Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

EXTENSION DE OPERADORES DE L^p EN L^q AL CASO VECTORIAL

F.J. Ruíz Blasco, J.L. Torrea Hernández

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Zaragoza

Abstract:

In this paper we study the problem of extending an operator $T: L^p \longrightarrow L^q$ to the vectorial case. We consider the $V^p_{c,B}$ classes introduced by R.S. Phillips [2] giving a certain answer to the problem. We apply these results to some operators of Fourier Analysis.

0. Dados dos espacios de medida (X,μ), (Y,ν) y un operador $T: L^p(X,\mu) \longrightarrow L^q(Y,\nu)$ lineal y continuo $(1 \leq p,q \leq \infty)$ no siempre es posible extenderlo a un operador lineal y continuo $T: L^p_B(X,\mu) \longrightarrow L^q_B(Y,\nu)$, donde B es de Banach, de forma que

$$T(\sum b_i \varphi_i) = \sum b_i T(\varphi_i) \quad , \quad \sum b_i \varphi_i \in B \otimes L^p(X,\mu) \; .$$

Ejemplos de esto son:

i) La transformada de Fourier $\mathcal{F}: L^2_{l^r}(T) \longrightarrow L^2_{l^r}(Z)$ que no está acotada si $r \neq 2$ [3].

ii) La función conjugada $\mathbf{T}: L^p_{l^1}(T) \longrightarrow L^p_{l^1}(T)$, [1].

En este trabajo damos una respuesta afirmativa a dicho problema manejando los espacios $V^p_B(X,\mu)$ introducidos por Phillips [2].

1. El principal resultado de este apartado es el siguiente:

1.1. Teorema.- Dado un operador lineal y continuo $T: L^p(X) \longrightarrow L^q(Y)$ $(1 \leq p,q < \infty)$ se extiende con la misma norma a un operador $\widetilde{T}: V^p_B(X) \longrightarrow V^q_B(Y)$ tal que

$$\widetilde{T}(\sum b_i \varphi_i) = \sum b_i T(\varphi_i) \quad , \quad \sum b_i \varphi_i \in B \otimes L^p(X) \; .$$

Demostración.- Dado $F \in V_B^p(X)$, basta definir $\tilde{T}F = F \circ T^*$. Para $q \neq 1$, el teorema se sigue de Teorema 4.1. en [2]. Para $q = 1$, se demuestra previamente que $\tilde{T}F$ (que en principio sólo sabemos que es un operador de $L^\infty \longrightarrow B$) es efectivamente un elemento de $V_B^1(Y)$ y se procede como en $q \neq 1$.

Observaciones.- Hemos demostrado en [4] que $(L_B^p(X), ||.||_w) = V_{C,B}^p(X)$ donde $V_{C,B}^p(X)$ es el subespacio de $V_B^p(X)$ $(1 \leq p < \infty)$ cuyo operador asociado por (1.3) es compacto.

El teorema 1.1 es válido cambiando los espacios V_B^p por los espacios $V_{c,B}^p$. Además, en este caso, la extensión es única.

Por razonamientos habituales de densidad se llega también al resultado 2.1 para $V_{c,B}^p$, pero sin obtener de expresión explícita del operador. (ver [4]).

2. Aplicaciones

2.1. Transformada de Fourier. La extensión mediante 1.1 del operador transformada de Fourier $\mathfrak{F} : L^p(G) \longrightarrow L^{p'}(\Gamma)$ $1 \leq p \leq 2$ donde G es grupo localmente compacto abeliano y Γ su dual. Nos da una extensión a $\tilde{\mathfrak{F}} : V_{c,B}^p(G) \longrightarrow V_{c,B}^{p'}(\Gamma)$ que verifica la desigualdad de Hausdorff-Young y el teorema de Plancharel. El caso no compacto es de especial importancia pues permite definir la transformada de Fourier para funciones f de L_B^p con $p > 1$.

2.2. Multiplicadores. Si T es un multiplicador $T: L^p(G) \longrightarrow L^p(G)$ tal que $(Tf)^\wedge = m\hat{f}$, $m \in L^\infty(\Gamma)$ para $f \in L^p \cap L^2$ entonces $\tilde{T}: V_{c,B}^p(G) \longrightarrow V_{c,B}^p(G)$ y se verifica $(\tilde{T}F)^\wedge = m \hat{F}$, $F \in V_{c,B}^p(G) \cap V_{c,B}^2(G)$, donde $m \hat{F}$ es el elemento de $V_{c,B}^2$ cuyo operador U asociado por Teorema 4.1 en [2] tiene la forma $U(\varphi) = \int \varphi \, m d\hat{F}$.

Como casos particulares tenemos:

i) La función conjugada extendida es acotada de $V_{c,B}^p(T)$ en $V_{c,B}^p(T)$ con $1 < p < \infty$.

ii) Los operadores $\tilde{S}_n$ extendidos por 1.1 de las sumas parciales S_n de la serie de Fourier está uniformemente acotados de $V^p_{c,B}(T)$ en $V^p_{c,B}(T)$ $(1 < p < \infty)$.

Es fácil comprobar que $\tilde{S}_n F \in L^p_B(T)$, $F \in V^p_{c,B}(T)$ y que

$$\tilde{S}_n F(x) = \sum_{-n}^{n} \hat{F}(K) e^{iKX} \quad , \quad x \in T \quad ,$$

donde

$$\hat{F}(K) = \int e^{-iK(\cdot)} dF$$

(Nótese que $V^{p'}_B(Z)$ es un espacio de sucesiones (ver [2]) y que por ello tiene sentido hablar de $\hat{F}(K)$, $K \in Z$).
Como consecuencia de (ii) se tiene que:

$$||S_n f - f||_{w,p} \longrightarrow 0 \quad , \quad f \in L^p_B(T) \qquad (1 < p < \infty)$$

Es decir, hay convergencia débil de las sumas parciales de la serie de Fourier de una función de $L^p_B(T)$ a la función si $1 < p < \infty$.

Bibliografía

[1] S. BOCHNER and A.E. TAYLOR: Linear functionels on certain spaces of abstractly-valued functions. Annals of Math. (2) 39 (1938) , 913-944.

[2] R.S. PHILLIPS: On linear transformations. Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), 516-541.

[3] J.L. RUBIO DE FRANCIA: Análisis de Fourier de funciones vectoriales. Sem. An. de Fourier y E.D.P., Segovia (1978)

[4] F.J. RUIZ-J.L. TORREA: Transformada de Fourier de funciones vectoriales. Revista de la Academia de Ciencias. Madrid. (por aparecer).