Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

LA TEORIA D'OPERADORS PSEUDO-DIFERENCIALS SOBRE LES V-VARIETATS I LA SEVA RELACIÓ AMB LES FOLIACIONS.

Joan Girbau, Marcel Nicolau

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

ABSTRACT: The authors have developed the theory of pseudo-differential operators over a V-manifold (Here the difficult point is to give a good definition of a pseudo differential operator). The difficulty arise from the fact that pseudo-differential operators are not local and the groups that appear in the definition of a V-manifold are local. By applying this theory, the authors prove the existence of parametrices for elliptic differential operators of any order over a V-manifold and generalize some results from Reinhart concerning foliations with a bundle-like metric.

L'objecte d'aquesta conferencia és mostrar els resultats dels autors continguts en [3] així com les seves relacions amb els treballs d'altres autors.

La noció de V-varietat fou introduïda per Satake [7] en 1956. Reinhart [6] ha relacionat aquest concepte amb el de foliació provant que l'espai quocient $M/\mathcal{F}$ d'una varietat M per una foliació $\mathcal{F}$ amb mètrica tancada de codimensió n és una V-varietat de dimensió n. En [3] s'obté un resultat més fort provant

<u>TEOREMA 1</u>. Sigui M una varietat de dimensió n+m i $\mathcal{F}$ una foliació Hausdoff compacta sobre M de codimensió n. Sigui $B=M/\mathcal{F}$ l'espai quocient. Llavors B admet, de manera natural, una estructura de V-varietat de dimensió n.

Aquest teorema és el que ens permeterà considerar interessants exemples de V-varietats.

L'objectiu principal de [3] és desenvolupar una teoria dels operadors pseudo-diferencials (o.p.d.'s) sobre V-varietats que permeti provar l'existència de parametrius per a operadors diferencials el·líptics sobre aquestes varietats. Cal fer notar que una de les dificultats per a la construcció d'aquesta teoria ha sigut la de trobar una bona definició d'o.p.d.

La definició de V-varietat utilitzada requereix condicions més dèbils que la habitual (Baily [1]). La condició suplementària de Baily es demostra com a proposició, i això sense utilitzar la hipòtesi adicional de Satake [8] sobre la dimensió del conjunt de punts singulars de la V-varietat. En [3] també es dóna una demostració constructiva de l'existència de particions de la unitat sobre una V-varietat.

Baily [1] ha provat l'existència de parametrius per als operadors diferencials el·líptics d'ordre 2 sobre V-varietats compactes. En [3] s'obté una generalització d'aquest resultat de la següent manera: Sigui B una V-varietat (no necessàriament compacta) i $\mathcal{U}$ la família dels oberts de B que admeten un sistema local uniformitzant. Denotem per $\mathcal{E}(B)$ l'espai de les funcions C^∞ complexes sobre B i per $\mathcal{D}(B)$ el de les funcions C^∞ complexes amb suport compacte. Aleshores

TEOREMA 2. Sigui B una V-varietat tal que $\mathcal{U}$ forma una família d'oberts de B i sigui $D: \mathcal{E}(B) \longrightarrow \mathcal{E}(B)$ un operador diferencial el·líptic (d'ordre arbitrari). Existeix un o.p.d. $Q: \mathcal{D}(B) \longrightarrow \mathcal{E}(B)$ tal que $Q \circ D \sim D \circ Q \sim I$. Es a dir que Q és una parametriu de D.

Com a consequència obtenim el següent teorema de descomposició. Suposem que B és compacta, orientada i proveïda d'una mètrica de Riemann. Sigui $\pi : E \longrightarrow B$ un V-fibrat vectorial amb una mètrica Hermítica h. Sobre l'espai $\mathcal{D}(E)$ de les seccions C^∞ de E amb suport compacte definim el següent producte Hermític

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_B h(s_1, s_2)\, \eta$$

on η és l'element de volum corresponent a la mètrica de Riemann. En aquestes condicions es prova

TEOREMA 3. Sigui $D: \mathcal{D}(E) \longrightarrow \mathcal{D}(E)$ un operador diferencial el·líptic auto-adjunt respecte del producte $\langle\ ,\ \rangle$. Aleshores $\mathcal{D}(E) = \ker D \oplus \operatorname{Im} D$ (suma directa ortogonal) i kerD té dimensió finita.

