Pub. Mat. UAB
Nº 23, Febrer 1981

UNA GENERALITZACIÓ DEL MÈTODE DE NEWTON-RAPHSON

Armengol Gasull, Secció de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Espanya.

Introducció.- En aquest treball estudiem un mètode iteratiu d'ordre 3 per a resoldre l'equació $f(x)=0$. El comparem amb un de molt semblant del mateix ordre, el de Txebyshev. Donarem sota certes condicions un teorema de convergència global i aplicarem aquest mètode a alguns exemples.

El mètode vé donat per $x_{n+1}=x_n+F(x_n)$, amb

$$F(x_n)=\frac{-f'(x_n)+\varepsilon(f'(x_n)^2-2f(x_n)f''(x_n))^{1/2}}{f''(x_n)}$$ on ε és el signe de $f'(x_n)$.

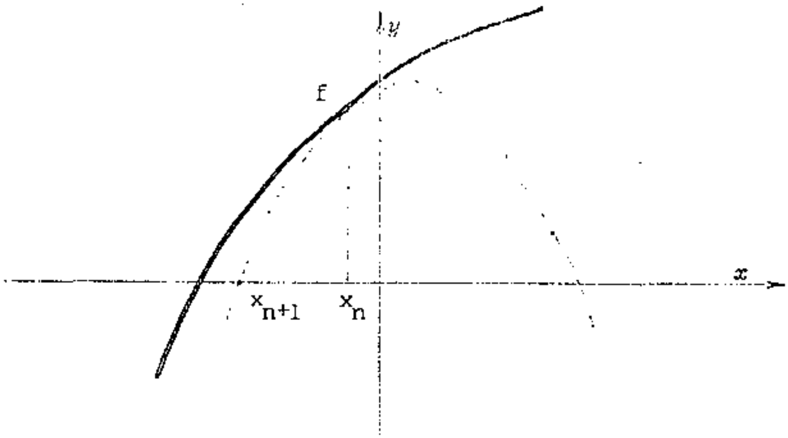
§1. Dues deduccions heurístiques.-(i) Les solucions de $g(x)=ax^2+bx+c=0$ són $s=(-b\pm(b^2-4ac)^{1/2})/2a$ o equivalentment $s=0+(-g'(0)\pm(g'(0)^2-2g(0)g''(0))^{1/2})/g''(0)$.

D'on intuim que una solució de $f(x)=0$ podem obtenir-la com a límit de la successió $x_{n+1}=x_n+(-f'(x_n)+\varepsilon(f'(x_n)^2-2f(x_n)f''(x_n))^{1/2})/f''(x_n)$. El valor de ε l'obtenim imposant que el límit de la successió (x_n) definida per $x_{n+1}=x_n+F(x_n)$ sigui una solució de $f(x)=0$. Per tant n'hi ha prou en prendre ε igual al signe de $f'(x_n)$.

(ii) Desenvolupant f per Taylor a un entorn del punt x : $f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+f''(x)(a-x)^2/2+f'''(x)(a-x)^3/6$ ...; si imposem $f(a)=0$ i aïllem a tenim :

(1) Considerant termes fins primer ordre $a=x-f(x)/f'(x)$, equació que indueix el mètode de Newton-Raphson (d'ordre 2 si l'arrel és simple).

(2) Si prenem fins a segon ordre, $a=x+(-f'(x)+\varepsilon(f'(x)^2-2f(x)f''(x))^{1/2}/f'(x)$, que porta a l'expressió obtinguda abans. Observem que si talléssim el desenvolupament a tercer i quart ordre i utilitzéssim després les formules de Scipione del Ferro i Bombelli per a resoldre les equacions polinòmiques obtingudes, tindriem mètodes més potents. Sembla que aquests mètodes serien d'ordre 4 i 5, respectivament.



(fig. 1)
Interpretació geomètrica

§2. Interpretació geomètrica.- És clar que aquest nou mètode generalitza analíticament el mètode de Newton, veiem-ho també gràficament. Donat el punt x_n, el nou x_{n+1} s'obté tallant l'eix $y=0$ amb la paràbola $y=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)+f''(x_n)(x-x_n)^2/2$ tangent a f en x_n (fig. 1).

§3. Convergència local.- Estudiem la convergència local de $x_{n+1}=x_n+F(x_n)=G(x_n)$ vers una solució simple, s, de $f(x)=0$. Tenim que $G(s)=G'(s)=G''(s)=0$ i $G'''(s)\neq 0$, aleshores, localment el mètode és d'ordre 3.

