Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

SOLUCION DE UN PROBLEMA DE EVOLUCION POR INTERPOLACION RACIONAL

B. Dugnol, M. Ibañes

E.T.S. Ing. de Minas
Universidad de Oviedo

ABSTRACT:

By means of a classical problem of evolution, we describe in detail the process that lead to the numerical resolution of such problems, through projection methods on finite element subspaces of rational pattern.

El estudio que presentamos tiene relación con el tratamiento numérico del problema de evolución no lineal

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + u(1-u^2) = 0, \quad \Omega \times [0,1]; \; u(x,0) = u_o(x), \Omega;$$
$$u(x,t) = 0, \quad \partial\Omega x[0,1], \qquad (1)$$

siendo $\Omega = \{(x_1,x_2) \in R^2 | x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Los problemas de existencia y unicidad pueden tener respuesta adecuada en el contexto de la teoría de semigrupos no lineales (MARTIN, 1976).

Especificamos en $[0,1]$ instantes intermedios situados a intervalos de idéntica longitud $h:\{0,h,2h,\ldots,(p-1)h,ph=1\}$ y trataremos de determinar una solución aproximada en $t=h$. Para ello sustituimos el término $\frac{\partial u}{\partial t}$ por el cociente incremental referido a los puntos $t=0, t=h$: $\frac{\partial u}{\partial t} \to \frac{u(x,h)-u(x,o)}{h}$, y designamos $u(x,h)$ por $u_1(x)$. Nos enfrentamos, pues, con el problema siguiente: Determinar $u_1 \in H_o^1(\Omega)$ tal que

$$-\Delta u_1 + \frac{1-h}{h}u_1 + u_1^3 = \frac{1}{h}u_o, \; \Omega; \; u_1 = 0, \; \partial\Omega \qquad (2)$$

y en general, para $t = jh$,

$$-\Delta u_j + \frac{1-h}{h} u_j + u_j^3 = \frac{1}{h} u_{j-1}, \Omega; \; u_j = 0, \; \partial\Omega \qquad (3)$$

Designando con U_1 al conjunto $\{u_o, u_1, \ldots u_p\}$, podemos proseguir la subdivisión de $[0,1]$ por los puntos $0, h_n, \ldots, p2^{n-1}h_n = 1$, $n = 2,3,\ldots$ con lo que obtenemos una sucesión $U_o = \{u_o\}, U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$, que, si es convergente, determina una función límite u que admitimos será la solución del problema. Deteniendo el proceso en la etapa n, podemos tomar como solución aproximada

$$\hat{u}(x,t) = u_{j-1}^{(n)} + \frac{t - 2^{1-n}h(j-1)}{h} [u_j^{(n)} - u_{j-1}^{(n)}], \quad 2^{1-n}(j-1)h \le t \le 2^{1-n}jh$$

donde $u_j^{(n)}$ significa la solución en $2^{1-n}jh$ del problema correlativo de (3).

Para dar respuesta satisfactoria a los problemas estacionarios que resultan del proceso de discretización temporal, estudiemos el sistema genérico

$$-\Delta u + \gamma u + u^3 = \phi, \; \Omega; \quad u=0, \; \partial\Omega \qquad (4)$$

con $\phi \in L_2(\Omega)$ conocida, γ constante positiva. Generamos una formulación equivalente haciendo uso del siguiente teorema (VAINBERG, 1973): "Sea V un espacio de HILBERT, $F: V \to V^*$ un operador (no necesariamente lineal) y $v_o \in V$. Si F es un potencial en un entorno de u_o, existe un funcional J, cuyo gradiente F es dado por la expresión $J(u) = \int_0^1 < F(u_o - t(u-u_o)), u-u_o > dt - F_o$, $F_o = F(u_o)$ constante". Así, el problema (4) equivale al de encontrar $u \in H_o^1(\Omega)$, tal que

$$J(u) \le \frac{1}{2}\int_\Omega [(\frac{\partial v}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x_2})^2 + \gamma v^2] dx + \frac{1}{4}\int_\Omega v^4 dx - \int_\Omega \phi v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

La ecuación minimizante resulta entonces

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v + \gamma uv) dx + \int_\Omega u^3 v\, dx = \int_\Omega \phi v\, dx, \; \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

y con notación muy extendida, $a(u,v) - \int_\Omega u^3 v = \phi(v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

El proceso de discretización se realiza en nuestro caso mediante proyección sobre un subespacio W^H, de dimensión finita, de funciones racionales a trozos (WACHSPRESS, 1975), lo que nos permite una interpolación exacta del contorno circular. Sea $W_1,\ldots,W_N$ una base de dicho subespacio. El problema discreto consiste en determinar $u^H \in W^H$ con la condición

$$a(u^H,v^H) - \int_\Omega (u^H)^3 v^H dx = \phi(v^H),\ \forall v^H \in W^H \qquad (5)$$

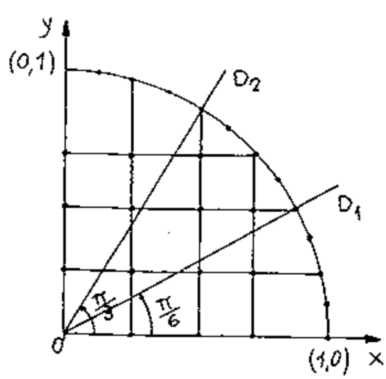
Naturalmente W^H está formado por funciones que se anulan en $\partial\Omega$.

