Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

ALGUNAS PROPIEDADES DE $C_c(X,E)$

José Mendoza Casas

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid

ABSTRACT: Let $C_c(X,E)$ be the space of continuous functions from the completely regular Haussdorff space X into the locally convex Haussdorff space E, endowed with the compact-open topology. Our aim is to caracterize when this space is barreled, evaluable, bornological or ultrabornological. We obtain necessary conditions by proving that $C_c(X)= C_c(X,\mathbb{K})$ and E are (isomorphic to) complementary subspaces of $C_c(X,E)$. After we partially reduce this problem to the case X compact and so we obtain some sufficient conditions, which generalize previous results of Schmets.

Sea X un espacio completamente regular y Haussdorff y E un espacio localmente convexo (e.l.c.) Haussdorff. Al espacio de las funciones continuas de X en E lo notaremos $C(X,E)$ (simplemente $C(X)$ si E es el cuerpo escalar). Notaremos $C_c(X,E)$ (resp. $C_c(X)$) a $C(X,E)$ (resp. $C(X)$) dotado de la topología compacta-abierta, es decir, de la topología de e.l.c. dada por la familia de seminormas $\{r_{K,p}: K\in\Gamma , p\in P\}$ donde Γ es la familia de los subconjuntos compactos de X, P la de las seminormas continuas en E y $r_{K,p}(\phi)=\sup\{p(\phi(x)): x\in K\}$ si $K\in\Gamma$, $p\in P$ y $\phi\in C(X,E)$.

Siguiendo la línea de Schmets, buscamos condiciones en X y E para que $C_c(X,E)$ sea tonelado, infratonelado, bornológico o ultrabornológico. Daremos sistemáticamente estas propiedades en el e.l.c. $C_c(X)$ como propiedades de X. Esto no será problema ya que están perfectamente caracterizados los espacios X para los que $C_c(X)$ tiene cada una de estas propiedades [1,2,6,7] . La proposición 1 nos permitirá obtener condiciones necesarias; después daremos algunas suficientes.

Agradezco sinceramente a Fernando Bombal su dirección en este trabajo.

1. Proposición: $C_c(X)$ y E son topológicamente isomorfos a subespacios de $C_c(X,E)$ que admiten complementario topológico.

Dem.: Sea $x\in X$, $f\in C(X)$ tal que $f(x)=1$, $e\in E$ y e' una forma lineal y continua en E tal que $\langle e,e'\rangle=1$. Consideremos las siguientes aplicaciones:

$$C_c(X,E) \xrightarrow{\delta_x} E \xrightarrow{\delta_f} C_c(X,E) \quad ; \quad C_c(X,E) \xrightarrow{\langle\ ,e'\rangle} C_c(X) \xrightarrow{\delta_e} C_c(X,E)$$

$$\delta_x(\phi)=\phi(x), \quad \delta_f(e)=f(.)e, \qquad \langle\ ,e'\rangle(\phi)=\langle\phi(.),e'\rangle, \ \delta_e(g)=g(.)e.$$

Es fácil ver que estas aplicaciones son continuas y que verifican además $\delta_f\circ\delta_x|_{\delta_f(E)}=I_{\delta_f(E)}$, $\delta_x\circ\ \delta_f=I_E$, $\delta_e\circ\langle\ ,e'\rangle|_{\delta_e(C_c(X))}=I_{\delta_e(C_c(X))}$ y $\langle\ ,e'\rangle\circ\delta_e=I_{C(X)}$; donde $I_{\delta_f(E)}$, I_E, etc. son las respectivas identidades. Pero de aquí se sigue inmediatamente el resultado enunciado.

2. Observaciones: Siguiendo la misma demostración, la proposición anterior se puede enunciar de forma más general en los espacios $C_{p',B}(X,E)$ de Schmets [3].

Por la proposición 1 tanto E como $C_c(X)$ heredan en general las propiedades usuales del e.l.c. $C_c(X,E)$. Así, sin tener que estudiar separadamente cada caso, podemos afirmar inmediatamente que si $C_c(X,E)$ es tonelado (resp. infratonelado etc.) $C_c(X)$ y E también son tonelados (resp. infratonelados, etc.).

