Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

SEMISISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS SOBRE ESPACIOS TOPOLOGICOS

Enrique Llorens Fuster

Dpto. de Teoria de Funciones
Universidad de Malaga

Resumen: Para el estudio abstracto de ciertos algoritmos de minimización de funciones, Szego-Treccani introducen el concepto de Semisistema Dinámico Discreto, efectuando el correspondiente estudio axiomático. Sucesivas extensiones dan un desarrollo de la teoría en el marco de un espacio de Hilbert, considerando alternativamente sus topologías fuerte y débil, para su aplicación a la optimización de funcionales. Se presenta aquí el planteamiento y primeras propiedades para el caso de un espacio topologico general.

1. Notaciones

Se supone dado en lo sucesivo un espacio topológico (X,τ) separado. Con $F(X)$ se denotará el conjunto de las partes no vacías τ-sucesionalmente compactas de X.

Para evitar la proliferación de definiciones se emplearán los términos habituales de la teoría de Semisistemas dinámicos discretos en el mismo sentido que aparecen en Szego ([3]) salvo que sea necesaria su reformulación.

2. El espacio con límite $(F(X), \beta)$.

Se tratará en este apartado de definir sobre $F(X)$ una estructura de espacio con límite (en el sentido de Kuratowski ([2])) que comprenda como caso particular el espacio topológico $(F(X),\beta)$ inducido por la semidesviación entre compactos tal como aparece en ([1]) y ([4]).

Sea (A_n) una sucesión en $F(X)$. Sea $A\varepsilon F(X)$. Se dice que (A_n) α-converge hacia A si para toda sucesión (x_n) con $x_n \in A_n$ $n=1,2,\ldots$ existe euna subsucesión (x_{n_p}) de modo que $x_{n_p} \xrightarrow{\tau} x\varepsilon A$.

Es fácil dar ejemplos para los que $(F(X),\alpha)$ no es un espacio con límite. No obstante:

Se dice que (A_n) β-converge hacia $A\in F(X)$ si toda subsùcesión de (A_n) α-converge hacia A.

<u>Teorema</u>

$F(X)$ con la convegencia β es un espacio con límite.

<u>3. Semisistemas Dinámicos discretos sobre un espacio topologico</u>

Se demonina semisistema dinámico discreto sobre X a la terna (X,I^+,π) donde I^+ es el conjunto de los enteros no negativos y la aplicación $\pi:X\cdot I^+ \longrightarrow F(X)$ verifica

3.1. Para cada $x\varepsilon X$, $\pi(x,0)=\{x\}$

3.2. Para cada $k\varepsilon I^+$ la aplicación

$\pi_k \equiv \pi(.,k):X \longrightarrow F(X)$

es $\tau-\beta$-contínua en el sentido de los espacios con límite.

3.3. Para cada $x\varepsilon X$, y cualesquiera $h,k\varepsilon I^+$ se verifica que

$\pi(\pi(x,h),k)=\pi(x,h+k)$

Para la consistencia de la definición se debe probar que si $M\varepsilon F(X)$ y $\pi(.,k)$ verifica (3.1) y (3.2), enton - ces el conjunto $\pi(M,k)=\bigcup_{y\varepsilon M}\pi(y,k)$ es sucesionalmente compacto es decir pertenece a $F(X)$.

Obviamente $\pi(M,k)$ es no vacío. Sea (x_n) una suce sión en $\pi(M,k)$. Existe entonces una sucesión en M, (y_n) tal que $x_n\ \varepsilon\pi(y_n,k)$ $n=1,2,\ldots$ y como M es sucesionalmente compac to puede suponerse que

$y_n \xrightarrow{\tau} y\varepsilon M$

y por la continuidad de π_k, $\pi(y_n,k) \xrightarrow{\beta} \pi(y,k)$, de donde se sigue que la sucesión x_n admite una subsucesión (x_{n_p}) con

$x_{n_p} \xrightarrow{\tau} x\varepsilon\pi(y,k) \subset \pi(M,k)$

Luego $\pi(M,k)$ es sucesionalmente compacto y la definición es consistente.

