Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

UNA CARACTERIZACION DE LOS CONJUNTOS DE PICO-INTERPOLACION DE UNA CIERTA CLASE DE ALGEBRAS UNIFORMES

Joan Verdera

Dpt. de Teoria de Funcions
Universitat de Barcelona

ABSTRACT. Let A be a uniform algebra on a compact space X, let B be a (commutative) extension of A finitely generated amd projective as A-module and let π be the projection from the maximal ideal space of B onto that of A. We show that if B is a uniform algebra then a G_δ subset K of $\pi^{-1}(X)$ is a peak-interpolation set for B if and only if $\pi(K)$ is a peak-interpolation set for A.

Sea A un álgebra de Banach compleja, commutative y unitaria y sea B una extensión (conmutativa) de A, finitogenerada i proyectiva como A-módulo. Indiquemos por M_B y M_A a los espectros de ideales maximales de B y de A, dotados de la topología de Guelfand y por π a la aplicación de M_B en M_A definida mediante la relación $\pi(\psi)=\psi/_A \quad \forall\psi\in M_B$.

La situación precedente puede ilustrarse mediante el siguiente ejemplo: considérese un polinomio mónico a coeficientes de A, digamos $\alpha(x)$, y fórmese el cociente A_α del anillo de polinomios a coeficientes en A por el ideal principal generado por $\alpha(x)$. Es fácil ver que A_α es libre de dimensión el grado de $\alpha(x)$. Las extensiones A_α fueron introducidas por Arens y Hoffman en [1] y han sido estudiadas desde distintos puntos de vista por Linelberg, Craw, Dales y Mc Clure entre otros. En 1974 A. Magid demuestra [2] que es posible dotar a B de una estructura de álgebra de Banach, asociada naturalmente a la de A, iniciando así el estudio del "morfismo proyectivo" entre álgebras de Banach. En [3] el autor dió una descripción de la estructura de π: resulta ser que π es un homeomorfismo local salvo en los puntos de un cerrado (de M_B) sin interior. También se conoce una condición necesaria y suficiente para que B sea uniforme si A lo es [3] .

El objeto de la presente nota es enunciar dos resultados que resuelven el problema de caracterizar los conjuntos de pico-interpolación de B en términos de los de A con hipótesis de uniformidad sobre A y B. Las demostraciones se publicarán a su debido tiempo.

Recordemos ahora una serie de conceptos bien conocidos. Si C es un álgebra de Banach (compleja, conmutativa y unitaria), X una frontera de C y K un subconjunto de X, se dice que K es un conjunto pico para C sobre X si $\exists f \in C$ tal que

$$\hat{f}(x)=1 \qquad \forall x \in K \qquad \text{y} \qquad |\hat{f}(x)|<1 \qquad \forall x \in X \setminus K,$$

donde $\hat{f}$ es la transformada de Guelfand de f.

K es un conjunto pico generalizado para C sobre X si es una intersección de conjuntos pico para C sobre X.

K es un conjunto pico-interpolación (pico-interpolación generalizado) para C sobre X si es un conjunto pico (pico generalizado) y toda función continua compleja sobre K es la restricción de una $\hat{f}$ con $f \in C$.

Si C es uniforme sobre un compacto X se suele prescindir de la referencia a la frontera en relación con los conjuntos pico.

Recordemos también que $Y=\pi^{-1}(X)$ es una frontera para B si A es un álgebra uniforme sobre X [3].

Ahora podemos enunciar:

TEOREMA 1. Si A es un álgebra uniforme sobre un compacto X y $K \subset Y$ es un conjunto pico-interpolación generalizado, (resp. pico-interpolación) para B sobre Y, entonces $\pi(K)$ es un conjunto pico-interpolación generalizado (resp. pico-interpolación) para A.

TEOREMA 2. Si A es un álgebra uniforme sobre un compacto X, si B es uniforme (y entonces consideramos B como álgebra uniforme sobre Y) y $K \subset Y$, son equivalente:

(1) K es pico-interpolación generalizado para B.

(2) $\pi(K)$ es pico-interpolación generalizado para A.

(3) $K \subset \pi^{-1}(H)$ para cierto $H \subset X$, H pico-interpolación generalizado para A.

El término "generalizado" puede suprimirse por doquier si se supone que K es un G_δ.

También puede demostrarse que, incluso cuando A es el álgebra del disco, un resultado análogo al teorema 2 para conjuntos de interpolación no es cierto.

REFERENCIAS.

[1] Arens-Hoffman, Algebraic extensions of normed algebras, P.A.M.S. 7 (1956), 203-210.

[2] A. Magid, Projective extensions of Banach algebras, P.A.M.S. 54 (1976), 154-156.

[3] J. Verdera, On finitely generated and projective extensions of Banach algebras, aparecerá en P.A.M.S.