Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE LA INTEGRACION DEL PROBLEMA RESTRINGIDO EN LAS PROXIMIDADES DE LOS PUNTOS LAGRANGIANOS.

R. Cid, S. Ferrer, J.S. Caballero

Dpto. de Física de la Tierra y del Cosmos
Universidad de Zaragoza

Abstract.- *The restricted problem in the vicinity of L_4 is studied by finding a convergent binomic expansion of the perturbation function. Using a Hamiltonian formulation a resonance problem (already considered by Giacaglia in an attempt of enlarge the ideal resonance) is obtained. It is shown that this extension is reducible to the Garfinkel's normal ideal resonance in the libration region. Finally, by means of the Deprit's method and using variables suggested by Calvo, an asymptotic solution of first order in the small parameter μ, is given in a simple form.*

1.- INTRODUCCION.

El clásico problema de movimiento de tres puntos P_1, P_2, P, de masas m_1, m_2, m (atraidos según la ley de Newton), cuando la masa m es insignificante frente a m_1, m_2 (llamados "primarios"), recibe el nombre de "problema restringido de tres cuerpos", aunque también suele designarse con el mismo nombre el caso en que los tres puntos permanecen sobre un plano fijo y el movimiento relativo de los primarios es una circunferencia (problema restringido plano circular), al que nos referiremos en lo sucesivo.

De particular interés son todos aquellos trabajos que estudian la periodicidad y estabilidad orbitales alrededor de los puntos lagrangianos L_4 o L_5, como los de Deprit - Rabe (1969), Deprit - Henrard (1970), Markeev (1972), Schmidt (1974), Markeev - Sokol'skii (1978), etc.

Giacaglia (1968-9) y Grebenikov (1970) han considerado también aspectos numéricos y analíticos de estos movimientos, en tanto que Garfinkel (1976-8) y Erdi (1977-8) han desarrollado teorías analíticas sobre el mencionado problema.

En la presente comunicación, una vez formuladas las ecuaciones del problema en forma hamiltoniana, la función perturbadora es desarrollada en una serie binómica, que resulta muy convergente y no ha sido utilizada hasta ahora. Posteriormente, pasando a un sistema de variables de Delaunay y eliminando las perturbaciones de corto periodo, se llega a un hamiltoniano con términos resonantes, que corresponden a la denominada resonancia externa en la terminología de Garfinkel (derivada, como sabemos, de la relación 1:1 entre el periodo de los primarios y el de P)

El estudio de este hamiltoniano ha sido brevemente discutido por Giacaglia (1970) en una tentativa de generalización del problema de resonancia ideal de Garfinkel (1960). Nosotros, a través de un cierto cambio de variables, válido en la región de libración, reducimos el problema a la mencionada resonancia ideal, con lo cual pueden aplicarse sin dificultades las soluciones formales de Garfinkel y Jupp (1969).

Señalemos, no obstante, que un cambio sugerido por Calvo (1975) permite obviar, en principio, el empleo de funciones elípticas, con lo que se consigue una notable simplificación en los cálculos, aunque posteriormente dichas funciones aparezcan al tratar de relacionar las distintas escalas de tiempo utilizadas.

2.- DESARROLLO DE LA FUNCION PERTURBADORA.

El problema restringido plano circular, cuando se considera un sistema rotante P_oxy, con origen en P_o (centro de masas de P_1 y P_2), que gira coincidiendo la dirección de P_ox con P_1P_2, viene expresado en un sistema de coordenadas y momentos (r,θ,p_r,p_θ), donde $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\theta$, $p_r = \dot{r}$, $p_\theta = r^2 + x\dot{y} - y\dot{x}$, en la forma

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - p_\theta - \frac{1}{r} - \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) - \mu\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

siendo $\mu = m_2/(m_1+m_2)$, $r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2$.

Se demuestra que en un entorno de L_4, de radio $\sqrt{\mu}$, se cumple la condición $(1/r - 2\cos\theta)/r < 2\sqrt{\mu}$, por lo cual si suponemos que μ es un pequeño parámetro, se obtiene para H el siguiente desarrollo

$$H = H_o - \frac{\mu}{4r^3}\left(1+5\mu + \frac{3}{2r^2} - \frac{6}{r}\cos\theta + 3(1+\mu)\cos 2\theta\right) + O(\mu^{5/2})$$

siendo $H_o = (p_r^2 + p_\theta^2/r^2)/2 - p_\theta - 1/r$.

