Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE EL ORDEN DE METODOS NUMERICOS DE INTEGRACION CON REGION DE ESTABILIDAD Re H < 0.

A. Campillo, J.M. Sanz-Serna

Dpto. de Matemáticas
Universidad de Valladolid

Abstract: We prove that numerical algorithms for ODE's whose region of stability is the halfplane Re $H < 0$ have even order, provided some general geometrical conditions are fulfilled.

En [4] se hace un análisis de la región de estabilidad de un método lineal multipaso para la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Como resultado de dicho análisis se observa: a) El estudio lineal de la estabilidad se reduce a un problema de naturaleza geométrica, b) Los criterios dados son efectivos y pueden ser llevados fácilmente a la práctica.

Para el tipo más general de métodos (no necesariamente lineales multipaso) se precisan técnicas más complicadas y propias de la Geometría Algebraica y del Análisis Complejo. Así en [1] se extienden los resultados de [4] y se utilizan las nuevas técnicas introducidas para obtener una mayor información sobre la estabilidad. Remitimos a [1] para referencias a otros trabajos recientes en esta línea.

En este trabajo, mediante un razonamiento geométrico y siguiendo las ideas de [1] y [4], damos una estimación del orden de los métodos cuya región de estabilidad es el semiplano $\{H \in \mathbb{C} \mid \text{Re } H < 0\}$, caso que como es bien sabido tiene en la práctica un gran interés.

Consideremos un método $\mathcal{M}$ para la integración numérica de E.D.O.. El polinomio de estabilidad de $\mathcal{M}$ viene dado por

$$\Pi(r,H) = \sigma_0(r) - \sigma_1(r)H - \ldots - \sigma_j(r)H^j \quad ,$$

donde r y H son variables complejas y los polinomios $\sigma_i(r)$ tienen coeficientes reales. Supondremos además que se verifican las siguientes condiciones (véase [1] para discusión) : 1) $\sigma_0(1) = 0$ y $\sigma_0'(1) = \sigma_1(1) \neq 0$ (consistencia); 2) $\sigma_0(r), \ldots, \sigma_j(r)$ no tienen factor común no constante; 3) El discriminante $D(r) = \mathrm{Res}_H(\Pi, \Pi_H)$ no es idénticamente nulo.

La región de estabilidad $\mathcal{R}$ de $\mathcal{M}$ es por definición el conjunto de valores $H \in \mathbb{C}$ tales que las raices de $\Pi(r,H) = 0$ están en el disco abierto unidad $U = \{r \mid |r| < 1\}$. Un argumento de continuidad nos muestra fácilmente que $\mathcal{R}$ es un abierto y que su frontera está contenida en el conjunto $\Gamma = \{H \in \mathbb{C} \mid \Pi(r,H) = 0$ tiene una raiz en $\partial U\}$ (∂U representa la circunferencia unidad). Así si se introduce la curva algebraica compleja

$$\mathcal{C} = \{(r,H) \in \mathbb{C}^2 \mid \Pi(r,H) = 0\},$$

y si p y q son respectivamente las restricciones a $\mathcal{C}$ de las proyecciones $(r,H) \longmapsto r$, $(r,H) \longmapsto H$, entonces $\Gamma = q(p^{-1}(\partial U))$; es decir, Γ es la imágen de la circunferencia unidad por la función algebraica definida por Π. Esto nos permite hacer un estudio detallado de la estructura geométrica de Γ:

<u>Lema 1.</u> Supongamos que $D_0(r) = D(r)/\sigma_j(r)$ no tiene ceros sobre la circunferencia unidad. Γ es unión de s caminos tales que la complección en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de cada uno de ellos es imágen de ∂U por una función meromorfa. El número s es exactamente el número de ciclos de la permutación definida por prolongación analítica de las raices de $\Pi(1,H)=0$ a lo largo de ∂U.

