Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

CONVERGENCIA DE SERIES DE FOURIER DE INFINITAS VARIABLES

José L. Rubio de Francia

Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza

Abstract: Given a function f in the infinite-dimensional torus (denoted T^{ω}), rectangular sums of its Fourier series $S_R f$ are properly defined, and we study the pointwise and norm convergence as R increases to $Z^{\infty}=(T^{\omega})^{\wedge}$. In the mixed norm spaces $L^{\bar{p}}(T^{\omega})$, $\bar{p}=(p_k)_1^{\infty}$, convergence in norm holds iff $\Sigma|p_k-2|<\infty$. Pointwise convergence in L^2 fails in general, but there are positive results under some restrictions on the Fourier coefficients.
NºClasificación A.M.S. 42

1.-Introducción

Sea T el toro unidimensional identificado de modo natural con el intervalo $[0,1)$. Designamos por T^{ω} el grupo compacto producto de una infinidad numerable de copias de T. El grupo dual Z^{∞} está formado por sucesiones finitamente no nulas de números esteros. Cada $\bar{n} = (n_1,n_2,\ldots,n_k,\ldots) \in Z^{\infty}$ actúa como caráter en T^{ω} de forma obvia

$$\langle \bar{x},\bar{n} \rangle = \exp(2\pi i\ \bar{n}\cdot\bar{x}) = \exp(2\pi i \sum_k n_k x_k) \qquad (\bar{x} \in T^{\omega})$$

(v. [8]). Denotamos $|\bar{n}| = \sup|n_k|$, $\#(\bar{n})$ = nº de elementos no nulos de (n_k).

Fijada una sucesión (ε_n) de números positivos con $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ definimos en Z^{∞} los "rectángulos"

$$R = \{\bar{n} : |n_k| < \varepsilon_k\}$$

$$\delta\cdot R = \{\bar{n} : |n_k| < \delta\ \varepsilon_k\} \qquad , \quad 0 < \delta < \infty$$

Es obvio que $\{\delta R\}$ es una familia creciente de subconjuntos finitos cuya unión es todo Z^{∞}. Se trata de estudiar si las sumas

$$S_{\delta R}f(\bar{x}) = \sum_{n\in\delta R} \hat{f}(\bar{n})\ \exp(2\pi i\ \bar{n}\cdot\bar{x})$$

de la función $f\in L^{1}(T^{\omega})$ convergen en algún sentido a f $(\delta\to\infty)$.

El Análisis de Fourier en T^{ω} ha sido poco tratado. Su interés puede justificarse de un lado por constituir una extensión lógica del Análisis de Fourier n-dimensional,pero obteniendo acotaciones que no dependan de la dimensión n. Por otro lado, $\{\exp(2\pi i x_k): k=1,2,\ldots\}$ es un sistema de variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en la circunferencia unidad compleja (i.e. una versión complexificada de las funciones de Rademacher),cuya completación natural en L^{2} es el sistema trigonométrico sobre T^{ω},por lo que resultan ser las series de Fourier de infinitas varables el análogo complejo de las series de Walsh. Las series de Fourier en T^{ω} tienen también conexión con las series de Diriclet (v.[2]) y con la Teoría de la Predicción (v.[6]). Los resultados presentados aquí son consecuencia bastante sencilla de técnicas usadas en dimensión finita,y solo pretenden servir de motivación para un estudio más profundo.

2.-Convergencia en Norma

El análogo del teorema de M.Riesz: $\|S_{\delta R}f\|_p \le C_p\ \|f\|_p$ solo es válido para $p=2$ según es fácil probar. Como el teorema en L^2 es trivial,en búsqueda de resultados positivos menos obvios definimos los espacios

$$L^{\bar{p}}(T^{\omega}) = L^{p_1,p_2,\ldots,p_k,\ldots}(T\times\ T\times\ldots\times T\times\ldots)$$

(con $\bar{p} = (p_1,p_2,\ldots,p_k,\ldots)$, $1\le p_k\le\infty$) de manera análoga a los espacios de norma mixta de Benedek-Panzone (v.[1])con un paso al límite.

<u>TEOREMA 1</u>:a) <u>Los operadores</u> $(S_{\delta R})$ <u>son uniformemente acotados en</u> $L^{\bar{p}}(T^{\omega})$ (<u>equivalentemente</u> $\lim \|S_{\delta R}f - f\|_{\bar{p}} = 0$ <u>para cada</u> $f\in L^{\bar{p}}$) <u>si y solo si</u> $\Sigma\ |p_k-2|<\infty$.

b) <u>Si</u> $\sum_{p_k<2} (2-p_k) = \infty$, <u>existe una función</u> $f\in L^{\bar{p}}$ <u>tal que cuando</u> $\delta\to\infty$ $(S_{\delta R}f)$ <u>es divergente en medida</u>.