Al espacio de las funciones continuas de X en E con imagen relativamente compacta, dotado de la topología de la convergencia uniforme lo notaremos $C_o(X,E)$. Es claro que la inyección canónica de $C_o(X,E)$ en $C_c(X,E)$ es continua y que si βX es la compactificación de Stone-Čech de X, $C_c(\beta X,E)$ es topológicamente isomorfo a $C_o(X,E)$.

3. Teorema: Si $C_c(X)$ y $C_c(\beta X,E)$ son espacios tonelados (resp. infratonelados) entonces $C_c(X,E)$ es también un espacio tonelado (resp. infratonelado)

Dem.: Sea $V\subset C_c(X,E)$ un tonel (resp. tonel bornívoro) en $C_c(X,E)$. Si $C_c(X)$ es tonelado (resp. infratonelado), de las caracterizaciones de [2,6] y [7] y de las proposiciones IV.3. y IV.4.a) de [4] se deduce que el soporte de la polar de V [4], $sop(V^o)$, es un relativamente compacto de X. Además, basándonos fundamentalmente en el teorema de la bipolar, se demuestra que el soporte de V [3], $K(V)$, coincide con la adherencia de $sop(V^o)$, y por tanto que $K(V)$ es un compacto de X. Por otra parte, por la observación anterior, $V\cap C_o(X,E)$ es un tonel (resp. tonel bornívoro) y por la hipótesis un entorno de cero en $C_o(X,E)$, es decir, existe una seminorma continua p en E talque

$$(*) \quad V\supset V\cap C_o(X,E)\supset V_p=\{\phi\in C_o(X,E):\ p(\phi(x))\leq 1 \ \ \forall x\in X\}$$

Es claro que la adherencia de V_p en $C_c(X,E)$ está contenida en $U_p=\{\psi \in C(X,E): p(\psi(x))\leq 1 \;\; \forall x \in X\}$; pero además se da la igualdad: si $\phi\in U_p$, $K\subset X$ es compacto y q es una seminorma continua en E existe un recubrimiento abierto finito de K, $\{U_i\}_{i=1}^n$, tal que si $x,y\in U_i$ $(1\leq i\leq n)$, $q(\phi(x)-\phi(y))<1$; y existe también una partición continua de la unidad en X, $\{f_i\}_{i=1}^n$, que está subordinada a $\{U_i\}_{i=1}^n$ en K; entonces, si $e_i\in \phi(U_i)$ $(1\leq i\leq n)$ se tiene

$$\sum_{i=1}^n f_i(.)e_i \in V_p \;\; \text{y} \;\; r_{K,q}(\phi-\sum_{i=1}^n f_i(.)e_i)=\sup\{q(\sum_{i=1}^n f_i(x)\phi(x)-\sum_{i=1}^n f_i(x)e_i):x\in K\}\leq$$

$\leq \sup\{\sum_{i=1}^n f_i(x)q(\phi(x)-e_i): x\in K\}\leq 1$. Así, como V es cerrado en $C_c(X,E)$, de (*) se deduce $\quad V\supset U_p=\{\phi\in C(X,E): p(\phi(x))\leq 1 \;\; \forall x\in X\}$

pero de aquí, por ser K(V) un compacto de X y por el teorema 5.1.b) de [3] concluimos que V es un entorno de cero en $C_c(X,E)$.

Observemos que el teorema anterior junto con la proposición 1 reduce en parte el problema de saber cuándo $C_c(X,E)$ es tonelado o infratonelado al caso en que X es compacto. Nos dice en particular que si $C_c(X)$ es tonelado (resp. infratonelado) y E es tal que $C_c(K,E)$ es tonelado (resp. infratonelado) si K es compacto, entonces $C_c(X,E)$ es tonelado (resp. infratonelado). Esto nos permite extender algunos resultados conocidos [4] y afirmar p.e.:

4. Corolario: Si E es límite inductivo compactamente regular (ver [4]) de una sucesión creciente de espacios de Fréchet (resp. metrizables) y $C_c(X)$ es tonelado (resp. infratonelado), entonces $C_c(X,E)$ es tonelado (resp. infratonelado).