Cualquier semisistema dinámico discreto en la acepción de Szego ([3]) o en la de ([4]) lo es en la aquí dada. Además existe un método standard de definir semisistemas sobre X:

Teorema

Sea $T:X \longrightarrow F(X)$ una aplicación contínua entre los espacios con límite (X,τ) y $(F(X),\beta)$. Entonces si se define $\pi_T : X \cdot I^+ \longrightarrow F(X)$ mediante

$$\begin{cases} \pi_T(x,0)=T^0(x)=\{x\} \\ \pi_T(x,k)=T(\pi(x,k-1)) & k \geq 1 \end{cases}$$

la terna (X, I, π_T) constituye un semisistema dinámico discreto sobre X, que se denomina inducido por T. En el caso particular de que T sean una plicación con valores en X, es decir, $T:X\to X$ se dice que el correspondiente semisistema tiene unicidad positiva.

La definición usual de solución se mantiene para los semisistemas dinámicos sobre espacios topológicos, e iggualmente el concepto de conjunto límite positivo (y finito) de una solución.Lo mismo sucede para los semiconos positivo y negativo de trayectorias a traves de $x \in X$, y también para el caracter de positivamente invariante, negativamente invariante, invariante, cuasipositivamente invariante etc. Siguen verificándose los siguientes resultados:

Teorema

$M \subset X$ es cuasi positivamente invariante si y sólo si para todo x de M, $\pi(x,1) \cap M \neq \phi$.

Teorema

El conjunto límite positivo de una solución χ, que denotaremos como es usual $L^+(\chi)$, es cuasipositivamente invariante.

Las nociones de estabilidad y atracción pueden formularse como sigue:

Un semisistema dinámico discreto sobre (X,τ) se dice estable en el sentido de Lagrange si para cada $x \in X$ el semicono positivo $T^+(x)$ es sucesionalmente compacto.

Sean $x \in X$ y M X. Se dice que

x es atraido por M si para cualquier solución χ

por x se tiene que $\chi(n) \xrightarrow{\tau} y \in M$.

x es casi atraido por M si para cualquier solución χ por x se tiene que $L^+(\chi) \neq \phi$ y $L^+(\chi) \subset M$.

x es débilmente atraido por M si para cualquier solución χ por x, $L^+(\chi) \subset M$.

De forma similar a lo que ocurre en R^n se verifica en este caso que

Teorema

Los respectivos conjuntos de puntos de X, atraidos, casi atraidos, y débilmente atraidos (llamados respectivamente regiones de atracción, casi atracción y atracción débil de M), son positivamente invariantes.

$M \subset X$ es estable si para todo $x \notin M$ y para todo y de M existen τ-entornos u de x y V de y tales que $U \cap T^+(V) = \phi$

Puede demostrarse que si M es estable es positivamente invariante.

4. Funciones de Liapunov

Sean $V \subset X$ y $J: V \to R$. Se dice que J es una función de Liapunov para el semisistema (X, I^+, π) si:

4.1) J es semicontínua inferiormente.

4.2) Para cada solución χ a través de $x \in V$, si $\chi(1) \in V$ se verifica que $J(\chi(1)) \leq J(x)$.

4.3) Si χ es cualquier solución de trayectoria contenida en V, y $(k_n) \subset I^+$ con $k_n \to \infty$ verifica que $\chi(k_n) \xrightarrow{\tau} x \in V$, entonces $J(\chi(k_n)) \to J(x)$.

Es de indispensable aplicación en semisistemas generados por algoritmos de optimización, el siguiente resultado:

Teorema

Si un función de Liapunov J está definida sobre la trayectoria de una solución y sobre su conjunto límite, entonces es constante sobre dicho conjunto límite.

A partir de este teorema se obtienen fácilmente resultados sobre la convergencia de las soluciones al lo largo de las cuales una función de Liapunov es estrictamente decreciente.

REFERENCIAS

(1) CASTILLO, F.

Discrete Semi-Dynamical Systems and Applications en "Towards Global Optimization" Dixon-Szego Eds. North Holland 1975.

(2) KURATOWSKI.

Topologie II. Varsovia, 1950.

(3) SZEGO,G.-TRECCANI? G.

An abstract formulation of minimization algorithms en Differential Games and related Topics, Kuhn-Szego Eds. North Holland, 1971.

(4) LLORENS, E.

Semisistemas dinámicos discretos débiles y su aplicación a la optimización de funcionales.

Publ. Sección Matemáticas Universidad Autónoma de Barcelona, 1979.