

UNA CARACTERIZACION DE ESPACIOS DE COTIPO q EN TERMINOS DE VA-
 RIABLES ALEATORIAS REALES

Clemente A. Campos y Sáez, Miguel San Miguel Marco

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
 Universidad de Zaragoza

Abstract.— The paper contains a characterization of a Ba-
 nach space of cotype q , $q \geq 2$, expressed in terms of a sequen-
 ce of random variables in $L^q(\mathbb{R})$ which is conditionally in-
 dependent.

Las notaciones y terminología que usamos aquí son las em-
 pleadas en [1] y los resultados que se presentan se apoyan en
 las proposiciones 4 y 5 del mismo trabajo.

Proposición 1.— Sea (ξ_n) una sucesión condicionalmente in-
 dependiente de variables aleatorias centradas que es base de
 $H \subset L^q(\mathbb{R})$, $q \geq 2$. Supongamos que existe $A' > 0$ tal que

$$\sup_j \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} |\xi_k^*(\varepsilon_{m_j})|^p < A', \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Un espacio de Banach B es de cotype q si y sólo si existe
 una constante $C' > 0$ tal que

$$E \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right\|^q \geq C' \sum_{j=1}^n \|x_j\|^q$$

para todo n y cualesquiera $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$.

La demostración consiste en comprobar que, bajo las con-
 diciones impuestas, se tiene

$$E^{1/p} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k^* \right\|^p \leq (C')^{-1/q} \left(\sum_{k=1}^n \|x_k^*\|^p \right)^{1/p}$$

para todo n y cualesquiera $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \in B^*$.

Como (ξ_n) es base (incondicional) de $H \subset L^q(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$, se puede aplicar la proposición 4 de [1] y se deduce que B^* es de tipo p . B^{**} es, por tanto, de cotipo q y, de acuerdo con el principio de reflexividad local (véase [3]), B es de cotipo q .

El recíproco se deduce de que B es de cotipo q si y sólo si para toda sucesión básica incondicional (x_n) de $L^q(B)$

$$E \left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^q \geq C' \sum_{j=1}^n E \|x_j\|^q,$$

para todo n y cualesquiera x_1, x_2, \dots, x_n . Basta entonces considerar que $(\xi_n x_n)$ es una sucesión condicionalmente independiente con valores en B y que, por consiguiente, es una sucesión básica incondicional de $L^q(B)$.

Como corolario se obtiene la siguiente

Proposición 2. - Sea (ξ_n) un sistema ortonormal completo de $L^2(\mathbb{R})$ y B un espacio de Banach. Una condición necesaria y suficiente para que B sea de cotipo 2 es que exista una constante $M' > 0$ tal que

$$E \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j x_j \right\|^2 \geq M' \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2$$

para todo n y cualesquiera $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$.

La condición suficiente es un resultado de Kwapien, véase [2].

De la proposición 6 de [1] y de esta anterior, se deduce obviamente el siguiente resultado:

Proposición 3. - Sea (ξ_n) un sistema ortonormal y completo de $L^2(\mathbb{R})$ y B un espacio de Banach. Son equivalentes

(i) B es isomorfo a un espacio de Hilbert.

(ii) Existen constantes $M > 0$, $M' > 0$ tales que

$$M \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \geq E \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j x_j \right\|^2 \geq M' \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2$$

para todo n y cualesquiera $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$.

BIBLIOGRAFIA

- [1]. Campos, C., San Miguel, M.: "Una caracterización de espacios de tipo p en términos de variables aleatorias reales." VII Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas. 1980.
- [2]. Kwapien, S., (1972): "Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients" *Studia Math.*, 44, pp. 583-595.

- [3]. Woyczynski, W. (1978): "Geometry and martingales in Banach spaces. Part II: Independent Increments". *Advances in Probability*. Vol.4. Marcel Dekker Inc. New York.