Com aplicació d'aquest resultat a les foliacions complexes analítiques amb mètrica Hermítica "bundle-like", es relacionen els espais de cohomologia de formes "base-like" amb els espais de formes harmòniques "base-like".

Sigui M una varietat complexa compacta i $\mathcal{F}$ una foliació amb fulles tancades. Suposem M proveïda d'una mètrica Hermítica completa "bundle-like". Llavors, per un teorema de R. Hermann [4], l'espai quocient $B=M/\mathcal{F}$ és Hausdorff i, per tant, pel Teorema 1, admet una estructura canònica de V-varietat (aquest fet serà el que ens permeterà aplicar els resultats anteriors a la actual situació). Suposem també que $E \longrightarrow M$ és un fibrat vectorial, complex, analític i foliat, proveït d'una mètrica Hermítica foliada h. Denotem per $\langle\ ,\ \rangle$ el producte hermític sobre les formes diferencials avaluades en E associat a h. Denotem per d''_E l'operador diferencial exterior de tipus (0,1) sobre les formes avaluades en E i per δ''_E i Δ''_E els operadors codiferencial i Laplaciana, respectivament, associats a d''_E. Sigui $D^{p,q}(E)$ l'espai de les (p,q)-formes "base-like" avaluades en E i $H^{p,q}(M,E)$ el subespai de $D^{p,q}(E)$ de les formes harmòniques respecte Δ''_E. En aquesta situació en [3] es prova

<u>TEOREMA 4</u>. Si E és un fibrat vectorial complex, analític i admissible, aleshores es verifica la següent descomposició ortogonal respecte $\langle\ ,\ \rangle$:

$$D^{p,q}(E) = H^{p,q}(M,E) \oplus d''_E(D^{p,q-1}(E)) \oplus \delta''_E(D^{p,q+1}(E))$$

i l'espai $H^{p,q}(M,E)$ té dimensió finita.

<u>COROL·LARI</u>. Sigui $H^q(D^{p,\cdot}(E), d''_E)$ el q-espai de cohomologia del complex

$$\cdots \longrightarrow D^{p,q}(E) \xrightarrow{d''_E} D^{p,q+1}(E) \longrightarrow \cdots$$

Tenim $H^q(D^{p,\cdot}(E), d''_E) \cong H^{p,q}(M,E)$, i aquests espais tenen dimensió finita.

Aquest teorema és anàleg al d'en Reinhart [5] pel cas complex i formes avaluades en un fibrat vectorial.

Hem de fer notar que aquests resultat es proven per als fibrats admissibles, introduïts en [3] . La consideració d'aquesta classe de fibrats vectorials foliats fou suggerida per un teorema de Reeb, Ehresmann, Haefliger i Epstein (veure [2]) i comprèn un important nombre de cassos interessants com, per exemple, el fibrat trivial, el fibrat transversal i tots els fibrats construïts per mètodes functorials a partir d'altres fibrats admissibles.

REFERENCIES

[1] BAILY,W.L. The descomposition theorem for V-manifolds. Amer.J. of Math. 78 (1956) 862-888.

[2] EPSTEIN,D.B.A. Foliations with all leaves compact. Ann.Inst. Fourier, Grenoble. 26,1 (1976) 265-282.

[3] GIRBAU,J.-NICOLAU,M. Pseudo-differential operators on V-manifolds and Foliations. Collectánea Math. Vol.30 (1979).

[4] HERMANN,R. On the differential geometry of foliations. Ann. of Math. 72 (1960) 445-457.

[5] REINHART,B.L. Harmonic integrals on foliated manifolds. Amer.J. of Math. 81 (1959) 529-536.

[6] REINHART,B.L. Closed metric foliations. Michigan Math.J. 8 (1961) 7-9.

[7] SATAKE,I. On a generalization of the notion of manifold. Proc.Nat.Acad.Sci.USA 42 (1956) 359-363.

[8] SATAKE,I. The Gauss-Bonet theorem for V-manifolds. J. of Math.Soc. of Japan 9 (1957) 464-492.