Dem.: Basta tener en cuenta la observación anterior y que como se ve en [4], en la hipótesis, si K es compacto, $C_c(K,E)$ es límite inductivo de espacios de Fréchet (resp. metrizables) y por tanto tonelado (resp. infratonelado).

Obsérvese que los límites inductivos estrictos son compactamente regulares.

5. Corolario: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de e.l.c. tal que para cada $i\in I$ E_i es un límite inductivo compactamente regular de una sucesión creciente de espacios de Fréchet (resp. metrizables), entonces si $C_c(X)$ es tonelado (resp. infratonelado) $C_c(X,\prod_{i\in I}E_i)$ es tonelado (resp. infratonelado).

Dem.: Es consecuencia del corolario anterior ya que es fácil comprobar que $C_c(X,\prod_{i\in I}E_i)$ es topológicamente isomorfo a $\prod_{i\in I}C_c(X,E_i)$.

6. Teorema: Sea X localmente compacto y repleto [1,2,6], y E tal que $C_c(\beta X,E)$ es bornológico (resp. ultrabornológico), entonces $C_c(X,E)$ es bornológico (resp. ultrabornológico).

Dem.: Sea $V\subset C_c(X,E)$ un disco bornívoro (resp. un disco que absorbe a los discos de Banach acotados), es fácil ver que $V\cap C_o(X,E)$ es también un disco bornívoro (resp. un disco que absorbe a los discos de Banach acotados) en $C_o(X,E)$ y así, por la hipótesis, es un entorno de cero en $C_o(X,E)$, es decir, existe una seminorma contínua p en E tal que

$$(*)\quad V\supset V\cap C_o(X,E)\supset\{\psi\in C_o(X,E):\ p(\psi(x))<1\ \ \forall x\in X\}$$

Por la proposición 5.6. de [3] $K(V)$ es un subconjunto compacto de X, veamos que $V\supset V_{K(V),p}=\{\phi\in C(X,E):\ p(\phi(x))<1\ \ \forall x\in K(V)\}$ y habremos terminado: sea $\phi\in V_{K(V),p}$, y consideremos $G=\{x\in X:\ p(\phi(x))<1\}$; por la compacidad local existe un abierto relativamente compacto G_o tal que $K(V)\subset G_o\subset\overline{G}_o\subset G$, y existe también $f\in C(X)$, f con soporte compacto contenido en G, idénticamente 1 en G_o y tal que $f(X)\subset[0,1]$; $f(.)\phi(.)\in C_o(X,E)$ y existe $r<1$ tal que $p(f(x)\phi(x))<r$, es decir, $\frac{1}{r}\,p(f(x)\phi(x))<1$ para todo $x\in X$, y entonces, por (*), $\frac{1}{r}\,f(.)\phi(.)\in V$; por otra parte $f(.)\phi(.)$ coincide con ϕ en G_o y así por el teorema 5.1.a) de [3] $\frac{1}{1-r}\,(\phi-f(.)\phi(.))\in V$; como V es un disco

$$r\left[\frac{1}{r}\,f(.)\phi(.)\right]+\ (1-r)\left[\frac{1}{1-r}\,(\phi-f(.)\phi(.))\right]=\phi\in V.$$

Con la restricción de la compacidad local las observaciones que hicimos a continuación del teorema 3 se trasladan aquí fácilmente.

BIBLIOGRAFIA

[1] De Wilde, M., y Schmets, J. (1971). Caractérisation des espaces C(X) ultrabornologiques, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 40, 119-121.

[2] Nachbin, L. (1954). Topological vector spaces of continuous functions, Proc. Nat. Acad. USA 40, 471-474.

[3] Schmets, J. (1977). Functional Analysis: Surveys and Recent Results, North-Holland Publishing Company, 89-103.

[4] Schmets, J. (1978). Spaces of vector-valued continuous functions, Lecture Notes in Mathematics 644, Springer Verlag, 368-377.

[5] Schmets, J. (1977). Bornological and ultrabornological C(X,E) spaces. Manuscripta Math. Vol. 21 Fasc. 2, 117-133.

[6] Shirota. T. (1954). On locally convex vector spaces of continuous functions, Proc. Japan Acad. 30, 294-298.

[7] Warner, S. (1958). The topology of compact convergence on continuous function spaces, Duke Math. J. 25, 265-282.