Pub. Mat. UAB
Nº 23, Febrer 1981

REPRESENTACION DE OPERADORES SOBRE ESPACIOS $L^p(\mu)$ POR MEDIDAS VECTORIALES

INTRODUCCION

Una útil y bonita aplicación de las medidas vectoriales es el estudio de operadores entre espacios de Banach. Si un operador se expresa como una integral con respecto a una medida vectorial, ésta, además de darle una forma elegante y sencilla, nos da información sobre el comportamiento y propiedades del ooperador.

El punto de partida de este trabajo es el capítulo 6 de Diestel-Uhl (5) y dos artículos, uno de Diestel (4) que estudia la representación de operadores sobre el espacio de Banach $B(\Sigma)$ de las funciones Σ-medibles acotadas con la norma del supremo, y otro de A. Tong (16) que lo hace para $C(\Omega)$.

En todos ellos se relacionan propiedades del operador con propiedades de la medida que lo representa y se llega a parecidos resultados. Concretamente de demuestran que el operador considerado es debilmente compacto, si y sólo si la medida que lo representa es fuertemente acotada, que es absolutamente sumante si y sólo si la medida es de variación acotada y es nuclear si y sólo si la medida asociada tiene derivada de Radón-Nikodym en cierto sentido.

¿Qué puede decirse para los espacios $L^p(\mu)$ a la vista de los anteriores resultados? La respuesta a esta pregunta es el principal objeto de la presente tesina. Y para su desarrollo las herramientas más utilizadas son los productos tensoriales y las técnicas con medidas vectoriales.

Por último quiero expresar un agradecimiento a los compañeros de la Universidad Autónoma y en especial al Dr. D. Juan L. Cerdá sin cuya valiosa ayuda no hubiera sido posible la presentación de este trabajo.

CAPITULO 1

REPRESENTACION DE OPERADORES POR MEDIDAS VECTORIALES

1.1 Medidas vectoriales, variación y semivariación.

Los siguientes resultados previos así, como el Teorema 1 que a continuación exponemos, se encuentran en Diestel-Uhl (5) capítulo 1.1.

Sea Ω un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de Ω y F un espacio de Banach.

Definición Se llama medida vectorial a toda aplicación $m: \mathcal{A} \to F$ finitamente aditiva, es decir, que cumple

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) \qquad (A,B \text{ de } \mathcal{A} \text{ con } A \cap B = \emptyset)$$

Si además se cumple $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ para todas las sucesiones $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ de $\mathcal{A}$, m se llama contablemente aditiva.

En lo sucesivo será $m: \mathcal{A} \to F$ una medida vectorial.

Definición Se llama variación de m a la aplicación $|m|: \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ definida por

$$|m|(A) = \sup_{\pi} \sum_{E \in \pi} \|mE\| \qquad (A \text{ de } \mathcal{A})$$

donde el supremo está tomado de entre todas las particiones finitas π de A formadas por elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos.

Si $|m|(\Omega) < +\infty$, m se llama de variación acotada.

La variación $|m|$ de una medida vectorial m es también medida y es contablemente aditiva si m lo es.

Si $m: \mathcal{A} \to F$ es una medida vectorial entonces, para todo x^* de F^*, $x^*m: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es una medida escalar, de la que podemos considerar su variación $|x^*m|$.

Definición Dada $m: \mathcal{A} \to F$, se llama semivariación de m a la aplicación $\tilde{m}: \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ definida por

$$\tilde{m}(A) = \sup \{ |x^*m|(A) : x^* \text{ de } F^* , \ \|x^*\| \leq 1 \}$$

Si $\tilde{m}(\Omega) < +\infty$, m se llama de semivariación acotada. La semivariación $\tilde{m}$ de una medida m es una función subaditiva que en general no es medida. Se cumple $\tilde{m}(E) \leq |m|(E)$ y al ser $|m|$ la menor medida positiva μ tal que $\|mE\| \leq \mu(E)$ y al ser también $\|mE\| \leq \tilde{m}(E)$ (E de $\mathcal{A}$), resulta que la semivariación $\tilde{m}$ es una medida si y sólo si coincide con $|m|$.

Otra definición equivalente de semivariación de una medida es

$$\tilde{m}(E) = \sup_{\pi} \Big\| \sum_{E_n \in \pi} \varepsilon_n \, m(E_n) \Big\|$$

donde el supremo está tomado de entre todos las particiones finitas π de E formadas con elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos y ε_n constantes con $|\varepsilon_n| \leq 1$.

