Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

CARACTERITZACIÓ DELS PROCESSOS G-MARKOV GAUSSIANS

Olga Julià

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Abstract: The aim of this paper is to give a characterization of the gaussian processes which have the G-Markov property as stochastic integrals with respect to a Wiener process. This is done by a generalization of the known result for the positive quadrant [2].

These results allow us to find directly the structure of the covariance function of the "bien markoviens" processes intoduced by Etienne Carnal [1].

Sigui $\{X(z)\}_{z\in R^2}$ un procés gaussià centrat i definit en l'espai de probabilitats $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Considerem les seguents tribus:

$\mathcal{G}_z = \sigma\langle X(z'),\ z'\not\geq z\rangle$; $\mathcal{F}^1_{(s,t)} = \sigma\langle X(s',t'),\ s'<s\rangle$;

$\mathcal{F}^2_{(s,t)} = \sigma\langle X(s',t'),\ t'\leq t\rangle$; $\widetilde{\mathcal{F}}_z = \sigma\langle X(z'),\ z'\leq z\rangle$.

Definició I.

Direm que $\{X(z)\}_{z\in R^2}$ és O-Markov si i només si per tot $z,z'\in R^2$ $z'>z$ tenim:

$P(X(z') / \widetilde{\mathcal{F}}_z) = P(X(z')/X(z))$.

Definició II.

Direm que $\{X(z)\}_{z\in R^2}$ és G-Markov si i només si per tot $z=(s,t)$ i $z'=(s',t')$ tal que $z'>z$ es compleix:

$P(X(z')/\mathcal{G}_z) = P(X(z')/X(z),X(s',t),X(s,t'))$.

Definició III.

El procés $\{X(z)\}_{z\in R}$ és Markov doble ("bien markovien") si i només si per tot $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$, $z_3=(x_3,y_3)$ tals que $x_1\leq x_2\leq x_3$ i $y_1\geq y_2\geq y_3$, o bé $z_1<z_2<z_3$, la funció de covarianca compleix:

$K(z_1,z_3)=K(z_1,z_2)K(z_2,z_3)/K(z_2,z_2)$.

Definició IV.

$\{X(z)\}_{z\in R^2}$ és martingala si i només si per tot $z,z'\in R^2$ $E\left[X(z')/\mathcal{F}_z\right]=X(z)$.

Definició V.

$\{X(z)\}_{z\in R^2}$ és 1 (ó 2) martingala si per tot $(s,t)\in R^2$

i $\sigma\geq 0$, $E\left[X(s+\sigma,t)/\mathcal{F}^1_{(s,t)}\right]=X(s,t)$

(ó $E\left[X(s,t+\sigma)/\mathcal{F}^2_{(s,t)}\right]=X(s,t)$).

Lema.

Sigui $\{X(z)\}_{z\in R^2}$ un procés gaussià a dos paràmetres tal que la seva funció de covariança $K(z,z')$ compleix la següents hipòtesis:

$\boxed{H1}$ $K(z,z')$ és contínua

$\boxed{H2}$ $D=\{(z,z')\in R^4/K(z,z')\neq 0\}$ és tot R^4 ó bé conté un conjunt $D'=R_{z_o}\times R_{z_o}$ on $R_{z_o}=\{z\in R^2/z>z_o\}$ per un cert $z_o\in R^2$.

Aleshores: el procés $\{X(z)\}_{z\in R^2}$ és 0-Markov si i només si existeixen una funció $\Psi(z)$ contínua i un procés $\{M(z)\}_{z\in R^2}$ martingala tal que $X(z)=\Psi(z).M(z)$ per tot $z\in R^2$ ó R_{z_o}.

Demostració: només cal considerar la funció

$$\Psi(z)=K(z,z).K(0,z\vee 0)/K(z,z\vee 0)$$

Teorema

Si el procés $\{X(z)\}_{z\in R^2}$ verifica les hipòtesis H1 i H2 aleshores $\{X(z)\}_{z\in R^2}$ és G-Markov si i només si existeixen $\Phi_1(z)$ funció contínua , $\Phi_2(z)$ funció de $L^2(R^2)$ i W una mesura browniana en R^2 tals que :

$$X(z)=\phi_1(z)\int_{R_z}\phi_2(\zeta)\,dW(\zeta)\quad \forall z\in R^2 \text{ ó } R_{z_o}$$

En aquesta demostració s'utilitza el teorema de caracterització de les 1 i 2 martingales gaussianes [2] .

Teorema

Sigui $\{X(z)\}_{z\in R^2}$ G-Markov tal que verifica les hipòtesis H1 i H2. Aleshores: $\{X(z)\}_{z\in R^2}$ és Markov doble si i només si la seva funció de covariança compleix: $K(z_1,z_2)=K(z_1,z_1\vee z_2)K(z_2,z_1\vee z_2)/K(z_1\vee z_2,z_1\vee z_2)$ per a tot $z_1,z_2\in R^2$.

Suposem que $\{X(z)\}_{z\in R^2}$ és un procés Markov doble tal que verifica les hipòtesis H1 i H2 ; aleshores existeixen ϕ_1 funció contínua, ϕ_2 funció de $L^2(R^2)$ i W mesura browniana tals que

$$X(z)=\phi_1(z)\int_{R_z}\phi_2(\zeta)\,dW(\zeta).$$

Si $K(z,z)=1$ per a tot $z\in R^2$, la seva funció de covariança admet l'expressió:

$$K(z,z')=\sqrt{\frac{\int_{R_{z\ z'}}\phi_2(\zeta)d\zeta}{\int_{R_{z\ z'}}\phi_2(\zeta)d\zeta}}=\sqrt{\frac{\int_{R_{(s\ s',0)}}\phi_2(\zeta)d\zeta}{\int_{R_{(s\ s',0)}}\phi_2(\zeta)d\zeta}\cdot\frac{\int_{R_{(0,t\ t')}}\phi_2(\zeta)d\zeta}{\int_{R_{(0,t\ t')}}\phi_2(\zeta)d\zeta}}$$

$$=C_1(s,s')C_2(t,t') \quad \text{si } z=(s,t) \text{ i } z'=(s',t').$$

on C_1 i C_2 són covariances corresponents a processos de Markov unidimensionals.

Si $K(z,z)\neq 1$ aleshores:

$$K(z,z')=K(z,z)K(z',z')C_1(s,s')C_2(t,t').$$

REFERENCIES

1 CARNAL,E."Propiétés markoviennes des produits tensoriels de covariances markoviennes" C.R..Acad.Sc.Paris t.228(1979) serie A.

2 NUALART,D.-SANZ,M. "A Markov property for two parameter gaussian processes" Stochastica Vol Vol III nº1 (1979) 1-16