Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

LA TRANSFORMACION INTEGRAL FINITA DE HANKEL-CLIFFORD

José Manuel Méndez Pérez

Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Universidad de La Laguna

Sumario.- Las autofunciones de ciertos problemas de Sturm-Liouville que se plantean en relación con la ecuación diferencial $xy'' +(\nu+1)y'+y=0$, son utilizadas como núcleos para definir nuevas transformaciones integrales finitas.

1. Problemas de Sturm-Liouville para la ecuación $xy'' +(\nu+1)y'+y=0$.

La ecuación diferencial ordinaria

$$xy'' + (\nu+1)y' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

se puede escribir en la forma

$$(L+\lambda)\phi = 0 \tag{2}$$

donde L denota el operador $L = \frac{1}{x^\nu}\frac{d}{dx}\left(x^{\nu+1}\frac{d}{dx}\right)$, conforme a la notación de Sneddon ([6]) y Churchill ([1]).

La integral general de (2) es ([4]):

$$\phi(x,\lambda) = A(\lambda)\, C_\nu(\lambda x) + B(\lambda)\, D_\nu(\lambda x) \tag{3}$$

en la que

$$C_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)} \quad \text{y}$$

$$D_\nu(x) = \frac{C_\nu(x)\cos\nu\pi - x^{-\nu}C_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}\nu\pi}$$

representa, respectivamente, las funciones de Bessel-Clifford de primera y segunda especie de orden ν.

Entre los diversos problemas que pueden plantearse para la ecuación (2), destacamos los dos siguientes:

(I) $(L+\lambda)\phi = 0$

$0\leq x\leq a,\quad Nf = f(a)\qquad$ ([6], p.446(a))

Si se consideran las raíces reales positivas de la ecuación:

$$C_\nu(\lambda a) = 0 \tag{4}$$

de (3) sigue que $B=0$, siendo entonces las autofunciones $\phi_n(x) = C_\nu(\lambda_n x)$, a menos de una constante multiplicativa, y $\lambda=\lambda_n$, ceros de (4), los correspondientes autovalores.

Se verifica la relación de ortoganilidad ([4]):

$$\int_0^a x^\nu C_\nu(\lambda_n x)\, C_\nu(\lambda_m x)dx = \begin{cases} 0, \text{ si } m\neq n \\ a^{\nu+2}\lambda_n C_{\nu+1}^2(\lambda_n a), \text{ si } m=n \end{cases} \tag{5}$$

(II) $(L+\lambda)\phi = 0$

$0\leq x\leq a$, $Nf = f'(a)+hf(a)$, (h constante)

De (3) se infiere ahora, al tomar $\lambda=\lambda_n$ como ceros positivos de la ecuación:

$$h\, C_\nu(\lambda_n a) + \lambda_n\, C'_\nu\, (\lambda_n a) = 0,$$

o bien: (6)

$$h\, C_\nu(\lambda_n a) - \lambda_n\, C_{\nu+1}(\lambda_n a) = 0$$

que $B=0$, originándose las mismas autofunciones que en el caso anterior, aunque con autovalores $\lambda=\lambda_n$ diferentes.

La condición de ortogonalidad sería:

$$\int_0^a x^\nu C_\nu(\lambda_m x)\, C_\nu(\lambda_n x)\, dx = \begin{cases} 0, \text{ si } m\neq n \\ \dfrac{a^{\nu+1}}{\lambda_n}\,(a\, h^2+\lambda_n-\nu h)C_\nu^2(\lambda_n a), \text{si } m=n \end{cases} \tag{7}$$

2. La transformación integral finita de Hankel-Clifford (H.C) de primera especie.

2.1 El problema (I) induce a definir la transformación finita de (H.C) de primera especie de una función f(x) mediante la expresión

$$\bar{f}_{1,\nu}(n) = b_{1,\nu}\left[f(x);n\right] = \int_0^a x^\nu C_\nu(\lambda_n x)\ f(x)\ dx, \tag{8}$$

para $\nu\geq 0$.

Además, la relación de ortogonalidad (5), previa la oportuna normalización, conduce a la correspondiente fórmula de inversión ([6], pp. 439-443):

$$b_{1,\nu}^{-1}\left[\bar{f}_{1,\nu}(n);x\right] = f(x) = \frac{1}{a^{\nu+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_{1,\nu}(n)C_\nu(\lambda_n x)}{\lambda_n C_{\nu+1}^2(\lambda_n a)} \tag{9}$$

Recíprocamente, y al igual que para otras transformaciones integrales finitas (Fourier, Hankel, Legendre,...), (9) puede ser interpretado como un desarrollo en serie de Bessel-Clifford de la función $f(x)$ considerada, con coeficientes $A_n=\overline{f}_{1,\nu}(n)$ dados por (8).