Acotem l'error. Per ser s solució simple tenim que f té una inversa $f^{-1}(y)$ en un entorn del zero.

Definim $y=H(x)=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)+f''(x_n)(x-x_n)^2/2$, doncs $H^{-1}(y)=x_n+(-f'(x_n)+\varepsilon(f'(x_n)^2-2(f(x_n)-y)f''(x_n))^{1/2})/f''(x_n)$; si desenvolupem per Taylor $f^{-1}(y)$ i $H^{-1}(y)$ a un entorn de $f(x_n)$ i avaluem a $y=0$ tenim :

$$H^{-1}(0)=x_n-f(x_n)/f'(x_n)-f''(x_n)f^2(x_n)/2f'(x_n)^3-(H^{-1})'''(\theta)(f(x_n))^3/6$$

$$f^{-1}(0)=x_n-f(x_n)/f'(x_n)-f''(x_n)f^2(x_n)/2f'(x_n)^3-(f^{-1})'''(\xi)(f(x_n))^3/6$$

amb θ i ξ entre 0 i $f(x_n)$. Ara bé com $f^{-1}(0)=s$ i $H^{-1}(0)=x_{n+1}$, restant:

$$s-x_{n+1}=((H^{-1})'''(\theta)-(f^{-1})'''(\xi))(f(x_n))^3/6.$$

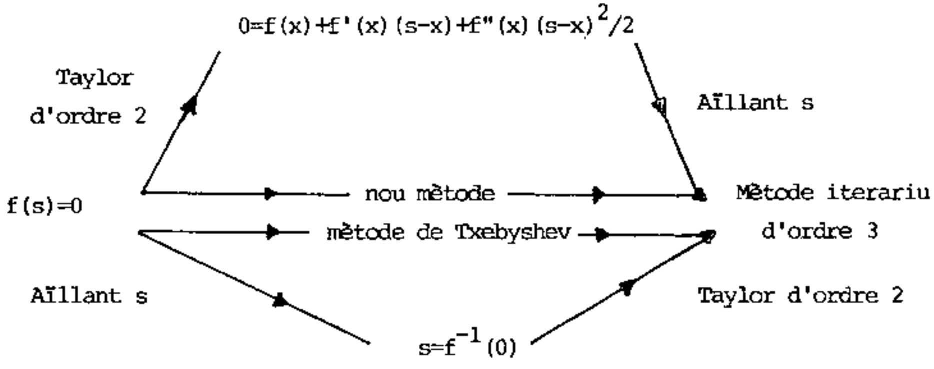
Podem, aplicant el Teorema del valor mitjà, acotar $f(x_n)$ i obtenim $|s-x_{n+1}|\leqslant A|s-x_n|^3$ on $A=(\text{màx}|(f^{-1})'''|+\text{màx}|(H^{-1})'''|)\text{màx}|f'|^3/6$ i els màxims es prenen a un entorn de s ó 0.

Podem demostrar la següent relació :
$|s-x_{n+1}|\leqslant|(H^{-1})'''(\theta)-(f^{-1})'''(\xi)||f'''(\upsilon)|^3|x_n-x_{n+1}|^9/1296$, υ entre x_n i x_{n-1} que determina la distància de x_{n+1} a s en funció de la distància entre x_n i x_{n-1}. S'ha utilitzat la desigualtat $|f(x_n)|\leqslant|f'''(\upsilon)||x_n-x_{n-1}|^3/6$ que s'obté desenvolupant per Taylor f fins ordre 3 a x_{n-1} i avaluant a x_n.

§4. Comparació amb Txebyshev.- Al demostrar a l'apartat anterior la convergència local hem utilitzat la idea del mètode de Txebyshev d'ordre 3 que consisteix en considerar s, solució de l'equació, com $f^{-1}(0)$ i calcular-la desenvolupant per Taylor f^{-1} fins a segon ordre. Aquest mètode vé donat per $x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)-f''(x_n)f^2(x_n)/2f'(x_n)$ i té error $s-x_n=-(f^{-1})'''(\xi)f^3(x_n)/6$ amb ξ entre 0 i $f(x_n)$, per més detalls veure [1].

Com $H\sim f$, aleshores $H^{-1}\sim f^{-1}$ i per tant $(H^{-1})'''\sim(f^{-1})'''$ així sembla heurísticament que el nou mètode serà lleugerament millor que el de Txebyshev, ja que a la seva expressió de l'error apareix el terme $(H^{-1})'''-(f^{-1})'''$.

