Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

PUNTOS OPTIMOS DE INTERPOLACION EN LA APROXIMACION TIPO PADE DE e^{-t}.

Luis Casasús, Pablo González

Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Universidad de La Laguna

Abstract

Certain Padè-type approximants to e^{-t} are studied and the choice of poles to obtain a best approximation is specified. These approximants are then compared with those of Padè.

I. INTRODUCCION.

Esta comunicación contiene algunos resultados que hemos obtenido en el estudio de los aproximantes tipo Padé, cuya descripción se encuentra en [1].

Taylor y Kaufmann han probado [2] que la mejor aproximación racional (en la norma de Tchebicheff) a e^{-t} en $[0,\infty)$ con denominador cuadrático y numerador lineal, teniendo polos negativos, posee un polo único y doble. Nosotros probamos un resultado similar para aproximantes tipo Padé, utilizando la norma L_2 . La clase de aproximaciones consideradas es:

$$R_{1,2} = \left\{ R(x) = \frac{rx + s}{(1 + px)(1 + qx)} \; ; \; R(x) \text{ tipo Padé; } p, q > 0 \right\}$$

II. MEJOR APROXIMACION EN $R_{1,2}$

Teorema 1. No existe una mejor aproximación a e^{-t} en $R_{1,2}$ con $p \neq q$.

Demostración. Aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt al sistema de funciones independientes

$$g_1 = \frac{1}{1 + px} \qquad\qquad g_2 = \frac{1}{1 + qx}$$

y suponiendo $p \neq q$ y $p, q < 1$, se llega a un absurdo en las ecuaciones normales.

Por otra parte, si $p > 1$ ó $q > 1$, la expresión del error para la aproximación correspondiente muestra que puede elegirse siempre una aproximación mejor con $p = q$.

Teorema 2. La mejor aproximación a e^{-t} en $R_{1,2}$ con un polo doble es

$$R(x) = \frac{(2\alpha - 1)x + 1}{(1 + \alpha x)^2} \qquad \text{con } \alpha = 0.17$$

Demostración. Utilizando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt, pero tomando ahora como sistema de funciones independientes

$$g_1(x) = \frac{1}{1 + \alpha x} \qquad\qquad g_2(x) = \frac{1}{(1 + \alpha x)^2}$$

se llega a la ecuación normal

$$\frac{2\alpha - 1}{\alpha} + \frac{1-\alpha}{2\alpha\sqrt{\alpha}} = \alpha \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\, dx}{1+\alpha x}$$

cuya resolución proporciona el valor $\alpha = 0.17$

III. COMPARACION CON EL APROXIMANTE PADE EQUIVALENTE.

Realizada esta comparación según sugiere Brezinski en [1] se comprueba que el aproximante calculado mejora al aproximante Padé equivalente, es decir, cuyo cálculo requiere el mismo número de coeficientes de la serie que representa a e^{-x} (dos coeficientes, en este caso). Presentamos una tabla de resultados:

x	e^{-x}	$\frac{1}{1+x}$	$\frac{1-0.66x}{(1+0.17x)^2}$
0.1	0.904837	0.9090909	0.9030349
0.2	0.818731	0.8333333	0.8118522
0.3	0.740818	0.7692307	0.7260546
0.4	0.67032	0.7142857	0.6452631
0.5	0.606531	0.6666666	0.5691374

IV. CONCLUSION.

La utilización de funciones racionales en la formación de un sistema ortonormal nos ha permitido dar la mejor aproximación de $R_{1,2}$ a e^{-t} en la norma L_2. Es un caso particular, aunque ilustrativo, de las posibilidades de los aproximantes tipo Padé, cuyas propiedades continuamos estudiando.

Agradecimiento.

A los Profesores [illegible] y [illegible] por su apoyo y atención.

Referencias.

[1] [illegible], C. "Rational Approximation to Formal Power Series". Journal of Approximation Theory 4 (1979) 295-316.

[2] KAUFMAN, E.H. JR. and TAYLOR,G.D. "Best Rational Approximation with Negative Poles to e^{-t} on 0, In "Padé and Rational Approximation" Saff and Varga Ed. Academic Press. 1977.