La demostración es análoga a la de [1], teorema 1.1., reemplazando la hipótesis sobre $D(r)$ por la correspondiente sobre $D_0(r)$.

Por otro lado, la condicion 1) implica que $\mathcal{C}$ tiene en $(1,0)$ un punto regular, y concretamente $\Pi(1,0) = 0$, $\Pi_r(1,0) = -\Pi_H(1,0) \neq 0$. Por tanto tiene una ecuación local $r = r_p(H)$ (o $H = H_p(r)$ si se prefiere) en ese punto, donde r_p es una función holomorfa en un entorno de $H=0$ (resp. H_p es una función holomorfa en un entorno de $r=1$). El orden de $\mathcal{M}$ es el mayor entero p hasta el cual los desarrollos de Taylor de $r_p(H)$ y de $\exp(H)$

coinciden. Introduzcamos ahora el germen de curva analítica real $\gamma(\theta) = H_p(e^{i\theta})$ definida para θ en un entorno de 0. Teniendo en cuenta que los coeficientes del desarrollo de H_p son reales, y mediante un cálculo directo, es fácil probar el siguiente

Lema 2. 1) Las derivadas $\gamma^{(i)}(0)$ son reales para i par e imaginarias puras para i impar.

2) $\mathcal{M}$ tiene orden $p \geqslant 1$ si y sólo si $\gamma'(0) = i$, $\gamma''(0) = \gamma'''(0) = \ldots = \gamma^{(p)}(0) = 0$, $\gamma^{(p+1)}(0) \neq 0$.

Teorema. Sea $\mathcal{M}$ un método con región de estabilidad $\operatorname{Re} H < 0$. Supóngase que una de las condiciones siguientes es cierta: a) $\sigma_o(r)$ tiene a $r=1$ como único cero en ∂U. b) $D_o(r)$ no tiene ceros en ∂U y $s=1$, donde s es el entero del lema 1. Entonces el order de $\mathcal{M}$ es par.

La demostración es consecuencia del lema 2 pues en cualquiera de los dos casos la gráfica de un representante de γ está contenida en el eje imaginario. En efecto, dicha gráfica está contenida en Γ, y por tanto en el caso a) la afirmación anterior es evidente ya que Γ pasa una sola vez por 0. En el caso b) y de acuerdo con el lema 2, Γ es imágen de una circunferencia por una función meromorfa φ. Re φ es una función analítica real considerada como función del arco de circunferencia, y puesto que es nula en un abierto no vacío, debe ser idénticamente nula. Así Γ está contenida en el eje imaginario.

Notas: A) El máximo orden que puede tener un método con polinomio de estabilidad Π es $2j$ (véase [5]), luego en las condiciones del teorema anterior el orden es $2h$ con $h \leqslant j$.

B) La hipótesis $s=1$ en la parte b) no puede ser eliminada. En efecto, el método dado por

$$\Pi(r,H) = (r^2 - r)H^2 - (2r^2 - r + 1)H + (r^2 - 1)$$

tiene orden 1, $\operatorname{Re} H < 0$ como región de estabilidad, y $s = 2$ ya que Γ es unión del eje imaginario con la circunferencia $|H-1| = 1$.

REFERENCIAS:

[1] CAMPILLO, A. y SANZ-SERNA, J.M. " Determination of Stability regions by Algebro-Geometric Techniques". Aparecerá en Memorias de Matemáticas del Instituto Jorge Juan. C.S.I.C. Madrid.

[2] DAHLQUIST, G "A Special Stability Problem for Linear Multistep Methods". BIT 3 (1963), 27-43.

[3] LAMBERT, J.D. "Computational Methods in Ordinary Differential Equations", Wiley (1973).

[4] SANZ-SERNA, J.M. "Some aspects of the Boundary Locus Method", BIT 20 (1980).

[5] WANNER, G., HAIRER, E y NØRSETT, S.P. "Order Stars and Stability Theorems". BIT 18 (1.978) 475-489.