De aquí resulta $\sup \{ \|mA\| : E \supset A \text{ de } \mathcal{A} \} \leq \tilde{m}(E) \leq 4 \sup \{ \|mA\| : E \supset A \text{ de } \mathcal{A} \}$ luego una medida es de semivariación acotada si y sólo si tiene rango acotado y por esta razón a veces se llaman acotadas a las medidas de semivariación acotada.

1.2 Representación de operadores por medidas vectoriales

El planteamiento general es el siguiente: Dado un espacio de funciones X y un operador $T: X \to F$ donde F es un Banach, ver si existe una medida vectorial $m: \mathcal{A} \to F$ tal que sea $Tf = \int f \, dm$, es decir, que T tenga forma integral respecto de m. En tal caso diremos que la medida m representa al operador T. Naturalmente deberemos decir qué entendemos por integrar una función con respecto a una medida vectorial.

Por ejemplo, si X contiene a las funciones características de los conjuntos medibles de una cierta álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto Ω, para que una medida $m:\mathcal{A} \to F$ represente a un operador $T: X \to F$ deberá ser $m(E) = T(\chi_E)$ si E es de $\mathcal{A}$; de este modo m es medida al ser T lineal. Luego podríamos estudiar qué condiciones debe cumplir m para que efectivamente represente a T y tratar de relacionar propiedades de la medida con propiedades del operador y viceversa.

En lo que sigue estudiaremos los casos en que sea $X = B(\mathcal{A})$ ó $C(\Omega)$ ó un $L^p(\mu)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

1.2.1 Operadores $T: B(\mathcal{A}) \to F$ y operadores $T: L^\infty(\mu) \to F$

Dada un álgebra $\mathcal{A}$ en un conjunto Ω, se llama función simple a toda función $s: \Omega \to C$ de la forma $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ donde α_i son escalares y $E_i \in \mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos. El conjunto S de las funciones simples es un espacio vectorial normado con la norma del supremo.

Así, dada una medida vectorial acotada $m:\mathcal{A} \to F$, podemos definir la aplicación $T: S \to F$ dada por $T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m(E_i)$, que es obviamente lineal y verifica.:

$$\|T(s)\| = \|\sum_{i=1} \alpha_i\, m(E_i)\| = \|s\|_\infty \|\sum_{i=1} \frac{\alpha_i}{\|s\|_\infty} m(E_i)\| \leq \|s\|_\infty \cdot \tilde{m}(\Omega)$$

donde $\|s\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$ es la norma del supremo y $\tilde{m}(\Omega)$ es la semivariación de m.

Luego T es lineal y continua y por tanto admite una única extensión, que seguiremos llamando T, al espacio de todas las funciones $f:\Omega \to \mathbb{C}$ que son límite uniforme de funciones simples, que con la norma del supremo es un espacio de Banach al que llamaremos $B(\mathcal{A})$.

Así pues, a una medida vectorial $m: \mathcal{A} \to F$ de semivariación acotada le hemos asociado un operador $T: B(\mathcal{A}) \to F$ de manera que $T(\chi_E) = m(E)$ (E de $\mathcal{A}$). En este caso resulta ser $Tf = \int f\, dm$ donde el segundo miembro es la integral de una función escalar que es límite uniforme de funciones simples por una medida vectorial m, llamada integral de Bartle y cuya construcción anterior puede tomarse como definición de tal integral.

Recíprocamente, dado un operador $T: B(A) \to F$, si definimos $m: A \to F$ por $m(E) = T(\chi_E)$, entonces m es una medida vectorial de semivariación acotada con $\tilde{m}(\Omega) \leq \|T\|$.

Con ello hemos demostrado el

Teorema 1 Existe una biyección entre el conjunto de operadores $T: B(A) \to F$ y el de las medidas acotadas $M: A \to F$ dada por $Tf = \int_\Omega f\, dm$ $(f \in B(A))$. En tal caso es $\|T\| = \tilde{m}(\Omega)$.

Nótese que en el caso de ser $A = \Sigma$ σ-álgebra entonces $B(\Sigma)$ es precisamente el espacio de las funciones escalares Σ-medibles acotadas. Luego, dado un espacio de medida positiva (Ω, Σ, μ), se tiene:

Corolario 2 Existe una biyección entre el conjunto de operadores $T: L^\infty(\mu) \to F$ y el de las medidas acotadas $m: \Sigma \to F$ que son nulas sobre los μ-nulos.