Observem els passos seguits per a deduir els dos mètodes en el següent diagrama :



Es veu així que el camí seguit per Txebyshev dóna mètodes d'ordre n, per tot n natural, mentre que l'altre camí queda limitat al no poder-se resoldre per radicals les equacions polinòmiques de grau més gran que 4.

És interessant notar que aquest diagrama commuta totalment si tallem Taylor a ordre 1. El resultat és el mètode de Newton-Raphson.

§5. Teorema de convergència global

Teorema *Sigui $f:[a,b] \longrightarrow R$, $f \varepsilon C^3 [a,b]$ tal que*

(i) $f(a)f(b) < 0$

(ii) f', f'', f''' tenen signe constant a $[a,b]$

(iii) $f'(x)f'''(x) < 0$ per a tot x de $[a,b]$

Aleshores per a tot $x_0 \varepsilon [a,b]$ la successió x_n construïda per $x_{n+1} = x_n + F(x_n)$ tendeix monòtonament vers s, única solució de $f(x)=0$ a $[a,b]$.

Demostració : Tots els casos es poden reduir a $f'> 0, f''> 0, f'''< 0$. En aquest cas tenim els següents resultats que proven el teorema :

a) $h(x)=f'(x)^2-2f(x)f''(x)$ és positiva per tot x de $[a,b]$.

b) $F(x)> 0$ si $x \varepsilon [a,s)$ i $F(x)< 0$ si $x \varepsilon (s,b]$.

c) $x+F(x)< s$ si $x \varepsilon [a,s)$ i $x+F(x)> s$ si $x \varepsilon (s,b]$.

Observem que l'idea d'aquesta demostració és la del teorema de convergència global de Newton-Raphson [2].

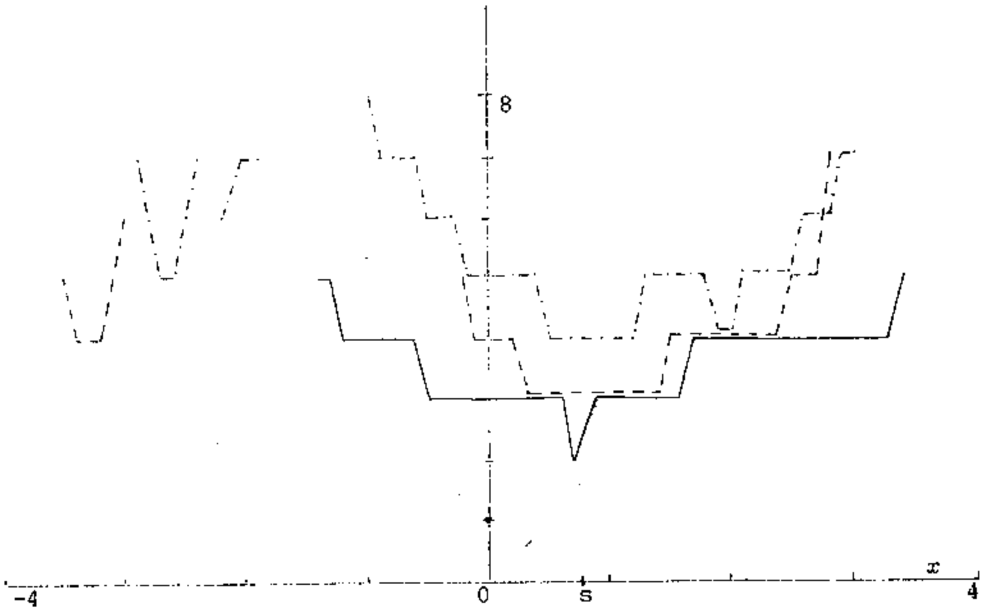
§6. Comportament pels zeros múltiples.

- Considerem primer el cas en que la multiplicitat de s és 2, llavors tenim convergència quadràtica si $f''(s)f'''(s)$ és negatiu i prenem x_0 a prop de s però a la dreta de s o bé si $f''(s)f'''(s)$ és positiu i prenem x_0 a prop de s però a l'esquerra de s, ja que $G(x)=x + F(x)$ compleix $G(s)=G'(s)=0$, $G''(s)\neq 0$. La funció $h(x)=f'(x)^2-2f(x)f''(x)$, que figura dins del radical del mètode, és negativa per als altres casos.

