Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

EL NUCLEO DE LOS POTENCIALES DE BESSEL-CLIFFORD Y ESPACIOS DE LIPSCHITZ

José Rodríguez Expósito

Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Universidad de La Laguna

Sumario.- Se dan algunas propiedades del núcleo de una clase de potenciales del tipo Bessel de orden α en relación con los espacios de Lipschitz $\Lambda_\alpha^{p,q}$.

1. Introducción.- $\mathfrak{L}_\alpha^p$ denota el espacio de potenciales de orden α de todas las funciones en L^p, relativo a la clase excepcional $\mathfrak{U}_o$ de conjuntos de medida de Lebesgue cero, es decir, el espacio de funciones u para las que existe una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $u(x)=N_\alpha * f(x)$ casi por todo. La norma de cada elemento u de este espacio viene definida como la norma del correspondiente $f \in L^p$:

$$\|u\|_{(\alpha),p} = \|f\|_{L^p}\ .$$

Una definición equivalente para $\mathfrak{L}_\alpha^p$ en el sentido de las distribuciones, es la que $\mathfrak{L}_\alpha^p$ constituye el espacio de distribuciones temperadas u, cuyo potencial inverso de orden α, $N_{-\alpha} * u$, está en L^p.

El espacio $\mathfrak{L}_\alpha^p$, para $p<\infty$, representa igualmente la completación (imperfecta) del conjunto de funciones $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, provisto de la norma:

$$\|u\|_{(\alpha),p} = \| N_{2m-\alpha} * \frac{1}{C_{\alpha,n,m}} (1-r\Delta)^m u\|_{L^p}$$

siendo

$$C_{\alpha,n,m} = \left(\frac{n+\alpha-4}{\alpha-2}\right)\left(\frac{n+\alpha-6}{\alpha-4}\right) \ \dots\ \left(\frac{n+\alpha-2(m+1)}{\alpha-2m}\right),$$

y m (entero) $\le \frac{\alpha}{2}$.

La función $N_\alpha(x)$, constituye el núcleo de los potenciales $u \in \mathcal{L}_\alpha^p$ y viene dada por:

$$N_\alpha(x) = \frac{1}{2^{n-1}\,\pi^{n/2}\,\Gamma(\alpha/2)}\, L_{\frac{n-\alpha}{2}}(|x|)$$

que incluye la función modificada de Bessel-Clifford de tercera especie $L_\nu(x) = x^{-\nu/2} K_\nu(2\sqrt{x})$, la cual es solución de la ecuación diferencial

$$x\,y'' + (\nu+1)\,y' - y = 0. \text{ (*)}$$

El espacio $\mathcal{L}_\alpha^p$ de potenciales de orden α ha sido introducido en un trabajo anterior (**) y está conexionado con otros importantes espacios, en especial con el de potenciales de Bessel estudiado por N. Aronszajn y K.T. Smith. (***).

En este artículo se exponen, algunas propiedades del núcleo N_α en conexión con los espacios $\Lambda_\alpha^{p,q}$ de Lipschitz.

2. Propiedades de N_α.

Proposición 1

"Sea $\alpha>0$. Se tiene:

$$N_\alpha(x) \in \Lambda^{p,}_{\frac{1}{2}\left[\alpha-n\left(1-\frac{2}{p}\right)\right]}, \qquad \text{si } 0<\frac{\alpha}{2} - \frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{p}\right)<1\text{"}$$

En efecto, en virtud de un teorema de caracterización para los espacios de Lipschitz (****), es suficiente comprobar que:

$$\left[\int |N_\alpha(x+t) - N_\alpha(x)|^p\, dx\right]^{1/p} \leq A|t|^{\frac{1}{2}\left[\alpha-n\left(1-\frac{2}{p}\right)\right]},$$

siendo A una constante real positiva. Pero ello sigue de una oportuna descomposición de la integral del primer miembro en sumandos relativos a los entornos del origen y del infinito.

