Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

GRUPOS CICLICOS DE AUTOMORFISMOS DE SUPERFICIES DE RIEMANN COMPACTAS Y NO ORIENTABLES

Emilio Bujalance

Dpto. de Geometría y Topología
Universidad Complutense de Madrid

Abstract: In this work we will find the minimun genus of a compact non-orientable Riemann Surface, having a given cyclic group of automorphisms. For this we caracterize the proper N.E.C. groups for which there is a non-orientable Surface-Kernel homomorphism. In the last part of this paper we give a bound depending on the genus, for the order of the ciclic groups of automorphisms of compact Klein Surfaces without bourdary, and cyclic groups of automorphisms reaching the bound are obtained.

1. Introducción

Una Superficie de Riemann compacta y no orientable es una Superficie de Klein compacta, no orientable y sin borde (1)

En este trabajo vamos a encontrar el mínimo género de estas Superficies que tienen un determinado grupo cíclico de automorfismos. El problema correspondiente en el caso de Superficies de Riemann compactas y orientables ha sido resuelto por Harvey en (2).

En (§2) se dan algunos resultados sobre los grupos de automorfismos de Superficies de Riemann compactas y no orientables. En (§3) se caracterizan los grupos N.E.C. propios, para los que existe un homomorfismo en un grupo cíclico cuyo nucleo es el grupo de una Superficie no orientable. En (§4) se resuelve el problema del mínimo género. Y por último en (§5) se da una cota superior en función del género para el orden de los grupos cíclicos de automorfismos de Superficies de Klein compactas y sin borde, y se obtienen grupos de automorfismos que la alcanzan, en el caso de Superficies de Klein compactas y con borde, esta cota ha sido obtenida por May en (3).

2. Superficies de Riemann compactas y no orientables

Un grupo cristalográfico no Euclideo, grupo N.E.C., es un subgrupo discreto Γ del grupo G de isometrías del plano no Euclideo, incluyendo las que invierten la orientación. Γ es un grupo N.E.C. propio si no es un grupo Fuchsiano, y se denota por Γ^+ el grupo Fuchsiano $\Gamma \cap G^+$.

Un grupo N.E.C. Γg es el grupo de una Superficie no orientable, si Γg tiene la siguiente signatura: $(g;+;[-];\{-\})$, y un grupo N.E.C. Γp es el grupo de una Superficie no orientable si Γp tiene la siguiente signatura: $(p;-;[-];\{-\})$.

Dado Γp, tenemos que el espacio de órbitas $D/\Gamma p$ (donde D es $\mathbb{C}^+$) es una Superficie no orientable de género p. La proyección canónica $\pi: D \to D/\Gamma p$ induce una estructura bianalítica en $D/\Gamma p$, que establece en $D/\Gamma p$ una estructura de Superficie de Riemann compacta y no orientable, de género p. Como consecuencia de los resultados dados por Singerman en (4) se establece el siguiente teorema.

(2.1) Teorema

Si G es un grupo finito, G es el grupo de automorfismos de una Superficie de Riemann compacta y no orientable de género $p \geq 3$.

3. Homomorfismos cuyos núcleos son grupos de Superficies no orientables.

(3.1) Definición

Un homomorfismo θ de un grupo N.E.C. Γ en un grupo finito H es un homomorfismo cuyo nucleo es el grupo de una Superficie no orientable, si Ker θ es el grupo de una Superficie y $\theta(\Gamma^+) = G$.

(3.2) Teorema

Sea Γ un grupo N.E.C. propio de signatura

$$(g;+;[m_1\ldots m_\tau];\{(-)(-)\ldots\overset{k}{.}\ldots(-)\})$$

y sea $Z/(n)$, n par. Entonces existe un homomorfismo cuyo nucleo es el grupo de una Superficie no orientable $\theta:\Gamma\to Z/(n)$ si y sólo si i) $m_i \backslash n \quad \forall i\in I \quad I=\{1,\ldots,\tau\}$

ii) si $g=0$ $k=1$, existe $H\subset I$ tal que m.c.d.$\left(\left(\frac{n}{m_i}\right)_{i\in H}\right)=1$

