Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

FORMULAS DE CUADRATURA CON GRADO DE PRECISION 2n-1 CORRESPONDIENTES A UN NUMERO ARBITRARIO m DE NODOS Y A UNA LOCALIZACION TAMBIEN ARBITRARIA DE LOS MISMOS.

Andrés Arroyo Pérez

Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Universidad de Sevilla

Dado un entero positivo $\underline{n}$, existe una fórmula de cuadratura con precisión 2n-1 para la integral en $[a,b]$ de la función $f(x) \in C^n[a,b]$, fórmula definida para un número variable, $\underline{m}$, de nodos y para cualquier localización de los mismos en el intervalo de integración considerado. Se expone como obtener los distintos elementos que definen la fórmula, así como cotas de error para la misma.

Si en la expresión general de una fórmula de cuadratura, (para $f(x) \in C^n[a,b]$, $p(x) \in L[a,b]$, siendo $p(x) \neq 0$ en un conjunto de medida positiva:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} A_{hi} f^{h)}(x_i) + R(F) \qquad (1)$$

con

$$A_{hi} = [L^*_{n-h-1}(\emptyset_i(x)-\emptyset_{i-1}(x))]_{x=x_i} \qquad (2)$$
$$0 \le h \le n-1 \ ; \quad 1 \le i \le m$$

y

$$R(f) = \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \emptyset_i(x) L(f(x)) dx \qquad (3)$$

obtenida para una localización arbitraria de los nodos:

$$x_o = a \leq x_1 < x_2 \ \ldots\ldots\ldots < x_m \leq b = x_{m+1} \qquad (4)$$

y a partir del operador diferencial lineal de orden n, L, las funciones $\emptyset_i(x)$, soluciones de la ecuación diferencial lineal

$$L^* \emptyset(x) = p(x) \qquad (5)$$

se eligen de forma que cada $\emptyset_i(x)$ sea en $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq m$, ortogonal a $L(f(x))$, se tendrá que la fórmula (1) será exacta para toda función $f(x)$ tal que:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \emptyset_i(x) L(f(x)) dx = 0 \qquad 0 \leq i \leq m \qquad (6)$$

. . . .

En el trabajo consideramos el caso en que, <u>para cualquier localización</u> de los nodos dados en (4), suponiendo siempre que $x_1 = a$ y $x_m = b$ con lo que no se han de considerar ni $\emptyset_0(x)$ ni $\emptyset_m(x)$ en (2) y (3), el operador viene dado por $L = d^n/dx^n = D^n$, $p(x) = 1$ y bajo estas hipótesis se obtienen fórmulas del tipo (1) exactas para todo polinomio de grado menor o igual que $2n-1$ y esto para cualquier localización del número $\underline{m}$ de nodos y de su localización.

En este caso, al ser $L^* = (-1)^n D^n$, $p(x) = 1$, las funciones $\emptyset_i(x)$ verifican que $\emptyset_i(x) \in P_n$ y $\emptyset_i(x)$ tiene el coeficiente de la potencia de mayor grado igual a $(-1)^n/n!$. Imponiendo a estas funciones, para $1 \leq i \leq m-1$, que verifiquen (6) para $f(x) = x^{k-1}$, $k = 1,2,\ldots m$, quedan definidos de manera única los $m-1$ polinomios $\emptyset_i(x)$, $1 \leq i \leq m-1$, y en consecuencia, mediante (2) y (3) una fórmula de cuadratura que es exacta para todo polinomio de grado menor o igual que $2n-1$.