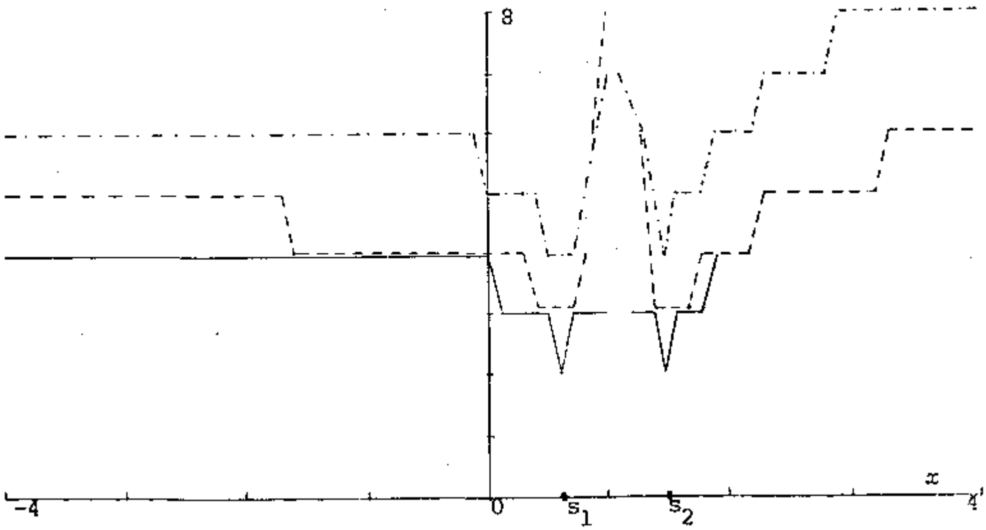
Si la multiplicitat de s és $M> 2$, $h(x)=h^{2M}(\tau)(x-s)^{2M}/(2M)!$ on τ està entre x i s, ara bé com $h^{2M}(s)=-B(f^{M+1}(s))^2$ i $B >0$ tenim que a un entorn prou petit de s, $h(x)< 0$. Per tant el mètode no està definit, però si fem $x_{n+1}= x_n+(-f'(x_n)+\varepsilon(2f(x_n)f''(x_n)-f'(x_n)^2)^{1/2})/f''(x_n)$ n'obtenim un de convergència lineal.

§7. Exemples numèrics.

- Per a il.lustrar aquest mètode observem com es comporta en algunes funcions particulars comparant els resultats amb els de els mètodes de Txebyshev (ordre 3) i de Newton (ordre 2) per les mateixes funcions.



(fig. 2)



Mètodes de : Txebyshev (- - - -) Newton (-·-·-·-) nou (———)

(fig. 3)

Velocitat de convergència

considerem les funcions

$$f_1(x) = x - \cos x$$
$$f_2(x) = e^x - 3x$$

aleshores les equacions $f_1(x) = 0$ i $f_2(x) = 0$ tenen respectivament un zero, diguem s, i dos zeros, diguem s_1, s_2. A les figures 2 i 3 es representa a l'eix x el punt x_0 per al que s'inícia el mètode, per les funcions f_1 i f_2 respectivament (aquest x_0 varia de -4(0.1)4). La imatge de x_0 és sempre un número enter, que representa el nombre d'iteracions necessàries per a obtenir la solució amb 16 xifres decimals exactes. Amb les línies inclinades donem continuïtat a la gràfica. Quan un x_0 no té imatge, vol dir o que el mètode no convergeix o que necessita més de 8 iteracions per a trobar la solució amb la precisió desitjada. Veiem, en aquest exemples, una velocitat més gran del mètode aquí estudiat respecte dels altres aquí considerats.

Els intervals teòrics de convergència donats pels teoremes de convergència global són per a la funció f_1: $(0,\pi/2)$ i $(z,\pi/2)$ en el nostre mètode i el de Newton-Raphson, respectivament, on $z \in (-0.4,-0.3)$ i per a la funció f_2 donen lloc al mateix interval de convergència: $(-\infty,\ln 3)$.

Agraïments

Agraeixo a Jaume Llibre la seva direcció en la realització d'aquest treball.

Referències

1.- I.S.Berezin and N.P.Zhidkov, Computing Methods, Pergamon Press, 1965.

2.- P.Henrici, Elements of Numerical Analysis, Jhon Wiley & Sons, 1964.