invariante. Por otra parte, si 1-q es el vec tor de mejor aproximación de la función $1\in L^p(\mu)$ en el subespacio doblemente invariante M es fácil ver que $q=1$ μ-a.e. ó $q=0$ μ-a.e.. Sea E el subconjunto de T en el cual $q=0$; entonces $M=(1-q)\,L^p(\mu)$, es decir, $M=M_E$.

Este teorema también puede obtenerse como resultado particular de [4]

2.- Consideremos la descomposición de $L^p(\mu)$ en su parte continua y singular $L^p(\mu)=L^p_c(\mu)\oplus L^p_s(\mu)$. Sea ahora un subespacio M simplemente invariante de $L^p(\mu)$ y consideremos el subespacio cerrado $e^{i\theta}M\subset M$. Sea $F\in M\setminus e^{i\theta}M$ y representemos por F-q el vector de mejor aproximación de F en $e^{i\theta}M$. El vector $q\in M$ viene caracterizado por la condición $\tilde{q}(f)=0$ para toda $f\in e^{i\theta}M$, donde $\tilde{q}$ es el funcional definido por $\tilde{q}=\|q\|_p^{1-p}\,|q|^{p-2}\,q\in L^{p'}(\mu)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1)$.

<u>Lema</u>.- q está caracterizado por las tres siguientes condiciones: i) $F-q\in e^{i\theta}M$, ii) $|q|^p d\mu=\|q\|_p^p\,d\theta$, iii) $f_c\in qH^p(T)$, $f\in M$.

Demostración: La condición i) es obvia. Como M es invariante se tiene $e^{in\theta}q\in e^{i\theta}M$, $n\geq 1$ y por tanto $0=\check{q}(e^{in\theta}q)=\int e^{in\theta}q|q|^{p-2}\bar{q}\,d\mu$, $n\geq 1$. Tomando conjugados se sigue que $0=\int e^{in\theta}|q|^p\,d\mu$ para $n\neq 0$ y puesto que toda medida queda caracterizada por sus coeficientes de Fourier-Stieljes $|q|^p\,d\mu=\|q\|_p^p\,d\theta$. Por último, para iii), es facil ver que los coeficientes de Fourier negativos de $\frac{1}{q}f_c$ son todos nulos. El reciproco es inmediato.

<u>Teorema 1</u>.- Los subespacios simplemente invariantes de $L^p(\mu)$ son de la forma $M=q.H^p(T)\oplus S_E=q.H^p(T)\oplus\chi_E\,L^p(\mu_s)$ donde E es un subconjunto medible de $\mathrm{sop}(\mu_s)$ y $q\in L^p_c(\mu)$ verificando $|q|^p w=1$. El conjunto E es único salvo conjuntos μ_s-nulos y q es única salvo factores constantes de módulo 1.

Demostración: Sea $M_c=M\cap L^p_c(\mu)$, $M_s=M\cap L^p_s(\mu)$. Se prueba, aplicando el Lema, que M_s es doblemente invariante, luego $M_s=\chi_E.L^p_s(\mu)$. Como M es simplemente invariante, M_c también debe serlo. Es inmediato que $M_c\subset q.H^p(T)$. La parte ii) del Lema junto a la convergencia en $L^p(T)$ de series de Fourier (T^a. de M. Riesz) proporcionan $q.H^p(T)\subset M_c$. La unicidad no es difícil probarla y la condición $|q|^p\,w=1$ resulta de tomar q normalizado.

Denotemos por $H^p(\mu)$ el subespacio de $L^p(\mu)$ de las funciones aproximables por polinomios analíticos $p_n(e^{i\theta}) = \sum_0^n a_k e^{ik\theta}$ en la norma de $L^p(\mu)$. Supondremos que se verifica la condición de Szegö para el peso ($\log w \in L^1(T)$) lo que equivale a $H^p(\mu) \subsetneq L^p(\mu)$ (v. [2]). En estas condiciones una consecuencia obvia del Teorema 2 es:

<u>Corolario</u>.- $H^p(\mu) = K_p . H^p(T) \oplus L^p_s(\mu)$ <u>donde</u> K_p <u>verifica</u>:
i) $1-K_p \in e^{i\theta} H^p(\mu)$ ii) $|K_p|^p \, d\mu = \|K_p\|^p \, d\theta$ iii) $1/K_p \in H^p(T)$

Este resultado generaliza el conocido Teorema de Szegö (v.[1]) y en [2] se obtiene para K_p la siguiente expresión explícita

$$K_p = \left(\frac{w}{c}\right)^{-1/p} \exp\left[-\frac{i}{p}\left(\log \frac{w}{c}\right)^{\sim}\right]$$

donde c es la media geométrica del peso y $(\cdot)^{\sim}$ representa la función conjugada.

3.- Recordamos que una función interna es una función analítica en el disco unidad abierto y cuyo módulo en T es igual a 1 a.e. Definimos función externa f en $H^p(\mu_c)$ (μ_c-externa) aquella tal que el subespacio engendrado por $\{f.e^{in\theta}\}_0^\infty$ es denso en $H^p(\mu_c)$. Una consecuencia del Teorema 2 y Corolario es

<u>Teorema 3</u>.- <u>Los subespacios simplemente invariantes en</u> $H^p(\mu)$ <u>son de la forma</u> $M = u.H^p(\mu)$ <u>donde</u> u <u>es interna y única salvo factores constantes de módulo</u> 1.

Sea $f \in H^p(\mu_c) = H^p_c(\mu)$ (v.[2]). Entonces $f = K_p . g$ $g \in H^p(T)$; pero como $g \in H^p(T)$ $g = u.0$ con u interna y 0 externa clásica. Luego $f = u.K_p.0$ y es inmediato que $K_p.0$ es μ_c-externa, pues $K_p.H^p(T) = H^p(\mu_c)$. Se obtiene entonces:

<u>Teorema 4</u>.- <u>Toda función de</u> $H^p(\mu_c)$ <u>es el producto de una función interna por una función</u> μ_c<u>-externa, donde la factorización es única salvo constantes de módulo</u> 1.

<u>BIBLIOGRAFIA</u>

[1] FREUD Orthogonal Polynomials. Pergamon Press 1971

[2] GUADALUPE J.J. Clausura en $L^p(\mu)$ de los polinomios analíticos sobre la circunferencia unidad. Tesis. Dpto. Teoria de Funciones. Zaragoza

[3] HELSON H. Lectures on invariant subspaces. Academic Press 1964

[4] REZOLA M. Un teorema de aproximación en espacios L^p. Rev. Hispano-Americana. (por aparecer)

[5] RUDIN Fourier Analysis on groups. Interscience Publishers 1967