Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

TEOREMAS DE EXISTENCIA DE LA PROGRAMACION LINEAL

J.P. Vilaplana

Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad del País Vasco

SUMMARY:

One of the most important facts to solve a linear programming model is that the solutions of the primal and dual must verify some conditions so that the solution may be optimum.

In this paper, the Existence and Duality Theorems of the linear programming are proved, without using the Farkas-Minkowski's Lemma. This provides a great simplification in the following theoretical development.

Sean el modelo de programación lineal bajo forma canónica o <u>primal</u>:

(1.a) $\quad (\text{Min}) \quad z = c'x$

con las restricciones

(1.b) $\quad Ax \geq b$

y

(1.c) $\quad x \geq 0$

siendo x un vector columna con n componentes y A una matriz de formato $m \times n$, y su <u>dual</u>:

(2.a) $\quad (\text{Max}) \quad z' = b'u$

con las restricciones

(2.b) $$A'u \leq c$$

y

(2.c) $$u \geq 0$$

siendo u el vector de las variables duales, un vector columna con m componentes.

TEOREMA 1.- Si x^* es una solución factible del primal y u^* es una solución factible del dual, y se verifica:

(3) $$c'x^* = b'u^*$$

las soluciones x^* y u^* son las soluciones óptimas correspondientes.

Si x^* es una solución factible del primal, $Ax^* \geq b$. La no-negatividad de u^* nos permite escribir, pre-multiplicando por $(u^*)'$:

(4) $$(u^*)'Ax^* \geq (u^*)'b = b'u^*$$

Asimismo, puesto que $A'u^* \leq c$, se tendrá que $(u^*)'A \leq c'$, de donde, post-multiplicando por x^*:

(5) $$(u^*)'Ax^* \leq c'x^*$$

Luego, de (4) y (5), se deduce:

(6) $$c'x^* \geq b'u^*$$

Si x^{**} es otra solución factible del primal, se tendrá análogamente:

(7) $$c'x^{**} \geq b'u^*$$

y, por la hipótesis (3), resultará:

(8) $$c'x^{**} \geq b'u^* = c'x^*$$

y como en el primal se trata de una minimización, x^* será la solución óptima del mismo. Un razonamiento análogo nos conducirá a:

(9) $$b'u^{**} = c'x^{*} \leq b'u^{*}$$

de donde se deducirá que u* es la solución óptima del dual.

TEOREMA 2 (DE DUALIDAD).- Una solución factible x* del primal es óptima sí y sólo sí existe una solución factible u* del dual tal que

(10) $$\text{Min } z = c'x^{*} = b'u^{*} = \text{Max } z'$$

Evidentemente para que una solución factible del primal sea óptima es necesario, por el Teorema 1, que se satisfaga (10).

Demostremos que es tambien suficiente. Sea f(b) el valor mínimo de (1.a) considerado como función de las componentes del vector b. Sí x* es una solución básica factible de (1) y suponemos que es la solución óptima de dicho primal, se tendrá:

(11) $$f(b) = c'x^{*}$$

Si perturbamos esta solución decrementando la i-ésima componente del vector x* en un infinitésimo ε tal que $|\varepsilon| > 0$, para que esta nueva solución

(12) $$x^{**} = x^{*} - \varepsilon e_j \quad (*)$$

satisfaga las condiciones (1.b) sumaremos εa_j a b, siendo a_j el vector columna de A asociado a x_j, es decir, x** será una solución factible de:

(13.a) $$(\text{Min}) \quad z = c'x$$

(*) e_j es el vector unidad siguiente:

$$e_j = (\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1}, 1, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-(j+1)})$$

con las restricciones:

(13.b) $$Ax \geq b - \varepsilon a_j$$

y

(13.c) $$x \geq 0$$

Sustituyendo esta solución factible en la función objetivo tendremos:

(14) $$c'(x - \varepsilon e_j) = f(b) - \varepsilon c_j$$

y de aquí:

$$f(b - \varepsilon a_j) = f(b) - \varepsilon c_j$$

al no ser necesariamente (12) la solución óptima de (13).

Puesto que f(b) es una función continua, desarrollando en serie de Taylor el primer miembro de (15), resulta:

(16) $f(b - \varepsilon a_j) = f(b) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} \pm$ (infinitésimos de 2º orden y superiores) $\leq f(b) - \varepsilon c_j$.

