

NOTA SOBRE LA OBTENCION DEL TEST DE KUIPER USANDO UN RECORRIDO
ALEATORIO CIRCULAR

Concepción Fernández Vivas

Dpto. de Estadística Matemática
Universidad de Granada

The suggestion pointed by Gnedenko-Koroliuk to interpret the distance tests from the view-point of Random Walks has been the basic idea to develop in this note a parallel derivation for the Kuiper test. The difference here rests on the consideration of a random walk over the circle, reaching a proof more simplified than the classic one.

1.- En algunos problemas biológicos y geofísicos se presentan situaciones en las que los datos básicos aparecen en forma de direcciones, deseándose contrastar la hipótesis de si éstas están o no aleatoriamente orientadas. Imaginando un círculo de circunferencia unidad, se pueden representar los datos como un conjunto de n puntos sobre el círculo. El test para la aleatoriedad de direcciones equivale entonces a contrastar la hipótesis de que los n puntos estén distribuidos al azar sobre la circunferencia.

2.- Sean $0 \leq t_1, t_2, \dots, t_n \leq 1$ las distancias de los n puntos desde un punto P (arbitrario sobre la circunferencia) que se toma como referencia. Se prefija un sentido, por ejemplo, el contrario al de las agujas del reloj. Fijado P , (t_1, \dots, t_n) determina la muestra completamente, pero como P es arbitrario resulta deseable que el estadístico-test permanezca invariante frente a elecciones de P .

De los varios estadísticos que se podrían sugerir, nos vamos a fijar en el de Kuiper $V_n = D_n^+ + D_n^-$, donde $D_n^+ = \max_{1 \leq j \leq n} (j/n - t_j)$ y $D_n^- = \max_{1 \leq j \leq n} (t_j - (j-1)/n)$ son los estadísticos unilaterales de Kolmogorov-Smirnov. (En términos de la función de distribución empírica: $D_n^+ = \sup_{t \in [0,1]} \{F_n(t) - t\}$ y $D_n^- = \sup_{t \in [0,1]} \{t - F_n(t)\}$).

LEMA. - " V_n es independiente de la elección de P ."

Dem. : Sea \tilde{P} un nuevo origen, y \tilde{D}_n^+ y \tilde{D}_n^- los nuevos valores de D_n^+ y D_n^- . Llamando \tilde{t} a la longitud del arco $P\tilde{P}$, consideremos los cambios en \tilde{D}_n^+ y \tilde{D}_n^- cuando \tilde{t} se mueve de 0 a 1, manteniendo P fijo. Obsérvese que para $t_i \leq \tilde{t} \leq t_{i+1}$, se tiene

$$\tilde{D}_n^+ = D_n^+ - i/n + \tilde{t}$$

$$\tilde{D}_n^- = D_n^- + i/n - \tilde{t}$$

para $i=0, \dots, n$; $t_0=0$, $t_{n+1}=1$.

Sumando miembro a miembro: $\tilde{V}_n = V_n$, c.q.d.

3.- Queremos ahora abordar el problema del cálculo de la distribución exacta de V_n de un modo que permita aprovechar los resultados de la teoría de Recorridos Aleatorios circulares en forma análoga a como se aplican los recorridos sobre la línea en el test de Kolmogorov-Smirnov.

Sean A_1, \dots, A_n n puntos sobre el círculo, determinados por una muestra particular. Sea A^* el punto único/(con prob.1) en donde D_n^- es alcanzable. Consideremos un mecanismo aleatorio para la elección de P , mediante el cual, P se sitúe en A_1, \dots, A_n con igual probabilidad. Teniendo en cuenta que la elección de P no afecta a V_n , se puede escribir:

$$\begin{aligned} P(V_n \leq v) &= P(V_n \leq v / P=A^*) \\ &= P(V_n \leq v, P=A^* / P=A_1 \circ \dots \circ A_n) / P(P=A^* / P=A_1 \circ \dots \circ A_n) \\ &= nP(V_n \leq v, P=A^* / P=A_1 \circ \dots \circ A_n). \end{aligned}$$

Consideremos ahora la gráfica de $F_n(t)$. Si $P=A_1 \circ \dots \circ A_n$ hay un salto en el origen de amplitud $1/n$. Fijado P , los $n-1$ puntos restantes forman una muestra de tamaño $n-1$ sobre el intervalo $(0,1)$. Estos dos hechos combinados implican que la gráfica desde el punto $(0, 1/n)$ al punto $(1,1)$ corresponde a la de $F_{n-1}(t)$ con la excepción de que la amplitud de los saltos es ahora $1/n-1$.

Nótese que cuando $P=A^*$, la gráfica de $F_n(t)$ no debe estar bajo la línea $y=t$; además, si $V_n \leq v$, la gráfica de $F_n(t)$ no debe cruzar la línea $y=v+t$. Por tanto $P(V_n \leq v, P=A^* / P=A_1 \circ \dots \circ A_n)$ es la probabilidad de que la gráfica de $F_n(t)$ no toque ni cruce las barreras $y=t$ y $y=t+v$, dado que hay un salto de amplitud $1/n$ en $t=0$.

Considerando la muestra de tamaño $n-1$ y re-escalando los saltos de $1/n$ a $1/n-1$, la probabilidad anterior es la misma que la de que la gráfica de $F_{n-1}(t)$ fluctue entre las ba-

$y + (1/n-1) = (n/n-1)t$ e $y + (1/n-1) = (n/n-1)(v+t)$. Pero és
 to es sencillamente $p_{n-1}(nv-1, 1, 1)$, donde $p_n(a, b, c)$ represen
 ta la prob. de que la gráfica de $F_n(t)$, basada en una muestra
 de n puntos en $(0, 1)$, quede entre las líneas $ny = a + (n+c)t$ y
 $ny = -b + (n+c)t$ con $a, b, c+a, b-c > 0$.

NOTA.- Brunk sugirió el estadístico $B_n = C_n^+ + C_n^-$, donde C_n^+
 y C_n^- son los estadísticos de Pyke, como una alternativa a V_n .
 Stephens ha probado que $P(B_n \leq b) = P(V_n \leq b + 1/n + 1)$. Por tanto
 el método anterior se podría usar para calcular la distribu-
 ción de B_n .

Referencias

BRUNK: On the range of the difference between hypothetical
 distribution function and Pyke's modified empirical distrib.
 function. A.M.S. 33, 1962. 525-532

STEPHANS: Results from the relation between two statistics
 of the Kolmogorov-Smirnov type. A.M.S. (1969), 1833-1837.

WATSON: Goodness of fit tests on a circle. Biometrika 48 (1961)

-----: Some problems in the statistics of directions. Bull. In.
 Internat. Stat. 42 (1969), 374-375