Proposición 2

"Sea $\alpha>0$. Se tiene:

$$N_\alpha(x) \in \Lambda^{p,\infty}_{\alpha-n\left(\frac{p-2}{p}\right)} \quad \text{si } \alpha-n\left(\frac{p-2}{p}\right) \text{ y } |x|\geq 1\text{"}$$

(*) Vease [2].
(**) En curso de publicación.
(***) Vease [1].
(****) Vease [3], pag. 151, prop. 7'.

En efecto, en la misma línea de la demostración de la proposición anterior, se demuestra que:

$$\left[\int_{|x|\geq|t|\geq 1} |N_\alpha(x+t)-N_\alpha(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \leq A|t|^{\alpha-(\frac{p-2}{p})}, \text{ si } 0<\alpha-n(\frac{p-2}{p})<1;$$

y en el caso general:

$$\left\|\frac{\partial^{\bar\alpha}}{\partial y^{\bar\alpha}} N_\alpha(x,y)\right\|_{L^p} \leq M_{\alpha,p}\; y^{\alpha-n(\frac{p-2}{p})-\bar\alpha} \quad (y>0),$$

donde $\bar\alpha$ representa el menor entero mayor que α, y $N_\alpha(x,y) = P_y * N_\alpha(x)$, siendo P_y el conocido núcleo de Poisson.

Corolario

"Si $\alpha>0$ y $|x|\geq 1$, se tiene:

$$N_\alpha(x) \in \Lambda_\alpha^{1,\infty}".$$

Proposición 3

"Para $2\leq p<\infty$, se tiene:

$$\mathfrak{L}_2^p(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda_1^{p,p}(\mathbb{R}^n)".$$

En efecto, basta ver que:

$$L_1^p \subset \Lambda_1^{p,p} \quad \text{para } 2\leq p<\infty \quad (*),$$

y que $\mathfrak{L}_2^p \subset L_1^p \quad (1<p<\infty)$.

Proposición 4

"Sea $\alpha>0$ y $\beta>0$. Se tiene:

$$N_\beta(\Lambda_\alpha) \subset \Lambda_{\alpha+\beta} \quad \text{si } |x|\geq 1"$$

Para la demostración, se considera la integral $U(x,y)$ de Poisson de $N_\beta * f$ $(f\in L^\infty(\mathbb{R}^n))$:

$$U = P_y * N_\beta * f$$

(*) Vease [3], pag. 156.

Entonces, si se designa con k el menor entero mayor que α, y si se diferencia l veces ($l>\beta$) respecto de y_1, y k veces respecto de y_2, ($y=y_1+y_2$), se infiere:

$$\left\| \frac{\partial^{k+l} u(x,y)}{\partial y^{k+l}} \right\|_{L^\infty} \leq \left\| \frac{\partial^{l} N_\beta(x,\frac{y}{2})}{\partial y_1^{l}} \right\|_{L^1} \left\| \frac{\partial^{k} u(x,\frac{y}{2})}{\partial y_2^{k}} \right\|_{L^\infty} \leq$$

$$\leq A' (\tfrac{y}{2})^{-l+\beta} A'' (\tfrac{y}{2})^{-k+\alpha} \leq A\, y^{-l-k+\alpha+\beta}$$

de donde resulta:

$$N_\beta * f \in \Lambda_{\alpha+\beta}, \text{ y } \| N_\beta * f \|_{\Lambda_{\alpha+\beta}} \leq C \| f \|_{\Lambda_\alpha}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] N.ARONSZAJN y K.T. SIMTH: "Theory of Bessel Potentials, part. I". Ann. Inst. Fourier, Vol. 11(1.961), pp. 385-475.

[2] N.HAYEK: "Estudio de la ecuación diferencial $xy'' + (\nu+1)y' + y=0$ y de sus aplicaciones". Collectanea Mathematica, Barcelona, (Vol. XVIII),fascs, 1 y 2, 1.966-1.967, pp. 57-114.

[3] E.M.STEIN: "Singular integrals and differentiability of functions". Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, (1.970).

[4] M.H.TAIBLESON: "On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-spaces, I. Principal properties". J. Math. Mech 13, 407-480 (1.964).