Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

CONDIÇÃO DE CONVERGÊNCIA DO MÉTODO ITERATIVO DA SUPERRELAXAÇÃO ACELERADO NO CASO DA MATRIZ DO SISTEMA SER IRREDUTIVELMENTE DIAGONAL DOMINANTE.

M. Madalena Martins

Instituto de Matemática
Universidade de Coimbra

Abstract - In this paper we obtain bounds for the spectral radius of the matrix $L_{r,w}$ - the associated matrix of the accelerated overrelaxation iterative (AOR) we will give sufficient conditions for the convergence of the (AOR) method and we will improve the known results for the (SOR) and (AOR) methods when the matrix is strictly diagonally dominant.

1 - Introdução

Consideremos o sistema de equações lineares

$$Ax = b$$

em que A é uma matriz $n \times n$, b um vector de dimensão n conhecido e x um vector desconhecido.

Façamos a seguinte partição de A

$$A = I-E-F$$

com I a matriz identidade de ordem n, E e F respectivamente matrizes estritamente triangulares inferiores e superiores.

Hadjimos em [1] introduziu um novo método iterativo para a resolução de (1.1), o método da superrelaxação acelerado (AOR), dado por:

$$x^{(i+1)}=(I-rE)^{-1}\left[(1-w)I+(w-r)E+wF\right]x^{(i)}+w(I-rE)^{-1}b \qquad i=0,1,2,...$$

em que a matriz $L_{r,w}$ associada ao método iterativo é dado por:

$$L_{r,w} = (I-rE)^{-1}\left[(1-w)I+(w-r)E+wF\right]$$

Designamos por $\rho(L_{r,w})$ o raio espectral da matriz $L_{r,w}$.

No que se segue iremos determinar limites superior e inferior para $\rho(L_{r,w})$ no caso da matriz A ser irredutível e diagonalmente dominante (Teorema 1), obtendo os intervalos de convergência para o método AOR, já determinados por Hadjimos em [1] por um processo diferente (Teo.2, Cor.1).

Depois vamos considerar o caso da matriz A do sistema ser estritamente diogonal dominante e obtemos condições de convergência que melhoram os resultados conhecidos para o método SOR (Teo.3) e para o método AOR (Teo.4 e 5).

2 - Dominância diagonal fraca

2.1 - Limites para $\rho(L_{r,w})$

Lema 1: Se a matriz A é irredutível então a matriz $P = I - \frac{r(\lambda-1)+w}{\lambda-1+w} E + \frac{w}{\lambda-1+w} F$ também o é se

$$|\lambda| \geq 1, \quad 0<w<2 \qquad \text{e} \qquad w \geq r > 0$$

Teorema 1 - Se a matriz A dada em (1.1) é irredutível e diagonalmente dominante, então $\rho(L_{r,w})$ satisfaz a:

$$\min_i \frac{|1-w| - |w-r| e_i - |w| f_i}{1+|r| e_i} < \rho(L_{r,w}) < \max_i \frac{|w-r| e_i + |w| f_i + |1-w|}{1-|r| e_i} \quad i=1,2,\ldots,n$$

desde que $|r| < \frac{1}{e_i}$ em que e_i e f_i são respectivamente a soma dos módulos dos elementos das linhas i das matrizes E e F.

Demonstração: - Obtem-se o resultado desejado, recorrendo ao Lema 1 e ao uso dum processo de demonstração semelhante ao usado em [3].

2.2 - Condições de convergência do método AOR

Teorema 2 - Se a matriz A de (1.1) é irredutível e diagonalmente dominante e se $w \geq r > 0$, então o método AOR converge se:

$$0 < w \leq \frac{2}{1+\max_i (e_i + f_i)}$$

Corolário 1 - Se A de (1.1) é irredutível e diagonalmente dominante então o método AOR converge se $0<w\leq 1$ e $0 \leq r \leq 1$.

Este é o resultado obtido em [1] por Hadjimos.

3 - Dominância diagonal restrita

Teorema 3 - Se a matriz A do sistema (1.1) é estritamente diagonal dominante, então o método SOR é convergente para

$$0<w<\frac{2}{1+\max_i(e_i+f_i)}$$

Teorema 4 - Se A de (1.1) é estritamente diagonal dominante, então $\rho(L_{r,w})<1$, se $0<r<\dfrac{2}{1+\max\limits_i(e_i+f_i)}$ e $0<w<\dfrac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}$.

Teorema 5 - O método AOR é convergente, isto é, $\rho(L_{r,w})<1$, para:

(i) $0\leq r<\dfrac{2}{1+\max\limits_i(e_i+f_i)}$ e $0<w<\dfrac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}$

se

$$\frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}\geq\frac{2}{1+\max\limits_i(e_i+f_i)}$$

(ii) $0\leq r\leq w$ e $\dfrac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}\leq w<\dfrac{2}{1+\max\limits_i(e_i+f_i)}$

ou

$0\leq r<\dfrac{2}{1+\max\limits_i(e_i+f_i)}$ e $0<w<\dfrac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}$

se

$$\frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}<\frac{2}{1+\max\limits_i(e_i+f_i)}$$

B i b l i o g r a f i a

[1] - Hadjimos,A.: — Accelerated Overrelaxation Method. Math. Comp.32, 149--157 (1978).

[2] - Hadjimos, A. and Yeyios, A.: - The Principle of Extrapolation in Connection with the Accelerated Overrelaxation (AOR) method.T.R.nº16, Department of Mathematics, University of Ionnina, Ioannina, Greece, 1978.

[3] - Martins, Madalena. - On Accelerated Overrelaxation Method for Linear Systems with Strictly Diagonally Dominant Matrix. A ser publicado em Math. Comp.

[4] - Varga, R.S. - Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, New Jersey, 1962.

[5] - Young, D.M. - Iterative Solution of Large Linear Systems, New York and London: Academic Press 1971.