El conjunto $ba(A)$ de las medidas escalares $\eta: A \to \mathbb{C}$ acotadas es un espacio vectorial normado tomando como norma la semivariación de η, o bien la variación de η, ya que, en el caso de una medida escalar, semivariación y variación coinciden. También es un espacio normado con la semivariación el conjunto $ba(\Sigma, \mu)$ de todos las medidas escalares finitamente aditivas que se anulan sobre los conjuntos de μ-medida nula. Una consecuencia del siguiente corolario es que tales espacios son Banach.

Corolario 3 El dual de $B(A)$ es el espacio $ba(A)$ de las medidas escalares finitamente aditivas acotadas con la norma de la semivariación. El dual de $L^\infty(\mu)$ es el conjunto $ba(\Sigma, \mu)$ de las medidas escalares finitamente aditivas y acotadas que se anulan sobre los conjuntos de μ-medida nula, normado con la semivariación.

Demostración Basta con poner $F = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$ en los resultados anteriores.

Definición Una medida $m: \mathcal{A} \to F$ se llama fuertemente aditiva si dada una sucesión de conjuntos $E_n \in \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ converge con la norma de F.

Las medidas fuertemente aditivas son las que extienden a una contablemente aditiva sobre la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.

Propiedades interesantes de tales medidas y la demostración de los siguientes teoremas pueden verse en Diestel-Uhl (5) capítulo 6 § 1.

Teorema 4 $T: B(\mathcal{A}) \to F$ (o bien $T: L^{\infty}(\mu) \to F$) es débilmente compacto si y sólo si la medida que lo representa es fuertemente aditiva.

Teorema 5 Dado $T: L^{\infty}(\mu) \to F$ son equivalentes:

(a) T es $(\sigma^*\text{-}\sigma)$- continuo.

(b) La medida que representa T es contablemente aditiva

(c) La medida que representa T es μ-continua.

1.2.2 Operadores $T: C(\Omega) \to F$

Sea ahora Ω un espacio topológico compacto Hausdorff y Σ la σ-álgebra de los borelianos de Ω. Como es usual $C(\Omega)$ en el espacio de Banach de las funciones $f: \Omega \to \mathbb{C}$ continuas con la norma del supremo ¿Cómo es el teorema de representación de Riesz para operadores $T: C(\Omega) \to F$?

Los siguientes resultados, debidos a Bartle-Dunford y Swartz (1) dan la respuesta a la pregunta. Véanse también en Diestel-Uhl (5) capítulo 6 § 2.

Definición $m: \Sigma \to F^{**}$ se dice que representa al operador $T: C(\Omega) \to F$ si

(a) $m_{x^*} = x^*m : \Sigma \to \mathbb{C}$ son medidas regulares de Borel (x^* de F^*).

(b) La aplicación $x^* \in F^* \to m_{x^*} \in C(\Omega)^*$ es $(\sigma^*\text{-}\sigma^*)$- continua.

(c) x^*T es representada (Riesz) por m_{x^*}, o sea, $x^*Tf = \int f\, dm_{x^*}$ (f de $C(\Omega)$ y x^* de F^*).

(d) $\|T\| = \tilde{m}(\Omega)$.

Entonces se tiene

Teorema 6 Existe una biyección entre los operadores $T: C(\Omega) \to F$ y las medidas aditivas $m:\Sigma \to F^{**}$ que cumplen (a) y (b), de manera que x^*T es representada por m_{x^*} (x^* de F^*) y tal que $\|T\| = \tilde{m}(\Omega)$.

Quizá el hecho más sorprendente sea que en general la medida que representa a $T: C(\Omega) \to F$ tome valores en F^{**}. Ello resulta así porque $C(\Omega)$ no contiene a las funciones características de los conjuntos medibles y entonces el operador $T: B(\Sigma) \to F^{**}$ definido por $\hat{T}f = \int_\Omega f\, dm$ extiende a T en el sentido en que es $\hat{T}f = Tf$ si es f de $C(\Omega)$, lo que ya aparece como más natural. Otra manera de verlo es considerar $B(\Sigma) \subset C(\Omega)^{**}$ y $\hat{T}$ que sea la restricción a $B(\Sigma)$ de T^{**}.

