Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

VERSION FINITAMENTE ADITIVA DE ALGUNOS RESULTADOS CLASICOS PARA PROBABILIDADES σ-ADITIVAS

Miguel Martín Díaz

Dpto. de Estadística
Universidad de Valladolid

Summary: In this paper some well known results for σ-additive probabilities are showed for finitely additive probabilities. An adequate generalization of the classical constrution $p(A \times B) = p_1(A) \cdot p_2(B)$ is used.

Introduccion

$E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \ldots$ (E_i es un conjunto cualquiera) $\times \ldots$

$\sigma_n = (A / A = (B \times E_{n+1} \times E_{n+2} \times \ldots ; B \subset E_1 \times \ldots E_n$.

Suponemos definida en E la topologia producto de las topologias discretas. $A \subset E$ es abierto si la pertenencia a A de e implica la existencia de n(e) de modo que cualquier otro elemento de E que tenga en común con e las n(e) primeras coordenadas también pertenece a A. Denotaremos por Π la clase formada por $\emptyset$ y todos los subconjuntos de E que son a la vez abiertos y cerrados. Se demuestra (ref. 1 pp 14) que los elementos de Π son todos los conjuntos que quedan determinados por un tiempo de espera finito.

Diremos que $I \subset E$ es asintótico si la pertenencia a I de e implica la pertenencia a I de cualquier elemento de E que se diferencie de e en un número finito de coordenadas. Denotaremos por $\mathcal{J}$ la clase formada por $\emptyset$ y todos los conjuntos asintóticos. Π y $\mathcal{J}$ son álgebras. Denominaremos por α el álgebra engendrada por la sucesión σ_n. Evidentemente $\alpha \subset \Pi$

Proposición 1

$A \in \Pi \quad I \in \mathcal{I} \quad AI = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A = \emptyset$ ó $I = \emptyset$

En efecto; si $(e_1 e_2 \dots e_n \dots) \in A$ y $(e'_1 e'_2 \dots e'_n \dots) \in I$ existe $n(e)$ de modo que $(e_1 e_2 \dots e_{n(e)} e'_{n(e)+1} \dots) \in AI$.

Proposición 2.

$I \in \mathcal{I} \quad I \neq \emptyset \quad A, A' \in A \quad AI \subset A' \Rightarrow A \subset A'$

En efecto; $A - A' \in \Pi$. Por tanto $(A - A')\, I \neq \emptyset$ (si $A - A' = \emptyset$ Entonces $A - A' \neq \emptyset = AI \not\subset A'$ contra la hipótesis)

Proposición 3.

$A \in \Pi \quad A \neq \emptyset \quad I, I' \in \quad AI \subset I' \Rightarrow I \subset I'$

se demuestra como la proposición anterior.

Teorema 1

Sean:

α y β semiálgebra de subconjuntos de un mismo conjunto y tales que $AB = A'B' \Rightarrow A = A'$ $B = B'$ ($A'A' \in \alpha$ $B'B' \in \beta$)

p y q probabilidades finitamente aditivas sobre α y β respectivamente.

Se verifica:

a) la clase $\gamma = \{ D \,/\, D = AB \quad A \in \alpha \ B \in \beta \}$ es una semiálgebra.

b) la aplicación $\bar{p}\,(D) = p(A) \cdot q\,(B)$ está bien definida y es una probabilidad finitamente aditiva que prolonga p y q. Además $\bar{p}$ es una probabilidad (es decir es σ-aditiva) si lo son p y q.

Demostración.

a) es inmediato

b) En virtud de la hipótesis $\bar{p}$ está bien definida y prolonga p y q.

Sea: $AB = A_1B_1 + \dots + A_nB_n \qquad A; A_n \in \alpha \quad B, B_n \in \beta$

En el caso particular: B_i son disjuntos dos a dos, tenemos $ABB_i = A_iB_i$ para $i = 1\ 2 \dots n$ y es $AB = AB_1 \dots AB_n$.

De esta igualdad se deriva inmediatamente la aditividad finita. El caso general se reduce a este considerando en AB, $A_i\ B_i$ particiones del tipo anterior obtenidas a partir de intersecciones de dos ó más conjuntos de $(B_1\ B_2 \dots B_n)$.

No detallamos el procedimiento. La σ-aditividad de $\bar{p}$ cuando lo son p y q se demuestra por un procedimiento análogo.

Un caso particular de aplicación del teorema es la clásica construcción de probabilidades en $E_1 \times E_2$ cuando E_1 y E_2 son independientes.

Corolario. Si p es una probabilidad finitamente aditiva sobre Π y q una probabilidad finitamente aditiva sobre $\mathcal{I}$, la fórmula $\bar{p}$ (AI) = p (A). q (I) define una probabilidad finitamente aditiva sobre el álgebra γ engendrada por Π y $\mathcal{I}$.

Es una consecuencia inmediata de las proposiciones 1 y 2 del Teorema anterior y de un conocido resultado que permite prolongar toda probabilidad finitamente aditiva desde una semiálgebra hasta el álgebra engendrada por ella.

Teorema 2.

