Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

PROPIEDAD DE MARKOV DE LOS PROCESOS LOCALMENTE ESTACIONARIOS

Francisco Carmona Pontaque

Dpto. de Probabilidades y Estadística Matemática
Universidad de Barcelona

By means of the spectral decomposition of the ordinary (non-generalized) locally homogeneous fields and of a result of Kallianpur-Mandrekar [1],we prove the Markov property with respect to all open sets for those locallv homogeneous fields with the inverse of a polinomial as its Lévy measure.

Dado un proceso $X(t)$ de L^2, continuo en L^2 y a valores complejos, para todo $r,t \in R^n$ escribimos

$$X_r(t) = X(t) - X(t-r).$$

DEFINICION.- Un proceso $X(t)$ se llama localmente estacionario si las esperanzas

$$EX_r(t) = m(r) \tag{1}$$

$$E(X_{r_1}(t+s)\overline{X_{r_2}(s)}) = D(t;r_1,r_2) \tag{2}$$

no dependen de s para todo $t,s,r,r_1,r_2 \in R^n$.

Esto significa que el proceso $X_r(t)$ es estacionario para cada $r \in R^n$ y que los procesos $X_{r_1}(t)$ y $X_{r_2}(s)$ son mutuamente estacionarios para todo $r_1,r_2 \in R^n$.

El estudio de estos procesos permite establecer una teoría matemática similar a la ya clásica teoría de los procesos estacionarios. En el artículo de A.M. Yaglom [4], donde fue introducida esta teoría, se establece una representación espectral para procesos generalizados localmente estacionarios. El siguiente teorema, del que hemos conseguido una demostración directa, es la versión para procesos ordinarios del de Yaglom:

TEOREMA 1.- Dado un proceso $X(t)$ localmente estacionario, continuo en L^2 y centrado:

1) Existen una medida de Lévy $\nu(dx)$ en $R_0^n = R^n - \{0\}$ y una matriz A constante, no negativa y hermitiana tales que:

$$D(t;r_1,r_2) = \int_{R_0^n} e^{itx}(1-e^{-ixr_1})(1-e^{ixr_2})\nu(dx) + r_1' A r_2 \qquad (3)$$

2) El proceso se puede escribir en la forma

$$X(t) = \int_{R_0^n} (e^{itx}-1)Z(dx) + Y\cdot t + X(0) \qquad (4)$$

donde Z es un proceso centrado, con incrementos ortogonales e intensidad ν, es decir, $E(Z(B)^2) = \nu(B)$ para todo subconjunto medible B de R_0^n con $\nu(B)<\infty$; Y es un vector aleatorio de L^2, centrado, ortogonal a Z y con matriz de covarianzas A.

3) Reciprocamente, fijadas ν y A arbitrariamente elegidas, la función (3) es la esperanza (2) de algún proceso localmente estacionario.

Consideremos un proceso $\{X_t; t\in T\}$ de L^2, gaussiano (centrado) y con función de covarianza continua. Sea K(X) el espacio de Hilbert reproductor asociado a X_t, es decir, el espacio de Hilbert generado por las funciones $K(t,.)$ con el producto escalar $\langle K(t,.),K(s,.)\rangle = K(t,s) = \mathrm{cov}(X_t,X_s)$. K(X) es isométrico a H(X) (mínimo subespacio cerrado de $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ generado por $\{X_t; t\in T\}$).

En el trabajo de Kallianpur-Mandrekar [1] se caracteriza la propiedad de Markov respecto a todos los abiertos con la suposición de que $C_0^\infty(T)$ es denso en K(X):

<u>TEOREMA 2</u>.- Sea X_t un proceso de L^2, gaussiano, centrado y continuo, donde T es un abierto conexo de R^n. Si suponemos que $C_0^\infty(T)$ es denso en K(X), X_t es Markov respecto a todos los abiertos si, y solo si,

1) Si $\varphi,\psi\in C_0^\infty(T)$ tienen soportes disjuntos, entonces $\langle\varphi,\psi\rangle_{K(X)} = 0$.