Ejemplo 7 Sea $T: C[0,1] \to C_0$ definido por $Tf = (f(1/n) - f(o))_{n=1}^{\infty}$ si f es de $C[0,1]$. Entonces su medida asociada que lo representa es $m: \Sigma \to l^{\infty} = C_0^{**}$ dada por $m(E) = (\chi_E(1/n) - \chi_E(o))_{n=1}^{\infty}$ que deja de ser C_0 valuada. Incluso deja de ser contablemente aditiva, como se comprueba por ejemplo tomando $E_n = \{1/n\}$, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ no es de Cauchy en l^{∞}.

Teorema 8 Sea $T: C(\Omega) \to F$ representado por $m:\Sigma \to F^{**}$ son equivalentes:

(a) T es débilmente compacto.

(b) La medida m toma valores en F.

(c) m es contablemente aditiva.

(d) m es fuertemente aditiva

(e) m es regular, es decir, que para todo $E \in \Sigma$ existe K compacto y O abierto tales que $K \subset E \subset O$ y $m(G\setminus K) < \varepsilon$.

Antes de pasar a la representación de los operadores sobre los espacios $L^p(\mu)$ necesitamos algunos resultados previos que exponemos seguidamente. Las secciones 1.3 y 1.4 se encuentran en N. Dinculeanu (6 y 7).

1.3 q-semivariación y q-variación de una medida vectorial

Nuestro objetivo es hallar una generalización de la semivariación y variación de una medida. Generalización que surge de manera natural al estudiar operadores sobre espacios $L^p(\mu)$.

Sea Ω un conjunto, Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $\mu:\Sigma \to \mathbb{R}$ una medida positiva finita. Consideremos una medida vectorial $m:\Sigma \to F$, donde F es un espacio de Banach.

<u>Definición</u> Se llama q-semivariación de m, $\tilde{m}_q$, a la función $\tilde{m}_q:\Sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ dada por

$$\tilde{m}_q(A) = \sup_{\|s\|_p \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, m E_i \right\|,$$ supremo tomado de entre todas las funciones simples $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ con α_i de $\mathbb{C}$, E_i de Σ contenidos en A, disjuntos dos a dos, con $\|s\|_p \leq 1$.

<u>Definición</u> Se llama q-variación de m, $\bar{m}_q$, a la función $\bar{m}_q:\Sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ dada por

$$\bar{m}_q(A) = \sup_{\|s\|_p \leq 1} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \|m E_i\| \quad (A \text{ de } \Sigma)$$

donde como antes tomamos el supremo de entre todas las funciones simples de la forma $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ con α_i de $\mathbb{C}$, E_i de Σ contenidas en A, disjuntos dos a dos, con $\|s\|_p \leq 1$.

Nótese que, al ser en estos casos $\|s\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \mu(E_i)\right)^{1/p}$, $\|s\|_p \leq 1$ equivale a que sea $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \mu(E_i) \leq 1$.

Escribiremos $\widetilde{m}_q = \widetilde{m}_q(\Omega)$ y $\bar{m}_q = \bar{m}_q(\Omega)$.

Resumimos a continuación algunas propiedades de la q-semivariación y de la q-variación.

1) Si $\widetilde{m}$ es la semivariación de m y $|m|$ es la variación de m entonces $\widetilde{m} \le \widetilde{m}_1$ y $|m| \le \bar{m}_1$, pero, si $\mu(E) = 0 \Rightarrow m(E) = 0$ para E de Σ, es $\widetilde{m}_1 = \widetilde{m}$, y $|m| = \bar{m}_1$.

2) $\bar{m}_1$ es aditiva, $\bar{m}_q$ y $\widetilde{m}_q$ son subaditivas. Si m es contablemente aditiva entonces $\bar{m}_1$ es contablemente aditiva y $\bar{m}_q$ y $\widetilde{m}_q$ son contablemente subaditivas.

3) $\widetilde{m}_q \le \bar{m}_q$, pero si $F = \mathbb{C}$ ó si $q = +\infty$ vale la igualdad.

4) $\|mE\| \le \widetilde{m}_q(E)\mu(E)^{1/p} \le \bar{m}_q(E)\mu(E)^{1/p}$ (E de Σ)

5) $\widetilde{m}_p \le \mu(\Omega)^{1/p-1/q}\, \widetilde{m}_q$ y $\bar{m}_p \le \mu(\Omega)^{1/p-1/q}\, \bar{m}_q$ si $1 \le p \le q \le \infty$

6) Para $1 \le q < \infty$ y toda A de Σ se tiene

$$\bar{m}_q(A) = \sup_{\pi} \{ \sum_{E \in \pi} \frac{\|mE\|^q}{\mu(E)^q}\, \mu(E) \}^{1/q}$$

$$\widetilde{m}_q(A) = \sup_{\substack{\|x^*\| \le 1 \\ x^* \text{ de } F^*}} \sup_{\pi} \{ \sum_{E \in \pi} \frac{|x^* mE|^q}{\mu(E)^q}\, \mu(E) \}^{1/q}$$

donde π recorre todas las particiones finitas disjuntas de elementos de Σ .