2.2 Propiedades

1) En relación con la derivación:

$$b_{1,\nu}[f^{(r)}(x);n] = (-1)^r\int_0^a x^{\nu-r}C_{\nu-r}(\lambda_n x)\ f(x)\ dx\ +$$
$$+\sum_{k=1}^{r-1}(-1)^{r-k}a^{\nu-r+k}C_{\nu-r+k}(\lambda_n a)\ f^{(k-1)}(a),\quad \nu>r-1$$

Si $f^{(k-1)}(a) = 0$ $(k=1,2,3,\ldots,r-1)$, se tiene:

$$b_{1,\nu}[f^{(r)}(x);n] = (-1)^r\int_0^a x^{\nu-r}C_{\nu-r}(\lambda_n x)\ f(x)\ dx$$

2) En relación con el operador integral I si $I^k f(a) = 0$ $(k=1,2,\ldots,r)$:

$$b_{1,\nu}[I^r f(x);n] = (-1)^r\int_0^a x^{\nu+r}C_{\nu+r}(\lambda_n x)\ f(x)\ dx.$$

3) De 1) sigue además, si $f(a)=0$ y $\nu>0$ (ó $f(0)=f(a)=0$ y $\nu\geq 0$), de importancia en determinadas aplicaciones:

$$b_{1,\nu}[xf''(x) + (\nu+1)\ f'(x);n] = -\lambda_n b_{1,\nu}[f(x);n] \qquad (10)$$

2.3 Aplicaciones

1) <u>Ecuaciones del tipo Kepinski-Myller-Lebedev</u>([8],pp.99)

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\nu+1)\ \frac{\partial u}{\partial x} - \mu\frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ u = u(x,t)$$
$$u(a,t) = 0,\ u(x,0) = f(x) \qquad (11)$$

Si se pone $\overline{u}(n,t)=b_{1,\nu}[u(x,t);x\to n]$ y $\overline{f}_\nu(n)=b_{1,\nu}[f(x);n]$ se deduce: $-\lambda_n\overline{u}(n,t)- \mu\frac{\partial}{\partial t}\ \overline{u}(n,t) = 0$,

de la que resulta la solución:

$$u(x,t) = \frac{1}{a^{\nu+2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{f}_\nu(n)C_\nu(\lambda_n x)e^{-\frac{\lambda_n}{\mu}t}}{\lambda_n C^2_{\nu+1}(\lambda_n a)}$$

2) <u>Formas particulares de la ecuación del calor</u>

El tipo de ecuaciones:

$$g(t)\frac{\partial u}{\partial t} - x\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\ \frac{\partial u}{\partial x} - h(t)u = f(x,t),$$

a constante, $a=\nu+1$, se transforma mediante la aplicación de (10) en lineales de la forma:

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t} + \left[\frac{\lambda_n-h(t)}{g(t)}\right]\overline{u} = \frac{\overline{f}(n,t)}{g(t)}$$

3) Problemas en que comparece el operador de Laplace n-dimensional

Como se sabe, en coordenadas polares, se tiene:

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{(n-2)+1}{r}\frac{du}{dr},$$

no siendo factible su estudio a través de la transformación de Hankel, salvo en el caso n=2 ([3], pp.82). Sin embargo, se hace posible en muchos casos su resolución con el uso de la transformación introducida, para todo $n\geq 2$.

3. Transformación integral finita de Hankel-Clifford de segunda especie.

El problema (II) y las condiciones de ortogonalidad (7) permiten introducir, de forma similar al caso anterior, el siguiente paso de fórmulas definidoras de la transformación finita de segunda especie:

$$b_{2,\nu}[f(x);n] = \overline{f}_{2,\nu}(n) = \int_0^a x^\nu C_\nu(\lambda_n x)\ f(x)\ dx \qquad (12)$$

$$b_{2,\nu}^{-1}[\overline{f}_{2,\nu}(n);x] = f(x) = \frac{1}{a^{\nu+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n C_\nu(\lambda_n x)\overline{f}_{2,\nu}(n)}{(ah^2+\lambda_n-\nu h)C_\nu^2(\lambda_n a)} \qquad (13)$$

Obsérvese que la identidad de las (8) y (12) es aparente, toda vez que definen transformaciones diferentes, al ser los autovalores $\lambda=\lambda_n$ respectivamente, soluciones de las ecuaciones distintas (4) y (6).

De igual manera, cabe obtener propiedades y aplicaciones de esta transformación.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.V.CHURCHILL, "Operational Mathematics" McGraw-Hill, 1.958.

[2] G.CINELLI, "An extension of the finite Hankel transform and applications" Int. J. Engng., Vol. 3, pp 539-559, 1.965.

[3] S.COLOMBO, "Les transformations de Mellin et de Hankel" C.N.R.S., Paris, 1.959.

[4] N.HAYEK, "Estudio de la ecuación diferencial xy'' +(ν+1)y'+y=0 y de sus aplicaciones" Collectanea Mathematica, Vol.XVIII, 1966-67.

[5] ———, "Sobre la transformaciónde Hankel" Actas de la Octava Reunión Anual de Matemáticos Españoles.

[6] I.N. SNEDDON, "The use of integral transforms" McGraw-Hill, 1.972.

[7] SHENG HSIUNG LIN, "Method of generalized finite Hankel transform" Kleine Mitteilungen, 51, 311-313 (1.971).

[8] G.N.WATSON, "A Treatise on the Teory of Bessel Functions". Cambrigde University Press, 1.958.