Por otra parte, si v denota la anomalía verdadera y (l,g,L,G) las conocidas variables de Delaunay, se tiene $\theta = g + v$, y los términos r^{-3}, r^{-5}, $r^{-4}\cos\theta$, $r^{-3}\cos 2\theta$, pueden ser desarrollados, por las fórmulas de Hansen (Tisserand, 1889) en función de la anomalía media l . El resultado de este proceso es un hamiltoniano

$$- H = A_o + \mu(H_r + H_p)$$

donde

$$A_o = 1/2L^2 + G + \mu\left[(1+5\mu)L^3/4G^3 + 3L^5(5L^2-3G^2)/16G^7\right]$$

$$H_r = A_1\cos(g + l) + B_2\cos 2(g + l)$$

$$H_p = \sum_{n=1} C_n\cos nl + \sum_{m\neq 1} A_m\cos(g+ml) + \sum_{m\neq 2} B_m\cos(2g+ml)$$

que podemos expresar, mediante una transformación canónica, en el conjunto de variables $y = g+l$, $z = g$, $Y = L$, $Z = G-L$.

Aplicando el método de promedios a dicho hamiltoniano y promediando sobre la variable $z = g$, el término H_p nos da $\langle H_p\rangle_g = 0$, y el sistema se reduce a un grado de libertad con el hamiltoniano $K = A_o(Y) + \mu H_r(y,Y)$ puesto que la ausencia de la variable z en K , implica $Z = cte.$

Como se sabe, el sistema obtenido

$$\dot{Y} = - \partial K/\partial y \qquad \dot{y} = \partial K/\partial Y$$

es resonante, a causa del término H_r y responde a una formulación análoga a la citada por Giacaglia como extensión del llamado problema de resonancia ideal por Garfinkel.

3.- ESTADOS DE EQUILIBRIO Y REDUCCION A LA RESONANCIA IDEAL.

Los estados de equilibrio del sistema anterior son obtenidos como soluciones de las ecuaciones $-\partial K/\partial y = 0$, $\partial K/\partial Y = 0$.

De la primera $\mu(A_1 + 4B_2\cos y)\operatorname{sen} y = 0$, se deducen las posibles soluciones $y = 0$, $y = \Pi$, y un par de soluciones y , $y+\Pi$, dadas por la igualdad $\cos y = - A_1/4B_2$. Y es precisamente la tercera, con $y_o \sim 60°$, la que nos interesa por corresponder al punto L_4 .

En efecto, de la segunda condición $A_o' + \mu(A_1'\cos y + B_2'\cos 2y) = 0$, donde el símbolo $(')$ denota derivación con respecto a Y , se obtiene $A_o' = 1/Y^3 - 1 \sim 0$, o bien $Y_o \sim 1$ y por tanto $A_1 \sim -3/2$, $B_2 \sim 3/4$, $y_o \sim 60°$.

Para la solución del sistema en el entorno de L_4 , podemos recurrir a la transformación local $(y,Y) \longrightarrow (\overline{\psi},\overline{Y})$, dada por

$$- A_1/4B_2 - \cos y = \operatorname{sen}\overline{\psi} \qquad Y = Y_o + \overline{Y}\sqrt{\mu}$$

Dicha transformación está perfectamente definida en el entorno de L_4, puesto que $\overline{\psi}_o \sim 0°$ y su jacobiano es $J = \sqrt{\mu}\text{sen}y/\cos\overline{\psi} \sim \text{sen}y \sim \sqrt{3\mu}/2 \neq 0$. Entonces, poniendo $B = B_2$, $A = A_c - \mu(A_1^2 + 8B_2^2)/8B_2$, se obtiene el sistema $\dot{\overline{Y}} = -J(\partial K/\partial\overline{\psi})$, $\dot{\overline{\psi}} = J(\partial K/\partial\overline{Y})$, con el hamiltoniano

$$K(\overline{Y},\overline{\psi}) = B(Y) + 2\mu A(Y)\text{sen}^2\overline{\psi}$$

cuya conversión a la forma normal de Hamilton se logra por medio de una nueva variable independiente τ, definida por $d\tau/dt = J$, con la condición suplementaria $\tau = 0$ para $t = 0$.