OBTENCION DE LAS FUNCIONES $\emptyset_i(x)$

Despues de imponer las condiciones anteriores se obtiene la expresión analítica de las $\emptyset_i$, que resulta ser:

$$\emptyset_i(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^{n+k} \left(\frac{\Delta x_i}{2}\right)^{2k} C_k (x-x_{i+\frac{1}{2}})^{n-2k} \qquad (7)$$

donde $x_{i+\frac{1}{2}} = (x_i + x_{i+1})/2$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $[n/2]$ será igual a $(n-1)/2$ si n es impar y a $n/2$ en el caso de ser n par y

$$\frac{(2n-2k)!\ n!}{(n-2k)!k!(n-k)!(2n)!} = C_k$$

PESO DE LAS FORMULAS

Según la expresión (2) y utilizando los operadores reducidos, así como la expresión de las $\emptyset_i(x)$ dadas en (7), encontramos:

$$A_{hi} = \sum_{k=0}^{[(h+1)/2]} (-1)^{h+1+k} 2^{-(h+1)} C_{hk} \left[(-1)^{h+1} (\Delta x_i)^{h+1} - (\Delta x_{i-1})^{h+1}\right]$$

$$2 \leq i \leq m-1 \ ; \quad 0 \leq h \leq n-1 \qquad (8)$$

$$A_{hi} = \sum_{k=0}^{[(h+1)/2]} (-1)^{k} C_{hk} (\Delta x_i)^{h+1} 2^{-(h+1)} \qquad (9)$$

$$0 \leq h \leq n-1$$

$$A_{hm} = \sum_{k=0}^{[(h+1)/2]} (-1)^{h+k} C_{hk} (\Delta x_{m-1})^{h+1} 2^{-(h+1)} \qquad (10)$$

$$0 \leq h \leq n-1$$

viniendo en este caso la constante C_{hk} dada por:

$$C_{hk} = \frac{(2n-2k)!\ n!}{(h+1-2k)!k!(n-k)!(2n)!}$$

Caso de nodos equidistantes.

En este caso las funciones $\emptyset_i(x)$, $1 \leq i \leq m-1$, se obtienen una a partir de la anterior por una simple traslación. Si llamamos $M=\Delta x_i$, a partir de las expresiones anteriores de los pesos encontramos:

$$A_{hi}=0 \qquad 2 \leq i \leq m-1 \;;\quad h=1,3,\ldots,N^* \tag{11}$$

$$A_{hi}=A_{hm}=\frac{1}{2}A_{hi}=\sum_{k=0}^{[(h+1)/2]}(-1)^{k+h}(M/2)^{h+1}C_{hk} \tag{12}$$
$$h=0,2,4,\ldots,n^* \;;\quad 2 \leq i \leq m-1$$

$$A_{hi}=-A_{hm}=\sum_{k=0}^{[(h+1)/2]}(-1)^{h+k+1}(M/2)^{h+1}C_{hk} \tag{13}$$
$$h=1,3,\ldots,N^*$$

con $n^*=n-2$ si n par ó $n-1$ si n impar
$N^*=n-1$ si n par ó $n-2$ si n impar.

Según los anteriores valores de los pesos, en este caso la expresión general de la fórmula dada por (1) se convierte en ($M^*=(n-2)/2$ si n par ó $(n-1)/2$ si n impar):

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{h=0}^{M^*}A_{(2h)}[f^{2h)}(a)+2\sum_{i=2}^{m-1}f^{2h)}(x_i)+f^{2h)}(b)] +$$
$$\sum_{h=0}^{(n-2)/2}A_{(2h+1)}[f^{2h+1)}(a)-f^{2h+1)}(b)]+R \tag{14}$$

y en el caso de tomarse m=2, la fórmula se convierte en:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{h=0}^{n-1}A_h[f^{h)}(a)+(-1)^h f^{h)}(b)]+R(f) \tag{15}$$

fórmulas exactas para polinomios de grados 2n-1.

ERROR.

El error se afronta a la vista de la expresión (3), teniendo en cuenta que para cualquier partición nos es conocida la expresión de $\emptyset_i(x)$. Por otra parte $\emptyset_i$ posee sus n ceros reales en en (x_i, x_{i+1}) y están relacionados con los de los polinomios de Legendre. Todo lo anterior facilita la obtención de cotas de error, pudiendose dar la expresión analítica de las mismas en función de los ceros de los polinomios de Legendre, expresión que no se incluye por razón de espacio.