La acotación uniforme de $(S_{\delta R})$ equivale a la existencia de un operador acotado S_Γ asociado al multiplicador χ_Γ, con $\Gamma = \{\bar{n} \in Z^\infty : n_k > 0\}$. La primera parte se obtiene expresando la norma de S_Γ como producto de las normas de las transformadas de Hilbert en $L^{p_k}(T)$ (v. [7]). La segunda parte se deduce del mismo argumento junto con una versión adecuada del teorema de Stein (v. [9]).

3.-Convergencia Puntual

Por Teor. 1(b) no cabe esperar resultados positivos de convergencia a.e. si $f \in L^p(T^\omega)$ con $p<2$. Nos limitaremos a estudiar la convergencia puntual para funciones de L^2.

TEOREMA 2 : Existe $f \in L^2(T^\omega)$ tal que

$$\limsup_{\delta \to \infty} |S_{\delta R} f(\bar{x})| = +\infty \quad \text{a.e.}$$

En vista de este resultado negativo, buscamos conjuntos A en Z^∞ tales que haya convergencia casi por todo para las funciones del espacio

$$L^2_A(T^\omega) = \{ f \in L^2 : \hat{f}(\bar{n}) = 0 \quad (\forall \bar{n} \notin A)\}$$

TEOREMA 3 : Consideremos los subconjuntos de Z^∞

$$A(m) = \{\bar{n} = (n_k) : |\bar{n}| = \sup_{k \leq m} |n_k|\}$$

$$B(m) = \{\bar{n} = (n_k) : \#(\bar{n}) \leq m\}$$

Para toda $f \in L^2_{A(m)}$ y para toda $f \in L^2_{B(m)}$ se verifica

$$\lim S_{\delta R} f(\bar{x}) = f(\bar{x}) \quad \text{a.e.}$$

En ambos casos se trata de obtener la acotación

$$[*] \qquad \|(\sup_\delta |S_{\delta R} f|)\|_2 \leq C \|f\|_2 \qquad (f \in L^2_A)$$

En el caso de $A(m)$ esto se consigue con una adaptación del método de Fefferman (o de Tevzadze) en dos variables (v. [5]). Para $B(m)$ hay que usar inducción sobre m con un cierto argumento combinatorio, comenzando por probarlo para $B(1)$. Las funciones de $L^2_{B(1)}$ son del tipo

$$f(\bar{x}) = \sum_{1 \leq k \leq \infty} f_k(x_k) \quad (\text{en } \|\cdot\|_2) \quad , \text{ con } f_k \in L^2(T)$$

y [*] se obtiene a partir de la acotación del operador maximal en una variable (v.[3]) y de argumentos de independencia análogos a los de la desigualdad de Kolmogorov para la ley fuerte de los grandes números.

4.- Problemas Abiertos

Casi todo el Análisis de Fourier en T^{ω} es un problema abierto,pero quiero expecificar los siguientes:

A) Desarrollar una teoría de Littlewood-Paley en T^{ω} o (casi equivalentemente) dar versiones no triviales de los multiplicadores de Marcinkiewicz-Hormander.

B) Adaptar a T^{ω} las diversas definiciones de espacios H^{p} ,estudiando su descomposición atómica,dualidad,etc.

C) Obtener métodos de sumabilidad a.e. aplicables a funciones de $L^{p}(T^{\omega})$ con $p < 2$ (Los únicos procesos de sumabilidad conocidos son los que resultan del trabajo de Edwards y Hewitt [4] ,válidos para L^{1} pero excesivamente elementales y poco satisfactorios por requerir dos pasos al límite consecutivos).

D) Si $p_k > 1$ pero $p_k \longrightarrow 1$, el espacio $L^{\bar{p}}$ no está contenido en ningún espacio de Orlicz estrictamente menor que L^{1} . Con la identificación $2^{\omega} \cong [0,1)$,pueden definirse los espacios $L^{\bar{p}}([0,1))$ respecto de la medida de Lebesgue,estudiando en ellos la acotación de ciertos operadores relacionados con series de Fourier ordinarias o (lo que parece más natural) con series de Walsh.

Referencias:

[1] A.BENEDEK,R. PANZONE:The spaces L^{p} with mixed norm . Duke Math. J. 28 (1961),301-324.

[2] H. BOHR:Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen . Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Physik,Kl. 1913 , 441-448

[3] L. CARLESON:On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 116 (1966) , 135-157.

[4] R.E. EDWARDS,E. HEWITT:Pointwise limits for sequences of convolution operators . Acta Math. 113 (1965) , 181-218.

[5] C. FEFFERMAN:On the convergence of multiple Fourier series . Bull. A.M.S. 77 (1971) , 744-745

[6] H. HELSON,D. LOWDENSLAGER:Prediction theory and Fourier series in several variables . Acta Math. 99 (1958) , 165-202.

[7] S. PICHORIDES:On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz,Zygmund and Kolmogorov . Studia Math. 44 (1972) , 165-179.

[8] W. RUDIN:Fourier Analysis on Groups . Interscience,New York 1962

[9] E.M. STEIN:Singular Integrals and..... Princeton Univ. Press , 1970