Sean:

p una probabilidad finitamente aditiva sobre Π y $\mathcal{I}^1 \subset \mathcal{I}$ tal que

$A, B \in \mathcal{I}^1 \; AB = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$

Existe una probabilidad finitamente aditiva $\bar{p}$ que prolonga p y tal que p (I) = 1 si $I \in \mathcal{I}^1$

Sea U un ultafiltro que prolonga $\mathcal{I}^1$. La aplicación q: q (H) = 1 si $H \in U$, q(H) = 0 si $H \in U$ es una probabilidad finitamente aditiva sobre $\mathcal{P}(E)$. Ahora la demostración resulta como una aplicación del Teorema anterior a p y a la restricción de q a $\mathcal{I}$

Definición 1. Dada una probabilidad finitamente aditiva, p, sobre α, $\alpha = \bigcup \sigma_n$, una sucesión x_n de aplicaciones reales en E es(α p) regular si x_n es, para $\forall_n$, α -medible Y:

$$\varepsilon > 0 \quad y \, \delta > 0 \Rightarrow \exists \, N / n_1 \leqslant n_1' \leqslant \dots \leqslant n_k \leqslant n_k' \Rightarrow p \, \Big(\bigcup_{j=1}^{K} |x_{n_j} - x_{n_j'}| \geqslant \varepsilon \Big) \leqslant \delta$$

Definición 2. Dada una probabilidad finitamente aditiva, $\bar{p}$ sobre $\mathcal{P}(E)$, una sucesión x_n de aplicaciones reales en R es casi seguro $\bar{p}$-regular si $\bar{p}\,[e/x_n\ (e)$ es regular$] = 1$

Se demuestra sin dificultad que si $\bar{p}$ es una prolongación de p, toda sucesión (α p) regular es casi seguro $\bar{p}$-regular.

El recíproco no es cierto.

Definición 3. $\bar{p}$ es una prolongación regular de p si toda sucesión (α p) regular de v.a. acotadas y adaptadas a σ_n es casi seguro $\bar{p}$-regular.

Teorema 3. Toda probabilidad finitamente aditiva definida sobre Π admite una prolongación regular.

Demostración.

Sea p una probabilidad finitamente aditiva sobre $\mathcal{M}$

Sea $\mathcal{S}^1$ la clase de todos los subconjuntos de E que tienen la propiedad de ser el conjunto de regularidad de alguna sucesión p-regular de variables aleatorias simples y adaptadas a σ_n. Si A B son elementos no vacios de $\mathcal{S}^1$ es $AB \neq \emptyset$.

En efecto, sea: $A=(e/x_n$ (e) es regular) $B=(e/z_n$ (e) es regular) siendo x_n z_n sucesiones p-regulares adaptadas, etc....

Sea σ_n^* el álgebra engendrada por $(x_1..x_n..z_1..z_n)$ y p_n la restricción de p a dicha álgebra.

p_n^* es una probabilidad y en virtud de un conocido resultado(ref.2)

Existe una probabilidad p^* sobre $\sigma(\sigma^*_n)$ que prolonga p_n^*.

Ahora se tiene $p^*(A)=p^*(B)=1$. Entonces AB es no vacio y existe $\bar{p}$, prolongación de p, tal que toda sucesión (α p) -regular de variables simples y adaptadas es $\bar{p}$-regular. Para generalizar al caso de variables acotadas x_n basta tomar z_n simples tales que

$$|x_n - z_n| < \varepsilon_n \qquad \lim \varepsilon_n = 0$$

Corolario. Si x_n es una sucesión que verifica las hipótesis del Teorema y f es una aplicación continua de R en R' (fox_n) es (α p)-regular. Basta utilizar una prolongación regular de p.

Teorema 4.

Sea p una probabilidad finitamente aditiva sobre $\mathcal{M}$

Eixste una prolongación finitamente aditiva de p, $\bar{p}$, tal que :

Si x_n es una sucesión de v.a. acotadas, adaptadas a σ_n, independientes, e igualmente distribuidas, se verifica :

$\bar{p}$ ($e/S_n(e)/n$ es convergente a $E(x_1)$)= 1 con $S_n = x_1 + \ldots + x_n$.

Demostración

Definiendo $\mathcal{S}^1$ = (A/ existe X_n, simples, independientes etc. tales que A = $(e/\lim S_n/n = E(x_1)$. Se demuestra por un procedimiento análogo al del Teorema anterior que AB es no vacio y se aplica el Teorema 2.

Por este procedimiento se puede demostrar que existe una prolongación que satisface, a la vez, las condiciones exigidas en los teoremas anteriores así como otras que se cumplen en resultados clásicos para probabilidades σ-aditivas.

Desde luego tales propiedades han de estar relacionadas con sucesos asintóticos.

En los resultados demostrados no aparece la necesidad de utilizar $\mathcal{T}$, siendo suficiente la clase α .

El interés de prolongar a partir de $\mathcal{T}$ es la siguiente:

Si p_n es una estrategia en el sentido definido en ref. 1., existen extensiones interesantes de p_n a $\mathcal{T}$ y a clases más amplias(ref.1,3) Entonces las propiedades en $\mathcal{T}$ de tales prolongaciones son compatibles con las prolongaciones aquí obtenidas.

BIBLIOGRAFIA.

1.- LESTER E.DUBINS. LEONARD J.SAVAGE.-How to gamble in you must.

2.- J.NEVEU.- Bases matematique du Clacul des Probabilites.

3.- ROGER A.PURVES and WILLIAM D.SUDDERTH.- Tecnical Report N°220