Como ε es un infinitésimo, tal que $|\varepsilon|>0$, para todo j se verificará:

(17.a) $$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} \geq c_j \qquad \text{sí } \varepsilon > 0$$

y

(17.b) $$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} \leq c_j \qquad \text{sí } \varepsilon > 0$$

Luego, de (17.a) y (17.b), resulta:

(18) $$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} = c_j \qquad \text{sí } x_j^* > 0$$

y

(19) $$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} \leq c_j \qquad \text{sí } x^* = 0$$

Dado que el valor mínimo de la función objetivo (1.a) no puede aumentar al disminuir b_i, aunque nos puede permitir alcanzar un nuevo mínimo, se verificará:

(20) $$\frac{\partial f}{\partial b_i} \geq 0$$

para todo $\underline{i} = 1,2,\ldots,\underline{m}$.

Las inecuaciones (18), (19) y (20) nos conducen a considerar un vector u^* de componentes

(21) $$u_i^* = \frac{\partial f}{\partial b_i}$$

que satisface las condiciones:

(22) $$(u^*)' A \leq c$$

y

(23) $$u^* \geq 0$$

que será una solución factible del dual de (2).

Por el Teorema 2 se verificará:

(24) $$(u^*)'Ax^* \leq c'x^*$$

y por (18) y (19) se tendrá:

(25) $$(u^*)'Ax^* = c'x^*$$

Análogamente, se verificará:

(26) $$(u^*)'Ax^* \geq (u^*)'b$$

y por consiguiente, de acuerdo con todo lo anterior:

(27) $$(u^*)'Ax^* = (u^*)'b = b'u^*$$

De donde, por (25) y (27), resulta:

(28) $$c'x^* = b'u^*$$

luego x^* y u^* son soluciones óptimas y

(29) $$\text{Min } z = \text{Max } z'.$$

TEOREMA 3 (DE EXISTENCIA).- <u>Existe solución óptima finita para el primal sí y sólo sí éste y el dual poseen al menos una solución factible.</u>

Si el primal (1) posee una solución óptima factible, por el Teorema 1, el dual (2) posee también una solución factible. Sí x^* y u^* son las soluciones factibles del primal y del dual respectivamente, pre-multiplicando el primal por $(u^*)'$ se tiene:

(30) $$(u^*)'Ax^* \geq (u^*)'b = b'u^*$$

y como en el dual:

(31) $$A'u^* \leq c$$

puede escribirse:

(32) $$(u^*)'A \leq c'$$

y post-multiplicando por x^* se tiene:

(33) $$(u^*)'Ax^* \leq c'x^*$$

Luego, de (30) y (33), resulta:

(34) $$c'x^* \geq b'u^*$$

y como $c'x^*$ es finito, el dual tiene un óptimo finito al ser $c'x^*$ una cota superior para $b'u^*$.

TEOREMA 4 (DE EXISTENCIA).- Sí existe solución factible para el $\left\{\begin{matrix}\text{primal}\\ \text{dual}\end{matrix}\right\}$, pero no para el $\left\{\begin{matrix}\text{dual}\\ \text{primal}\end{matrix}\right\}$, existe una solución para el $\left\{\begin{matrix}\text{primal}\\ \text{dual}\end{matrix}\right\}$ tal que $\left\{\begin{matrix}z \to -\infty\\ z' \to +\infty\end{matrix}\right\}$.

Sea x^* una solución factible del primal. Si fuese solución óptima, el Teorema 3 exige que haya una solución factible para el dual, lo que está en contradicción con la hipótesis establecida, de donde se sigue que ninguna solución factible es óptima y, por consiguiente, $\underline{z} \to -\infty$. Análogamente se demostraría el otro caso.

B I B L I O G R A F I A

1.- DANTZIG,G.B.: Linear Programming and Extensions. Princeton University Press. Princeton, N.J. 1963.

2.- GASS,S.: Linear Programming. McGraw-Hill Book Co. New York, 1958.

3.- HADLEY,G.: Linear Programming. Addison - Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1962.

4.- VILAPLANA,J.P.: Introducción a la Programación Lineal. Tomo I. Publ. Lab. Ing. Ind., Panamá, Serie B, No. 6, 1976.