Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

INTERPOLACION POR RECURRENCIA: UNA FORMULA GENERAL

M. Gasca, A. López Carmona

Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Universidad de Granada

ABSTRACT.

We give a formula to construct the solution of the interpolation problem with n+m linear forms as data from the solutions of s simpler interpolation problems, extending the results of G.Mühlbach [2], [3].

As particular cases of this formula we obtain a Newton, Lagrange and Aitken-Neville formulas for one or several variables. We give an example of interpolation in any six points of R^2 by using polynomials of degree two.

1. Definiciones y notaciones.

Sea W un espacio vectorial de funciones de una o varias variables, con valores en un cuerpo K conmutativo y de característica cero. Sean m, n $\in$ N y $_{n+m} = \{L_i,\ i=1,2,..,n+m\}$ un conjunto de n+m formas lineales sobre W. Sea $\{f_1, f_2, ..f_{n+m}\}$ un conjunto de elementos de W linealmente independientes, tales que

$$(1)\qquad \det\begin{pmatrix} f_1, f_2, \dots, f_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{pmatrix} = \det(L_i(f_j)) \neq 0,\ i,j = 1,2,..,n+m$$

y sea V el espacio vectorial que engendran $V = \langle f_1, \dots, f_{n+m} \rangle$.

Notemos por

$$(2) \qquad pf\begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}$$

a la función de V que es solución única del problema

$$(3) \qquad L_i(pf\begin{bmatrix} f_1, \ldots, f_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}) = L_i(f) \qquad i = 1, 2, \ldots, n+m$$

para una cierta función f en el espacio W, la llamaremos función interpoladora de f respecto al conjunto de datos de interpolación $\mathcal{L}_{n+m}$.

Notaremos por

$$pf\begin{bmatrix} f_1, \ldots, f_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}(x)$$

al valor de dicha función en un punto x cualquiera del conjunto de definición de las funciones de W.

Sean $\mathcal{L}_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $1 \leq s \leq m+1$, s subconjuntos de n elementos cada uno de $\mathcal{L}_{n+m}$. Supondremos que

$$(4) \qquad \det\begin{pmatrix} f_1, \ldots, f_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Por otra parte, $pf\begin{bmatrix} f_1, \ldots, f_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}$ denotará la función perteneciente a $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ que resuelve el siguiente problema de interpolación

$$(5) \qquad L_j(pf\begin{bmatrix} f_1, \ldots, f_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}) = L_j(f), \quad L_j \in \mathcal{L}_{n,i}$$

Por último, notaremos por

$$a_k = \left[\begin{array}{c|c} f_1, \ldots, f_{n+m} & f \\ \mathcal{L}_{n+m} & k \end{array}\right] \qquad k = 1, 2, \ldots, n+m$$

al coeficiente de f_k en la función (2) que llamaremos k-ésima diferencia dividida de f respecto del problema (3).

Teorema 1.

Para todo x del conjunto de definición de las funciones de W tal que

$$(6)\quad D(x)=\begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ pf_{n+1}\begin{bmatrix} f_1,\dots,f_n \\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}(x), & \dots, & pf_{n+1}\begin{bmatrix} f_1,\dots,f_n \\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ pf_{n+s-1}\begin{bmatrix} f_1,\dots,f_n \\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}(x), & \dots, & pf_{n+s-1}\begin{bmatrix} f_1,\dots,f_n \\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

se verifica:

$$(7)\quad pf\begin{bmatrix} f_1,\dots,f_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}(x) = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i(x)pf\begin{bmatrix} f_1,\dots,f_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=n+s}^{n+m}\lambda_i(x).a_k.\left(f_k(x) - pf_k\begin{bmatrix} f_1,\dots,f_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x)\right)$$

siendo $\lambda_i(x)$, $i=1,2,\dots,s$ la única solución del sistema

$$(8)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{s}\lambda_i(x) = 1 \\ \sum_{i=1}^{s}\lambda_i(x)pf_j\begin{bmatrix} f_1,\dots,f_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x) = f_j(x), \quad j=n+1,\dots,n+s-1 \end{cases}$$

Consecuencias.

i) Para $s=m+1$, se obtiene la fórmula de Aitken-Neville generalizada de [2],

$$(9)\quad pf\begin{bmatrix} f_1,\dots,f_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}(x) = \sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i(x)pf\begin{bmatrix} f_1,\dots,f_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x)$$

ii) Para $s=1$, se obtiene la fórmula de Newton generalizada dada en [3],

$$(10)\qquad pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}(x) = pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}(x) +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\cdot\left(f_k(x)-pf_k\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}(x)\right)$$

iii) Si $s=m+1$, $n=1$, se obtiene una fórmula de Lagrange.

2. Interpolación en seis puntos de R^2 mediante polinomios de grado dos.

Se considera el problema de interpolación

$$(11)\qquad f(P_i)=p(P_i),\quad i=1,2,\ldots,6,\qquad p\in P_2$$

donde los P_i son puntos cualesquiera de R^2.

Es evidente que

$$(12)\qquad \det\begin{pmatrix} 1,x,\ldots,y^2 \\ P_1,\ldots,P_6 \end{pmatrix}$$

es nulo si y sólo si los puntos P_i están en una cónica. Por tanto el problema no tiene solución o no la tiene única salvo en los casos siguientes:

1) Si tres puntos están en una recta r_0, dos en otra r_1 y el último no está ni en r_0 ni en r_1, (11) se resuelve por el método de [1].
2) Si no hay tres puntos alineados entre los P_i, sino que se encuentran dos a dos en rectas r_0, r_1 y r_2 entonces por el procedimiento de [1] es imposible tener como espacio de interpolación a P_2. No obstante, si se puede aplicar dicho método para hallar la solución de los problemas

$$(13)\qquad f(P_i) = p(P_i),\qquad i=1,2,3,4,5$$

$$(14)\qquad f(P_i) = p'(P_i),\qquad i=1,2,3,4,6$$

en un subespacio P P_2, de dimensión cinco cuya base $\{g_1,\ldots,g_5\}$ se obtiene por el procedimiento dado en [1].

Con las soluciones de (13) y (14) y tomando como g_6 x^2 o bien y^2, dependiendo cómo se hayan elegido $g_1,\ldots,g_5$, estamos en las condiciones del teorema 1 con n=5, m=1, s=2, por tanto tendremos

$$pf\begin{bmatrix} g_1,\ldots,g_6 \\ \mathcal{L}_6 \end{bmatrix}(x) = \lambda_1(x)\,pf\begin{bmatrix} g_1,\ldots,g_5 \\ \mathcal{L}_{5,1} \end{bmatrix}(x) + \lambda_2(x)\,pf\begin{bmatrix} g_1,\ldots,g_5 \\ \mathcal{L}_{5,2} \end{bmatrix}(x)$$

con $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$ solución del sistema (8).

BIBLIOGRAFIA

1. GASCA,M. & MAEZTU,J.I.: "On Lagrange and Hermite interpolation in R^k". Remitido a Num.Math.(1980)
2. MUHLBACH,G.: "The general Neville-Aitken-algorithm and some applications". Num.Math.31, (1978)
3. MUHLBACH,G.: "The general recurrence relation for divided differences and the general Newton-interpolation algorithm with applications to trigonometric interpolation". Num.Math. (1979)