7) De las relaciones anteriores se deduce

$$\widetilde{m}_q(E) = \sup \{ \overline{(x^*m)}_q(E) \;:\; x^* \text{ de } F^*,\ \|x^*\| \le 1 \}$$

lo cual recuerda la definición dada en la página 2 de la semivariación de m.

8) La q-semivariación de $|m|$, $|\widetilde{m}|_q$, es precisamente $\bar{m}_q$.

9) Si $\bar{m}_q < +\infty$ con $q \neq 1$ entonces m es de variación acotada y absolutamente continua respecto de μ.

1.4 Operadores $T: L^p(\mu) \to F$ con $1 \le p \le \infty$

Sea Ω un conjunto, Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y μ una medida positiva finita.

Sea $1 \le p \le \infty$ y q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Proposición 9 Existe una correspondencia biunívoca $T \leftrightarrow m$ entre operadores $T: L^p(\mu) \to F$ y medidas vectoriales $m: \Sigma \to F$ contablemente aditivas (aditivas si $p = \infty$) y nulas sobre los conjuntos de μ-medida nula, de q-semivariación acotada, dada por $Tf = \int f\,dm \quad \forall f \in L^p(\mu)$. Si T y m están en correspondencia entonces es $\|T\| = \tilde{m}_q$.

Demostración Dado $T: L^p(\mu) \to F$ se define la medida vectorial $m: \Sigma \to F$ por $m(E) = T(\chi_E)$, que es finitamente aditiva por ser T lineal. Como que para $p < \infty$ $\|mE\| = \|T(\chi_E)\| \le \|T\| . \mu(E)^{1/p}$ resulta que si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de Σ tales que $E_n \downarrow \emptyset$ será $\mu(E_n) \to 0$ al ser μ contablemente aditiva, luego $m(E_n) \to 0$ y por tanto es m contablemente aditiva.

De la misma definición de m se observa que $\mu(E) = 0 \Rightarrow m(E) = 0$ y además $\tilde{m}_q = \sup_{\|S\|_p \le 1} \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m(E_i)\| = \sup_{\|S\|_p \le 1} \|T(S)\|$ donde $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ con E_i disjuntos, pero al ser las funciones simples densas en $L^p(\mu)$ y T continuo es $\sup_{\|S\|_p \le 1} \|T(S)\| = \sup_{\|f\|_p \le 1} \|Tf\|$ con $f \in L^p(\mu)$, de donde $\tilde{m}_q = \|T\|$.

Por otra parte dos operadores distintos no pueden tener asociada la misma medida vectorial, puesto que de ser así coincidirían sobre las funciones características χ_E $\forall E \in \Sigma$, luego por linealidad coincidirían sobre las funciones simples y por último por continuidad valdrían lo mismo sobre las funciones de $L^p(\mu)$, contradicción.

Recíprocamente, dada $m: \Sigma \to F$ con $\tilde{m}_q < \infty$, se define T sobre las funciones simples $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ como $T(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m(E_i)$, que no depende de las diferentes formas en que pueda escribirse s. Como que $\frac{s}{\|s\|_p}$ tiene norma 1 será

$\|T(\frac{s}{\|s\|_p})\| \leq m_q$ de donde $\|T(s)\| \leq \widetilde{m}_q \cdot \|s\|_p$. Esto nos dice que T es continuo sobre las funciones simples, luego, por ser éstas densas en $L^p(\mu)$, podemos extender T a $L^p(\mu)$ del siguiente modo: Si $f \in L^p(\mu)$, existen s_n simples tales que $s_n \to f$ en $L^p(\mu)$, luego se define $Tf = \lim_n T(s_n)$ y se define también la integral de una función $f \in L^p(\mu)$ por una medida vectorial como $\int f\, dm = T(f)$

<u>Definición</u> Dado un operador $T: L^p(\mu) \to F$ y una medida vectorial $m:\Sigma \to F$ diremos que m representa a T cuando es $Tf = \int f\, dm$ (f de $L^p(\mu)$).

