

# UNA CARACTERIZACION DE ESPACIOS DE COTIPO $q$ EN TERMINOS DE VARIABLES ALEATORIAS REALES

Clemente A. Campos y Sáez, Miguel San Miguel Marco

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa  
 Universidad de Zaragoza

Abstract.— The paper contains a characterization of a Banach space of cotype  $q$ ,  $q \geq 2$ , expressed in terms of a sequence of random variables in  $L^q(\mathbb{R})$  which is conditionally independent.

Las notaciones y terminología que usamos aquí son las empleadas en [1] y los resultados que se presentan se apoyan en las proposiciones 4 y 5 del mismo trabajo.

Proposición 1.— Sea  $(\xi_n)$  una sucesión condicionalmente independiente de variables aleatorias centradas que es base de  $HCL^q(\mathbb{R})$ ,  $q \geq 2$ . Supongamos que existe  $A' > 0$  tal que

$$\sup_j \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} |\xi_k^*(\varepsilon_{m_j})|^p < A', \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Un espacio de Banach  $B$  es de cotipo  $q$  si y sólo si existe una constante  $C' > 0$  tal que

$$E \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j x_j \right\|^q \geq C' \sum_{j=1}^n \|x_j\|^q$$

para todo  $n$  y cualesquiera  $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ .

La demostración consiste en comprobar que, bajo las condiciones impuestas, se tiene

$$E^{1/p} \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k x_k^* \right\|^p \leq (C')^{-1/q} \left( \sum_{k=1}^n \|x_k^*\|^p \right)^{1/p}$$

para todo  $n$  y cualesquiera  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \in B^*$ .

Como  $(\xi_n)$  es base(incondicional) de  $H \subset L^q(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ , se puede aplicar la proposición 4 de [1] y se deduce que  $B^*$  es de tipo  $p$ .  $B^{**}$  es, por tanto, de cotipo  $q$  y, de acuerdo con el principio de reflexividad local (véase [3]),  $B$  es de cotipo  $q$ .

El recíproco se deduce de que  $B$  es de cotipo  $q$  si y sólo si para toda sucesión básica incondicional  $(x_n)$  de  $L^q(B)$

$$E \left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^q \geq C' \sum_{j=1}^n E \|x_j\|^q,$$

para todo  $n$  y cualesquiera  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Basta entonces considerar que  $(\xi_n x_n)$  es una sucesión condicionalmente independiente con valores en  $B$  y que, por consiguiente, es una sucesión básica incondicional de  $L^q(B)$ .

Como corolario se obtiene la siguiente

Proposición 2.- Sea  $(\xi_n)$  un sistema ortonormal completo de  $L^2(\mathbb{R})$  y  $B$  un espacio de Banach. Una condición necesaria y suficiente para que  $B$  sea de cotipo 2 es que exista una constante  $M' > 0$  tal que

$$E \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j x_j \right\|^2 \geq M' \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2$$

para todo  $n$  y cualesquiera  $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ .

La condición suficiente es un resultado de Kwapien, véase [2].

De la proposición 6 de [1] y de esta anterior, se deduce obviamente el siguiente resultado:

Proposición 3.- Sea  $(\xi_n)$  un sistema ortonormal y completo de  $L^2(\mathbb{R})$  y  $B$  un espacio de Banach. Son equivalentes

(i)  $B$  es isomorfo a un espacio de Hilbert.

(ii) Existen constantes  $M > 0$ ,  $M' > 0$  tales que

$$M \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \geq E \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j x_j \right\|^2 \geq M' \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2$$

para todo  $n$  y cualesquiera  $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [1]. Campos, C., San Miguel, M.: "Una caracterización de espacios de tipo  $p$  en términos de variables aleatorias reales." VII Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas. 1980.
- [2]. Kwapien, S., (1972): "Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients" Studia Math., 44, pp. 583-595.

- [3]. Woyczynski, W. (1978): "Geometry and martingales in Banach spaces. Part II: Independent Increments". Advances in Probability. Vol. 4. Marcel Dekker Inc. New York.