2) Para todo abierto $D\subset T$, $\mathcal{M}(D) = \hat{\mathcal{M}}(D)$,

donde $\mathcal{M}(D) = \vee\{f\in K(X),\ \mathrm{sop}\ f\subset D\}$ y $\hat{\mathcal{M}}(D) = \vee\{\varphi\in C_0^\infty(T),\ \mathrm{sop}\ \varphi\subset D\}$ (Siempre se verifica que $\hat{\mathcal{M}}\subset\mathcal{M}$).

Siguiendo este teorema hemos demostrado la propiedad de Markov para un cierto tipo de procesos localmente estacionarios:

TEOREMA 3.- Un proceso localmente estacionario, gaussiano y centrado, con $\Upsilon=0$ y medida de Lévy asociada de la forma $\nu(dx) = dx/P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio del tipo

$$P(x) = \sum_{\alpha\in I} a_\alpha x_1^{2\alpha_1}\dots x_n^{2\alpha_n} \qquad a_\alpha \geqslant 0,$$

es Markov respecto a todos los abiertos.

La demostración se basa en cuatro lemas. El primero establece la forma del espacio reproductor $K(X)$:

LEMA 1.- Dado un proceso X_t loc. est. (con $\Upsilon=0$), el espacio reproductor es

$$K(X) = \left\{ f(t) = \int_{R_0^n} (e^{itx}-1) g(x)\nu(dx)\,;\; g\in L^2(\nu)\right\},$$

donde ν es la medida de Lévy asociada al proceso , cuyo producto escalar es

$$\langle f_1,f_2\rangle_{K(X)} = \langle g_1,g_2\rangle_{L^2(\nu)}.$$

A continuación se demuestra la hipótesis del teorema 2:

LEMA 2.- Si ν tiene por densidad el inverso de un polinomio $P(x)$, $C_0^\infty(R_0^n)$ es denso en $K(X)$.

LEMA 3.- Dada una función $f\in K(X)$ y un multiíndice $\alpha\in I$ del polinomio $P(x)$, existe la derivada 'débil' $D^\alpha f$ en el sentido de las distribuciones y es de $L^2(R^n)$.

Así pues, podemos considerar el espacio de Hilbert $H_0^I(R_0^n)$, adherencia de $C_0^\infty(R_0^n)$ con el producto

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\alpha\in I} a_\alpha \int_{R_0^n} D^\alpha f(t) D^\alpha g(t)\,dt.$$

Y finalmente:

LEMA 4.- Como espacios de Hilbert: $K(X) = H_0^I(R_0^n)$.

Esto último permite utilizar un resultado de los espacios de Sovolev (aunque en general $H_0^I(R_0^n)$ no lo sea) para probar la propiedad 2 del Teorema 2 (ver [3] pág. 170).

Si $p = \max\left\{ |\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_p, \alpha\in I\right\}$ y el polinomio $P(x)$ verifica que $|\beta| = p \Rightarrow \beta\in I$, entonces $K(X) = H_0^I(R_0^n)$ es el espacio de Sovolev $H_0^{2,p}(R_0^n)$. Para ello es suficiente que

$$(0,..,0,\overset{(i)}{p},0,..,0) \in I \text{ para todo } i=1,\dots,n.$$

El movimiento browniano da ejemplos de procesos de Markov en R^n para n impar, pero el teorema anterior permite hallarlos para cualquier n.

Ejemplo: En R^2 el proceso loc. est. con medida de Lévy asociada $\nu(dx) = dx/(x^2y^2+1)$ es de Markov.

BIBLIOGRAFIA

[1] KALLIANPUR-MANDREKAR, The Markov property for generalized gaussian random fields, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 24, 2,(1974),143-167.

[2] NUALART, Propiedad de Markov para funciones aleatorias gaussianas, (1979) Preprint.

[3] VO-KHAC KHOAN, Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux derivées partielles, Tome II (1972),cap. DC, Librairie Vuibert, Paris.

[4] YAGLOM, Some classes of random fields in n-dimensional space, related to stationary random processes, Theory Prob. Applications,(1957), Vol II nº 3.