Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

ARITMETICA TOPOLOGICA REAL

José Garay de Pablo

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Zaragoza

Resumen:

Análogamente al hecho de que a conjuntos coordinables se les asocia un número cardinal, y a conjuntos ordenados isomorfos un número ordinal, a espacios topológicos homeomorfos les asociamos un ente que podemos llamar número topológico. Al definir sobre estos números una ordenación y una aritmética aparecen analogías y diferencias con aritmética usual de los números naturales. En este trabajo se estudian estos hechos para ciertos números topológicos extraídos del espacio de los números reales.

Sabemos que la idea de isomorfismo es una de las más enraizadas en la Matemática.

En términos generales podemos decir que un isomorfismo es una biyección σ entre dos conjuntos A y B que poseen alguna estructura, de manera que σ respeta dicha estructura. Es decir no toda biyección es isomorfismo. En un caso extremo si A y B tienen la estructura vacía (o sea carecen de estructura) toda biyección es un isomorfismo. En este caso el concepto de conjuntos isomorfos es equivalente al de conjuntos coordinables. Y a la clase de todos los conjuntos coordinables le asociamos un número cardinal, estableciendo posteriormente una aritmética con dichos números cardinales.

Vemos pues, que la aritmética de los números cardinales está asociada a la estructura vacía. Es de esperar que otros tipos de estructura originen también otras aritméticas. Tal es el caso conocido de los números ordinales, asociados a la estructura de orden.

En este trabajo hacemos un ensayo sobre la aritmética originada por las estructura topológicas. Nos limitaremos a considerar subespacios de R por lo que llamaremos números topológicos reales a los asociados a dichos subespacios.

Dada la brevedad del espacio disponible nos limitamos a exponer aquí los conceptos y resultados más notables dejando para otra publicación las demostraciones.

1. Si A es un subconjunto de R indicaremos con $\tau(A)$ el número topológico real asociado a la familia de todos los subconjuntos de R homeomorfos con A.

Nótese que puede ser $\tau(A) = \tau(B)$ y sin embargo A y B no tienen las mismas propiedades como subespacios de R. Por ejemplo, $A = N$ es cerrado y es homeomorfo con $B = \{\frac{1}{n}\ ,\ n \in N\}$ que no lo es.

2. <u>Definición</u>. $\tau(A) = \tau(B)$ si y sólo si existe $C \subset B$ tal que $\tau(A) = \tau(C)$.

3. <u>Teorema</u>. La relación anterior es reflexiva y transitiva.

Obsérvese en cambio que = no es antisimétrica, es decir, no se cumple un teorema análogo al de Berstein. Por ejemplo, si $A = (0,1)$ y $B = (0,1) \cup (2,3)$ se tiene $\tau(A) \leq \tau(B)$, $\tau(B) \leq \tau(A)$, $\tau(A) \neq \tau(B)$.

4. <u>Definición</u>. Si A y B están separados definimos

$$\tau(A) + \tau(B) = \tau(A \cup B)$$

Si al igual que para los números cardinales solamente hubiésemos exigido que A y B sean disjuntos, el resultado de la suma dependería de los representantes elegidos. De alguna manera pues, lo análogo a la disjunción entre conjuntos sin estructura es la separación entre espacios topológicos.

5. <u>Teorema</u>. La suma es conmutativa, asociativa y monótona respecto de la relación $\leq$, y posee $\tau(\phi)$ como elemento neutro.

Además de la igualdad $x+y = z$ se deducen $x \leq z$, pero el recíproco no es cierto.

6. <u>Definición</u>. $\tau(A).\tau(B) = \tau(A \times B)$.

Puede ocurrir que $A \times B$ no sea homeomorfo con ningún subespacio de R en cuyo caso el número topológico resultante pertenecerá a R^2.

7. <u>Teorema</u>. El producto es conmutativo, asociativo y posee $\tau(\phi)$ y $\tau(\{0\})$ como elementos nulo y neutro respectivamente.

Pasamos a estudiar a continuación los números topológicos reales asociados a subespacios contables.

Si $A \quad R$ definimos:

$$A_o = A \ ; \qquad A_n = A'_{n-1} \cap A_{n-1} \qquad (n \in N)$$

Evidentemente $\quad A_n \supset A_{n+1} \qquad (n \in N)$.

8. Definiciones. Un elemento $x \in A$ es de orden n, si y sólo si $x \in A_n \setminus A_{n+1}$. Se indicará $o(x) = n$.

Si $x \in A_n$ para todo $n \in N$ diremos que su orden es infinito, $o(x) = \infty$.