Teniendo esto en cuenta y desarrollando en potencias de $\varepsilon = \sqrt{\mu}$, el nuevo sistema diferencial será $d\overline{Y}/d\tau = -\partial\overline{K}/\partial\overline{\psi}$, $d\overline{\psi}/d\tau = \partial\overline{K}/\partial\overline{Y}$, con la función hamiltoniana

$$\overline{K} = \sum_{n\geq 0} \frac{\varepsilon^n\overline{Y}^n}{n!}\left(\frac{B^{(n+2)}\overline{Y}^2}{(n+2)(n+1)} + 2A^{(n)}\text{sen}^2\overline{\psi}\right)_{Y=Y_o}$$

donde $A^{(n)} = d^nA/dY^n$ $B^{(n)} = d^nB/dY^n$, y se han omitido los términos $B(Y_o) = \text{cte.}$, $B^{(1)}(Y_o) = 0$.

La aplicación de conocidos métodos de integración (Deprit, Hori, etc.) presenta, en la resolución final de este sistema, el inconveniente de que el término de orden cero contiene las variables $(\overline{\psi},\overline{Y})$. Y aunque podría recurrirse a los procesos de cálculo descritos por Garfinkel y Jupp, mediante funciones elípticas, creemos preferible utilizar la transformación canónica $(\psi,Y,\tau) \longrightarrow (\phi,\delta,s)$, desarrollada por Calvo y definida por las igualdades

$$\text{sen}\overline{\psi} = \delta\text{sen}\phi \qquad \overline{Y} = \lambda\delta\cos\phi \qquad ds/d\tau = \sqrt{1-\delta^2\text{sen}^2\phi}/\lambda\delta$$

con las condiciones $\delta = (\text{sen}^2\overline{\psi} + \overline{Y}^2/\lambda^2)^{1/2} > 0$, $\lambda^2 = 2A(Y_o)/B^{(2)}(Y_o)$, $s = 0$ para $\tau = 0$. Con esta transformación el término $\overline{K}_o$ se reduce a la forma simple $\overline{K}_o = A(Y_o)\delta^2$ y ya resulta aplicable el método de Deprit.

La solución obtenida, expresada por funciones elementales y que no incluimos aquí por falta de espacio, contiene términos hasta el segundo orden en ε y puede generalizarse facilmente a órdenes superiores.

Naturalmente, al tratar de relacionar las distintas variables independientes t, τ, s, hacen su aparición las funciones elípticas.

BIBLIOGRAFIA

M. Calvo (1975): Rev. Acad. Ciencias, XXX, 53-60, Zaragoza.

Cid, Caballero, Ferrer (1977): II Asamb. Nac. Astron. Cadiz.

A. Deprit, E. Rabe (1969): A. J. 74, 2, 317-320

A. Deprit, J. Henrard (1970): Periodic Orbits, Stab. etc. Reidel, 1-18.

B. Erdi (1977): Cel. Mech. 15, 367-383 y 18, 141-161.

S. Ferrer (1979): Tesis doctoral

B. Garfinkel (1966): A. J. 71, 10, 657-669. (1976): Cel. Mech. 13, 229-246. (1977): A. J. 82, 5, 368-379. (1978): Cel. Mech. 18, 3, 259-275.

G. Giacaglia (1968): S. A. O. Report 278, Cambridge. (1969): A. J. 74, 10, 1254-1262. (1970): Periodic Orbits, Stab, etc. Reidel. 515-530.

E. Grebenikov (1970): Soviet Astr. 14, 2, 344-350.

A. Jupp (1969): A. J. 74, 1, 35-43.

A.P. Markeev (1971): Soviet Astr. 15, 4, 682-686.

A.P. Markeev y A.G. Sokol'skii (1978): Soviet Astr. 21, 4, 507-512.

D.S. Schmidt (1974): Cel. Mech. 9, 1, 81.

V. Szebehely (1967): Theory of Orbits. Acad. Press.

F. Tisserand (1896): Traite de Mecanique Celeste. Gauthier Villars. Paris.