Pub. Mat. UAB
N°22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

MOVIMIENTOS QUASI-ALEATORIOS EN EL PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR Y PLANO DE 3 CUERPOS

Regina Martínez

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Abstract. En el problema restringido, circular y plano de 3 cuerpos se sabe que fijada una constante de Jacobi conveniente existe una órbita periódica inestable que circunda al punto de equilibrio L_2. En este trabajo se demuestra la existencia de órbitas homoclínicas a la periódica utilizando la simetría del problema. Las características del flujo en un entorno de L_2 y la existencia de puntos homoclínicos permiten probar la existencia de órbitas del tercer cuerpo tales que el número de vueltas enteras dadas alrededor de L_2 es completamente aleatorio.

El problema restringido, circular y plano de 3 cuerpos.

Supongamos que dos puntos materiales P_1 y P_2 describen órbitas circulares alrededor de su centro de masas (c.d.m.), y en el plano que determinan consideremos un tercer cuerpo P_3, de masa infinitesimal, que se mueve bajo la atracción gravitatoria de los primarios P_1 y P_2 pero sin influir en el movimiento de éstos.

Normalizando adecuadamente el problema y en un sistema de referencia móvil con origen en el c.d.m. y que gire con los dos primarios, el sistema de ecuaciones que rigen el movimiento de P_3 es el siguiente:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

donde $\Omega = \Omega(x, y) = \dfrac{1-\mu}{r_1} + \dfrac{\mu}{r_2} + \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + \dfrac{1}{2}\mu(1-\mu)$

siendo $1-\mu$, μ las masas de los primarios, y r_1 y r_2 las distancias de P_3 a P_1 y P_2 respectivamente.

Existe una integral primera conocida como integral de Jacobi.

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \Omega(x, y) = -C/2$$

siendo C la constante de Jacobi.

La ecuación $\Omega(x, y) = C/2$ corresponde a las curvas de velocidad cero, las cuales limitan las regiones de posible movimiento para P_3. Consideraremos valores de la constante de Jacobi menores pero próximos al valor crítico C_2 para el cual las curvas de velocidad cero contienen al punto de equilibrio L_2 situado entre P_1 y P_2, de manera que la región de posible movimiento o región de Hill sea la rayada en el dibujo.

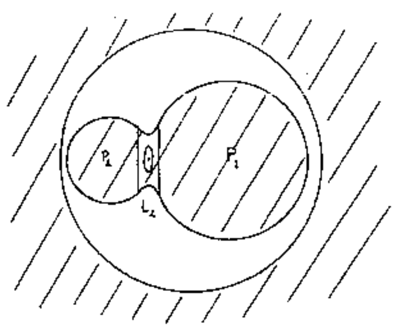

fig. 1.

De hecho solo nos interesarán las órbitas de la componente acotada de la región de Hill.

Definimos $M(\mu, C) = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \frac{1}{2}(\dot{x}_3^2 + x_4^2) - \Omega(x_1, x_2) = -C/2 \right\}$

Por un conocido teorema de Liapounoff se sabe que existe una variedad invariante de órbitas periódicas pasando a través del punto de equilibrio L_2 y tal que cada superficie de nivel $M(\mu, C)$ contiene una única órbita periódica perteneciente a esta familia. La proyección de esta órbita periódica sobre el plano del movimiento es una elipse que circunda a L_2. Podemos aislar la elipse por dos segmentos $x = c_1$, $x = c_2$, $c_2 < c_1 < 0$. La re gión N del espacio de fases que se proyecta sobre este entorno de L_2 es -homeomorfa a $S^2 \times I$ siendo I un intervalo de la recta real.

El flujo en la región N ha sido estudiado con todo detalle por Conley [1]. El comportamiento cualitativo de las órbitas en N se obtiene haciendo girar la figura 2 alrededor del eje vertical.

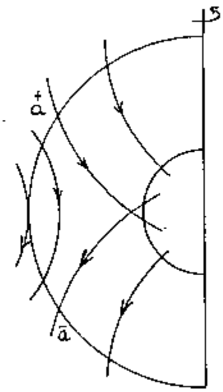

fig. 2.

Diremos que una órbita es α - (resp. ω -) asintótica si tiene por conjunto α - (resp. ω -) límite a la solución periódica infinitesimal en N.

Se sabe que existe una variedad de órbitas α - asintóticas y una de órbitas ω - asintóticas que determinan dos curvas ($\bar{a}$ y $\overset{+}{a}$) homeomorfas a circunferencias sobre la componente de la frontera de N más próxima a P_1.

Puntos homoclínicos y movimientos quasialeatorios.

Una órbita es homoclínica si es α - y ω - asintótica. Una órbita homoclínica es transversal si en todos sus puntos la suma de los espacios tangentes a las variedades asintóticas es el espacio total.

Conley [2] y McGehee [3] han demostrado que existen órbitas homoclínicas transversales a la órbita periódica de Liapounoff. En este trabajo se demuestra la existencia de órbitas homoclínicas utilizando la simetría del problema.

Es fácil comprobar que si $(x\ (t),\ y\ (t),\ \dot{x}\ (t),\ \dot{y}\ (t)\ )$ es una solución del sistema diferencial, entonces, $(x(-t), -y(-t), -\dot{x}(-t), \dot{y}(-t))$ es también una solución. De aquí resulta que las variedades asintóticas son simétricas y se cumple el siguiente

Lema: Fijada la constante de Jacobi C, existen constantes c_1 y c_2, $c_2 < c_1 < 0$ tales que fuera de la región N que determinan sobre M (μ, C), las variedades de órbita α - y ω - asintóticas cortan a la superficie $y = 0$ en dos curvas a_0 y a_1 homeomorfas a circunferencias que a su vez se cortan en un punto T sobre el eje de simetría $\dot{x} = 0$.

Como que las variedades asintóticas son simétricas se tiene que las curvas a_0 y a_1 se cruzan en el punto T. Este hecho junto con las propiedades especiales del flujo en un entorno de L_2 permiten probar la existencia de movimientos quasi-aleatorios.

Teorema: Para ciertos valores de la masa μ de uno de los primarios y de la constante de Jacobi C menores pero próximos a C_2, existe un entorno del punto de equilibrio L_2 tal que para cualquier sucesión de números naturales $(\ldots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots)$ con $a_n \geq d$ para todo entero n, siendo $d = d(\mu, C)$ una constante, existe una órbita del tercer cuerpo tal que el número de vueltas enteras dadas por esta órbita alrededor del punto de equilibrio L_2 entre dos vueltas consecutivas alrededor del primario de masa mayor, sigue los términos de la sucesión dada.

Bibliografía.

1 Conley, C., On the Ultimate Behasior of Orbits with Respect to an Unstable Critical Point, J. Diff. Eg. V (1.969), pag. 136-158.

2 Conley, C., Twist Mappings, Linking, Analyticity, and Periodic Solutions which Pass Close to an Unstable Periodic Solution, Topological Dynamics, (Joseph Auslandir, Ed.), W.A. Benjamin, New York (1.968), pag. 129-154.

3 McGehee, R.P., Some Homoclinic Orbits for the Restricted Three-body Problem.