Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

ESTUDIO DE ALGUNOS PROCESOS MARKOVIANOS NO ESTACIONARIOS

María Pilar Olave Rubio

Dpto. de Cálculo de Probabilidades y Estadística Matemática
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Zaragoza

S U M M A R Y

A finite discrete non-stationary Markov process in completely characterized by its time sequence of transition probability matrices, P_n. The n-th matrix p_n is defined in this case, as A + nB .

This paper develops a method of finding $\Phi(n) = P_1.P_2.P_3.\ldots.P_n$ -- using the z-transform method .

Analogously $\Phi(n)$ is found in the case of constant causative matrices .

Consideremos un proceso de Markov definido por un espacio de estados $S = \{1,2,\ldots,N\}$, un espacio de tiempos discreto $T = \{0,1,2,\ldots\}$ y un conjunto de probabilidades de transición $\{p_{ij}=a_{ij}+nb_{ij}\}$ de paso del estado i al estado j, y que verifican $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}=1$,$i=1,\ldots,N$; $0 \leq p_{ij} \leq 1$; $1 \leq i,j \leq N$.

Sea la matriz $\Phi(n)$ cuyo elemento (i,j) está definido por

$$\phi_{ij}(n) = P\left[s(n) = j \mid s(0) = i \right] \qquad \begin{array}{l} 1 \le i,j \le N \\ n = 0,1,2,\ldots \end{array}$$

Para obtenerla aplicaremos el método de la transformación geométrica, de tal forma que si f(n) es una función real de variable entera no - negativa definiremos su z-transformada como $f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, Z^n$.

Por lo tanto si :

$$\phi_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{N} \phi_{ik}(n)\, p_{kj}(n) = \sum_{k=1}^{N} \phi_{ik}(n)\, a_{kj} + n \sum_{k=1}^{N} \phi_{ik}^{(n)}\, b_{kj}$$

$$\phi_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

aplicando la z-transformada a cada miembro :

$$z^{-1}\left[\phi_{ij}^{g}(z) - \phi_{ij}(0) \right] = \sum_{k=1}^{N} \phi_{ik}^{g}(z)\, a_{kj} + z \frac{d}{dz} \sum_{k=1}^{N} \phi_{ik}^{g}(z)\, b_{kj}$$

matricialmente

$$\frac{d}{dz}\phi(z)\, B = -z^{-1}\phi(z)\, A + z^{-2}\phi(z) - z^{-2}\, I$$

Por ser B no regular y en este caso no existir matriz inversa, usaremos para la resolución de la ecuación diferencial la g-inversa B^- .

$$\frac{d}{dz}\phi(z) = \phi(z)\left[-z^{-1} A + z^{-2} \right] B^- - z^{-2} B^- + (B^- B - I)\, H$$

siendo H una matriz cualquiera .

La solución de la ecuación diferencial es :

$$\phi(z)\, e^{\int (-z^{-1}A + z^{-2}) B^- dz} = \int (-z^{-2} B^- + (B^- B - I) H)\, e^{\int (-z^{-1}A + z^{-2}) B^- dz}\, dz + C$$

operando y notado $I(M,\lambda,P) = \int z^M e^{-Pz} z^{\lambda}\, dz$, donde M y P son matrices cualquiera y $\lambda \in \mathbb{R}$, obtenemos :

$$I(M,\lambda,P) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{-\lambda-1} P^k M^n \frac{1}{k!n!} \gamma(\ln z; n+1; -k-\lambda-1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=-\lambda}^{\infty} P^k M^n \frac{(-1)^{n+1}}{k!n!} \gamma(\ln z; n+1; -k-\lambda-1) \right]$$

Con lo cual la ecuación diferencial queda :

$$\phi_{(z)} z^{-AB^-} e^{-Z^{-1}B^-} = -B^- I(-AB^-,0,B^-) + (B^-B-I)H \,.\, I(-AB^-,-2,B^-)$$

$$\phi(z) \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-AB^-)^n \frac{(\ln z)^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-B^-)^n \frac{1}{n! z^n} \right] =$$

$$= - B^- \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (B^-)^k (-AB^-)^n \frac{(-1)^{n+1}}{k!n!} \gamma(\ln z, n+1, -k-1) \right] + \right.$$

$$+ (B^-B-I)H \left[(-AB^-)^n \frac{1}{n!} \gamma(\ln z;n+1;1) + (B^-) \,. \right.$$

$$\left. . \,(-AB^-)^n \frac{1}{n!} \gamma(\ln z;n+1;0) \right] + (B^-B-I)\, H$$

$$\left. \left[\sum_{k=2}^{\infty} (B^-)^k (-AB^-)^n \frac{(-1)^{n+1}}{k!\, n!} \gamma(\ln z;n+1;-k+1) \right] \right]$$

Notemos que $\phi(z)$ se puede obtener numéricamente pues en este ca̲so tanto las series como las integrales son calculables .

Por ser $\phi(z)$ una función continua e infinitamente derivable en un entorno del origen, su desarrollo en serie de Laurent es único,por tanto:

$$\phi(n) = \left. \frac{d^n(\phi(z))}{dz^n} \Big/ n! \right|_{z=0}$$

Con lo que hemos deducido la matriz de transición del proceso - desde la etapa inicial hasta n-ésima .

En el caso de un proceso markoviano no estacionario definido a través de una matriz causativa C constante de tal forma que

$$P_2 = P_1 C, P_3 = P_2 C, \ldots, P_{n+1} = P_1 \,.\, C^n$$

en este caso

$$\phi_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{N} \phi_{ik}(n)\; p_{kj}(n) = \sum_{k=1}^{N} \phi_{ik}(n) \left[\sum_{l=1}^{N} p_{kl}\; d_{lj}(n) \right]$$

siendo d_{lj} el elemento (l,j) de la matriz $C^{n-1} = D$.

Aplicando la z-transformada :

$$z^{-1}\left[\phi^{g}_{ij}(z) - \phi_{ij}(0)\right] = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \phi^{g}_{ik}(z)\ p_{kl}\ d^{g}_{lj}(z) \Longrightarrow$$

$$z^{-1}\left[\Phi^{g}(z) - \Phi(0)\right] = \Phi^{g}(z)\ P\ D^{g}(z) \Longrightarrow \Phi^{g}(z) = \left[\ I - PD^{g}(z)z\right]^{-1}$$

siendo $D^{g}(z) = \left[\ I - Cz\right]^{-1}$ ya que a la matriz C se le puede aplicar -- igualmente el método de la z-transformación .

Luego en este caso también es calculable la matriz $\Phi(n)$ del proceso .

BIBLIOGRAFIA

- BELLMAN R. : "Introducción al análisis matricial" , (1965), Ed. Reverté, S.A.
- HOWARD R.A. : "Dynamic probabilistic systems" John Wiley, (1971) .
- HARARY F., LIPSTEIN B. and STYAN G.P.H. : "A matriz approach to non stationary chains" Tecnical Report No. 120, Department of Statistics, University of Minnesota, May 20, 1969 .