Escribiendo $u^H = \sum_{i=1}^{N} C_i W_i$ resulta

$$\sum_i C_i\ a(W_i,W_j) - \int_\Omega (\sum_i C_i W_i)^3 W_j dx = \int_\Omega \phi W_j dx,$$

sistema no lineal cuya resolución puede ser abordada mediante técnicas iterativas (RHEINBOLDT, 1976).

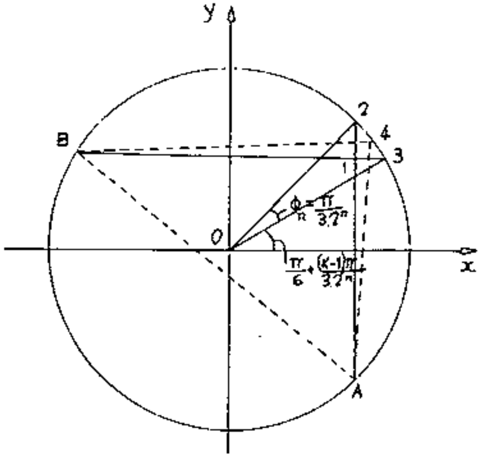
El sistema de subdivisión del recinto que proponemos, se esquematiza en la figura adjunta. Trazando desde el origen rectas OD_1, OD_2 con $\theta_1=\pi/6$, $\theta_2=\pi/3$, se constituyen triángulos cuyo lado curvilíneo coincide exactamente con la parte correspondiente de $\partial\Omega$, en la región $\pi/6 < \theta < \pi/3$, reservando para el resto del cuadrante $(0 < \theta < \pi/6,\ \pi/3 < \theta < \pi/2)$ cuadriláteros curvilíneos, uno de cuyos lados coincide con la parte de frontera que interpola. El resto de los elementos son en todas las zonas, cuadriláteros lineales.



Por ejemplo, las funciones (locales) de base asociadas con el triángulo genérico τ descrito en la figura adjunta serían:

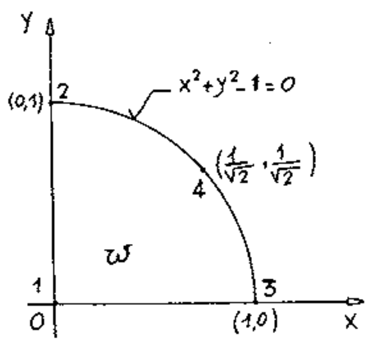
$$W_1^\tau \equiv K_1\ \frac{1-x^2-y^2}{(AB)} \qquad W_2^\tau \equiv K_2\ \frac{(13)\,(4A)}{(AB)}$$

$$W_3^\tau \equiv K_3\ \frac{(12)\,(4B)}{(AB)} \qquad W_4^\tau \equiv K_4\ \frac{(12)\,(13)}{(AB)}$$



donde designamos por (JK) el primer miembro de la ecuación de la recta que pasa por los puntos J,K.

El número de integraciones de funciones racionales que se debe realizar, es uno de los parámetros del problema que conviene cuidar, a fin de conservar la computabilidad dentro de límites razonables. Intervienen así expresiones de la forma $\int W_p W_q$, $\int W_p^2 W_q$, $\int W_p W_q W_r$, $\int \phi W_p$. Las propiedades $\Sigma W_i \equiv 1$, $\Sigma x_i W_i \equiv x$, $\Sigma y_i W_i \equiv y$ se utilizan para reducir convenientemente el número de tales integraciones (MCLEOD, 1976). En efecto, considerando por ejemplo el elemento modelo ω de la figura adjunta,



$$\begin{Bmatrix} \int_\omega W_1 W_j \\ \int_\omega W_2 W_j \\ \int_\omega W_3 W_j \end{Bmatrix} = P^{-1} \begin{Bmatrix} \int_\omega (1-W_4) W_j \\ \int_\omega (x-2^{-0.5} W_4) W_j \\ \int_\omega (y-2^{-0.5} W_4) W_j \end{Bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFIA

1.- MARTIN,R.H. "Nonlinear Operators and D.E. in Banach Spaces" (1976).

2.- VAINBERG,M.M. "Variational Method and Method of Monotone Operators" (1973).

3.- WACHSPRESS,E.L. "A rational Finite Element Basis" (1975).

4.- RHEINBOLDT,W.C. "On the solution of some Nonlinear Equations arising in the Application of Finite Elements Methods"(1976).

5.- MC LEOD,R. "Overcoming Loss of Accuracy when using Curved Finite Elements" (1976).

6.- WAIT,R. "A Finite Element for three dimensional function approximation" (1971).