Un conjunto A es de orden finito si todos sus elementos lo son. En este caso llamaremos orden de A

$$o(A) = \sup \{o(x),\ x \in A\}$$

pudiendo ser $o(A) = \infty$.

9. Teorema. Si A es finito, $o(A) = o$. Si A es infinito y de orden finito, A es numerable.

El recíproco no es cierto. Q es numerable y todos sus elementos son de orden infinito.

También puede ocurrir que $A' \neq \phi$ y sin embargo $o(A) = o$. Por ejemplo, $A = \{\frac{1}{n}\ ,\ n \in N\}$.

10. Definición. Si A es de orden finito llamaremos multiplicidad de A que indicaremos con $m(A)$ al cardinal del conjunto

$$\{x \in A\ ,\ o(x) = o(A)\} \ .$$

Diremos que el conjunto vacío tiene orden y multiplicidad cero, $o(\phi) = m(\phi) = o$.

Notemos que si $o(A) = \infty$, será $m(A) = o$. Por 9 el único cardinal trasfinito que puede aparecer en esta definición es el χ_o. Indicaremos $m(A) = \infty$ cuando ocurra este caso.

11. Teorema. Sean A y B dos conjuntos cerrados de orden finito tales que $o(A) = o(B)$ y $m(A) = m(B)$. Entonces $\tau(A) = \tau(B)$.

Indicaremos con α_n^m a dicho número topológico donde $m = m(A)$ y $n = o(A)$.

Pasamos a estudiar ahora subespacios de R todos cuyos elementos son de orden infinito.

12. Definición. Definimos los siguientes subconjuntos de Q:

$$S^o = (0,1)$$
$$S^1 = [o,1)$$
$$S^{2n} = \bigcup_{k=1}^{n} [2k,2k+1] \qquad (n \in N)$$

$$S^{2n+1} = S^{2n} \cup [2n+2,\ 2n+3) \qquad (n \in N)$$
$$S^{\infty} = \bigcup_{n \in N} \{2n, 2n+1\}$$
e indicamos con $\sigma^k = \tau(S^k)$.

13. Teorema. Sea A un conjunto numerable cuya clausura es una unión de intervalos no degenerados dos a dos separados. Sea p el número de extremos de estos intervalos que pertenecen a A. Entonces $\tau(A) = \sigma^p$ $(0 \leq p \leq \infty)$.

Estudiemos ahora el orden y la aritmética que se pueden establecer en los números topológicos introducidos hasta aquí.

14. Teorema. La suma es interna en el conjunto $\Lambda = \{\alpha_n^m\ ,\ 0 \leq m \leq \infty,\ 0 \leq n \leq \infty\}$. Además

a) Si $n < n'$ se tiene $\alpha_n^m + \alpha_{n'}^{m'} = \alpha_{n'}^{m'}$ $\forall m, m'$

b) $\alpha_n^m + \alpha_n^{m'} = \alpha_n^{m+m'}$

c) $\alpha + \alpha_\infty^o = \alpha_\infty^o$ $\forall \alpha \in \Lambda$

15. Teorema. La suma es interna en el conjunto $\Sigma = \{\sigma^p\ ,\ 0 \leq p \leq \infty\}$. Además $\sigma^p + \sigma^q = \sigma^{p+q}$.

Las sumas $\alpha+\sigma$ donde $\alpha \in \Lambda$ y $\sigma \in \Sigma$ originan números topológicos. Si indicamos con T todas las sumas con elementos de $\Lambda \cup \Sigma$ y hacemos $\sigma^{-1} = \alpha_o^o$, resulta que cada elemento $\beta \in T$ se puede representar por una terna (p,m,n) donde $x = \sigma^p + x_n^m$.

16. Teorema. Respecto del orden se verifica:

a) Si $n < n'$ se tiene $\alpha_n^m < \alpha_{n'}^{m'}$ $\forall m, m'$.

b) Si $m < m'$ se tiene $\alpha_n^m < \alpha_n^{m'}$ $\forall n$

c) $\alpha \leq \alpha_\infty^o$ $\forall \alpha \in \Lambda$

d) $x \leq y$ $\forall x \in T$, $\forall y \in T \setminus \Lambda$

Para terminar notemos que al igual que ocurre con los ordinales, existen infinitos números topológicos asociados a conjuntos numerables, en tanto que sólo hay un número cardinal que caracteriza a todos ellos.

Observemos también que con las topologías extremos de un conjunto coinciden los números topológicos con los números cardinales, puesto que dos subconjuntos son homeomorfos si, y solo si son coordinables. En cambio con una topología intermedia habrá varios números topológicos distintos asociados a conjuntos coordinables entre sí.

Entonces nos preguntamos: ¿será la topología usual de R la que origina la mayor familia de números topológicos?