Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1890
Actes VII JMHL

SOBRE LAS SOLUCIONES HOMOGRAFICAS DEL PROBLEMA DE n-CUERPOS

Jaume Llibre

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Abstract. Let q(t) be a solution of the n-body problem. We prove the following equivalences: (a) q(t) is a central configuration for all t such that q(t) exists, (b) the motion of the vector q(t) in the position space is contained into a linear submanifold of dimension at most 2, (c) q(t) is a homographic solution and (d) q(t) is a Keplerian solution.

Se consideran n masas puntuales moviéndose en un espacio euclídeo de dimensión 3 de acuerdo con las leyes de la mecánica clásica. Si la masa de la i-ésima partícula es m_i, se denota por M a la matriz diagonal cuyas entradas son las masas $m_1,m_1,m_1,m_2,m_2,m_2,\ldots,m_n,m_n,m_n$. Los vectores $q_i \in R^3$ y $p_i \in R^3$ denotan la posición y el momento de la i-ésima partícula, respectivamente. Sean $q = (q_1,\ldots,q_n)$ y $p = (p_1,\ldots,p_n)$. La energia potencial U viene dada por

$$U(q) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|} ,$$

donde $\| \quad \|$ denota la norma euclídea de R^3.

En notación vectorial las ecuaciones del movimiento para el problema de n-cuerpos en el espacio son

$$\begin{aligned} \dot{q} &= M^{-1} p , \\ \dot{p} &= \nabla U . \end{aligned} \qquad (1)$$

Es claro que para cada elección de las masas $m_1,\ldots,m_n$ se tiene un problema de n cuerpos.

Sea Δ el conjunto de los puntos de colisión, esto es, el conjunto de puntos $q=(q_1,\ldots,q_n)$ tales que $q_i=q_j$ para algun $i\neq j$. Las ecuaciones diferenciales (1) definen un campo vectorial sin singularidades sobre $\{(R^3)^n-\Delta\}\times(R^3)^n$.

Se pueden reducir las dimensiones del sistema (1) usando las integrales del centro de masas y del momento angular. Fijando el centro de masas en el origen se restringen las coordenadas de posición al subespacio lineal

$$Q=\{q:\sum m_i q_i=0\},$$

y las coordenadas del momento al subespacio

$$P=\{p:\sum p_i=0\}.$$

El campo vectorial dado por (1) es tangente en todo punto a $(Q-\Delta\cap Q)\times P$ y por lo tanto este subespacio lineal es invariante por el flujo. De ahora en adelante estudiaremos el flujo restringido a $(Q-\Delta\cap Q)\times P$.

Una configuración $q=(q_1,\ldots,q_n)\in Q-\Delta\cap Q$ se llama *central* si la fuerza gravitatoria que actua sobre m_i es proporcional a la masa m_i y a la posición q_i; i.e., si

$$U(q)=\lambda Mq,$$

para algún escalar λ.

Una solución $q(t)$ del problema de n-cuerpos se llama *homográfica* si la configuración $q(t)=(q_1(t),\ldots,q_n(t))$ para un tiempo t dado se mueve de tal manera que es similar a ella misma cuando el tiempo t varia. Esto es, una solución homográfica está caracterizada por la existencia de una rotación $R(t)$ de R^3 y una dilatación $\rho(t)>0$ tal que, para cada i y t, $q_i=\rho R q_i^0$, donde el superíndice ^{0} siempre se refiere a un tiempo inicial t^0 fijo.

Una solución q(t) del problema de n-cuerpos se llama *kepleriana* si el vector posición q(t) satisface la siguiente ecuación

$$\ddot{q} = - \frac{k}{(q^t q)^{3/2}} q ,$$

siendo k una constante.

La presente comunicación tiene por objeto presentar el siguiente teorema:

Teorema. *Sea q(t) una solución del problema de n-cuerpos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) q(t) es una configuración central para todo t tal que q(t) exista.

(b) El movimiento del vector q(t) en el espacio de las posiciones $Q - \Delta \cap Q$ *está contenido en un subespacio lineal de Q de dimensión a lo sumo 2.*

(c) q(t) es una solución homográfica.

(d) q(t) es una solución kepleriana.

En la demostración del teorema se utiliza un lema debido a Dziobek [1].

Referencias

[1] Wintner, A.: 1941, The analytical foundations of Celestial Mechanics, Princeton Math. Series, Vol.5, Princeton Univ. Press, N.J..