(3.3) Teorema

Sea Γ un grupo N.E.C. propio de signatura

$$(g;-;[m_1\ldots m_\tau];\{(-)(-)\ldots\overset{k}{.}\ldots(-)\})$$

y sea $Z/(n)$, n par. Entonces existe un homomorfismo cuyo nucleo es el grupo de una Superficie no orientable $\theta:\Gamma\longrightarrow Z/(n)$ si y sólo si i) $m_i\backslash n \ \forall i\in I \quad I=\{1,2,\ldots,\tau\}$

ii) si $k=0$, $\sum_{i\in I}\frac{n}{m_i}=\dot{2}$ y además:

a) si $g=1$ $\exists H\subset I$ tal que m.c.d.$\left(\left(\frac{n}{m_i}\right)_{i\in H}\right)=1$

b) si $g=2$ y $\sum_{i\in I}\frac{n}{m_i}\equiv\dot{4}(n)$, $\exists H\subset I$ y $\exists p_i,q,p,r\in Z$ $1\leq r\leq n$ y $q+2p=\dot{2}$

$$\text{tal que} \sum_{i\in H}\frac{np_i}{m_i} - \frac{p}{2}\left(\sum_{i=1}^{\tau}\frac{n}{m_i}\right)+qr\equiv 1(n)$$

(3.4) Teorema

Sea Γ un grupo N.E.C. propio de signatura $(g;-;[m_1\ldots m_\tau])$ y sea $Z/(n)$, n impar. Entonces existe un homomorfismo cuyo nucleo es el grupo de una Superficie no orientable $\theta:\Gamma\to Z/(n)$ si y sólo si i) $m_i\backslash n \quad \forall i\in I \quad I=\{1,\ldots\tau\}$

ii) si $g=1$ $\exists H\subset I$ tal que m.c.d. $\left(\left(\frac{n}{m_i}\right)_{i\in H}\right)=1$

4 Género mínimo

(4.1) Teorema

Si $N=q$, q primo, el mínimo género p de una Superficie de Riemann compacta y no orientable con el grupo de automorfismos isomorfo a $Z/(n)$ es: si $q=2$ $p=3$

si $q\neq 2$ $p=q$

(4.2) Teorema

Si $N = 2^{r_1} q_1^{r_2} \dots q_\alpha^{r_\alpha}$ donde $2 < q_1 < \dots < q_\alpha$, y $q_1 \dots q_\alpha$ primos. El mínimo género p de una Superficie de Riemann compacta y no orientable con el grupo de automorfismos isomorfo a Z/(N) es $p = 2 + \frac{N}{2} - \frac{N}{q_1}$

(4.3) Teorema

Si $N = q_1^{r_1} \dots q_\alpha^{r_\alpha}$ donde $q_1 < q_2 < \dots < q_\alpha$, $q_1, q_2, \dots q_\alpha$ primos y $q_1 \neq 2$, el mínimo género p de una Superficie de Riemann compacta y no orientable, con el grupo de automorfismos isomorfo a Z/(N) es $p = 2 + N - \frac{N}{q_1} - \frac{N}{q_2}$

(4.4) Teorema

Si $N=2^r$, siendo $r \neq 1$, el mínimo género p de una Superficie de Riemann compacta y no orientable, con el grupo de automorfismos isomorfo a Z/(N) es $p = 1 + \frac{N}{2}$

(4.5) Teorema

Si $N=q_1^r$, siendo $q_1 \neq 2$ primo, y $r \neq 1$, el mínimo género p de una Superficie de Riemann compacta y no orientable con el grupo de automorfismos isomorfo a Z/(N) es $p = 1 + N - \frac{N}{q_1}$

6. Cota Superior para el orden de los grupos cíclicos de automorfismos

Una Superficie de Klein compacta y sin borde, o es una Superficie de Riemann compacta y no orientable, o es compacta y orientable.

En las Superficies de Riemann compactas y orientables de género g, el máximo orden de los grupos cíclicos de automorfismos es 2(2g+1), ver (5), y este orden puede alcanzarse.

En las Superficies de Riemann compactas y no orientables, de género p, los teoremas del (§5) permiten establecer una cota para el máximo orden de los grupos cíclicos de automorfismos, que es 6(p-2), y este orden siempre puede alcanzarse.

Referencias

(1) ALLING,N.L. and GREENLEAF,N. Foundations of the theory of Klein Surfaces. Lectures Notes 219 (1.971)

(2) HARWEY,W.J. Cyclic groups of automorphisms of compact Riemann Surface. Quart. J. Math. Oxford (2) 17 (1.966)

(3) MAY,C.L. Cyclic automorphism groups of compact bordered Klein Surfaces. Houston J. Math. 3 (1.977)

(4) SINGERMAN,D. Automorphisms of compact non-orientable Riemann Surfaces, Glasgow J. Math. (1.971)

(5) WIMAN,A. Veber die hyperlliptischan Curven und diejenigen von Geschlechte p=3, welche ein deuligen transformation in sich zulassen. Bihan Kongl Svenska Vetens Kaps-Akademiens Haudlinger (Stockolm 1.895-6)