El caso particular $p = \infty$ ya era conocido : $m:\Sigma \to F$ representa a $T:L^\infty(\mu) \to F$ si y sólo si $\widetilde{m} < \infty$.

Nótese que para $1 < p < \infty$ todo operador $T: L^p(\mu) \to F$ es débilmente compacto, ya que en este caso $L^p(\mu)$ es reflexivo.

Para $p = \infty$ ya hemos visto, teorema 4, que $T: L^\infty(\mu) \to F$ es débilmente compacto si y sólo si la medida que lo representa es fuertemente aditiva.

Para $p = 1$ se tiene : $T: L^1(\mu) \to F$ es débilmente compacto si y sólo si existe $g \in L^\infty(\mu,F)$ de rango esencialmente relativamente débilmente compacto tal que $Tf = \int_\Omega fg\, d\mu$ (integral de Bochner, véase pág. 23) si es f de $L^1(\mu)$. Siendo en tal caso $\|T\| = \widetilde{m}(\Omega) = \|g\|$. Véase la demostración en Diestel-Uhl(5) pág. 75.

CAPITULO 2

OPERADORES ABSOLUTAMENTE SUMANTES (A.S.) Y ORDEN SUMANTES (O.S.)

Sean X a Y espacios de Banach

Definición Un operador $T:X \to Y$ se llama absolutamente sumante, lo llamaré A.S., si aplica sucesiones sumables $\{x_n\}$ de X en sucesiones $\{Tx_n\}$ absolutamente sumables de Y.

Proposición 1 Son equivalentes:

(a) T es absolutamente sumante.

(b) T aplica sucesiones débilmente sumables en sucesiones absolutamente sumables.

(c) Existe una constante $\rho \geq 0$ tal que si $x_1, \ldots x_n \in X$ es

$$\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\| \leq \rho \quad \sup\{ \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)| \ : x^* \text{ de } x^*, \|x^*\| \leq 1\}$$

(d) Existe una medida regular positiva μ definida sobre los borelianos de la bola unidad de X^*, U°, tal que

$$\|T_x\| \leq \int_{U^\circ} |x^*(x)| d\mu(x^*)$$

El conjunto de los operadores A.S. de X a Y forman un espacio de Banach con la norma $\|T\|_{AS}$ = ínfimo de las constantes $\rho \geq 0$ que verifican (c) = ínfimo de $\mu(U^\circ)$ entre las medidas que verifican (d). La composición de un operador A.S. con uno continuo y de un operador continuo con uno A.S. sigue siendo A.S. Para las demostraciones y más detalles véase A. Pietch (13) capítulo 2.

En un artículo de Diestel (5) se demuestra

Proposición 2 T: $B(\Sigma) \to F$ es A.S. si y sólo si la medida $m:\Sigma \to F$ que lo representa es de variación acotada y en tal caso $\|T\|_{AS} = |m|(\Omega)$.

Como consecuencia se tiene

Proposición 3 T: $L^{\infty}(\mu) \to F$ es A.S. si y sólo si la medida que lo representa es de variación acotada y en tal caso $\|T\|_{AS} = |m|(\Omega)$.

Resultado éste que se encuentra en C. Swartz (15), pero con una demostración diferente.

Si T: $C(\Omega) \to F$ es A.S. entonces es débilmente compacto, véase Pełczynski (10), luego la medida que lo representa es F-valuada. También en este caso se tiene

Proposición 4 T: $C(\Omega) \to F$ es A.S. si y sólo si la medida que lo representa $m:\Sigma \to F$ es de variación acotada. En tal caso $\|T\|_{AS} = |m|(\Omega)$

Demostración: Véase A. Tong (16).

La proposición 2 de Diestel sigue siendo cierta en el caso de operadores sobre B(A), si bien se requiere otra demostración:

Lema 5 Sean $f_1, \ldots, f_n$ de B(A). Se tiene

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right\|_{\infty} = \sup_{|\varepsilon_1| = \ldots = |\varepsilon_n| = 1} \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i\right\|_{\infty},$$

supremo tomado de entre todas las constantes ε_m de módulo 1.

Demostración En efecto, por un lado es $\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i\|_{\infty} \leq \|\sum_{i=1}^{n} |f_i|\|_{\infty}$ para toda elección de las constantes ε_i. Por otro lado dado t de Ω existe $\varepsilon_i(t)$ constante de módulo 1 tal que $\varepsilon_i(t) f_i(t) = |f_i(t)|$, luego $\|\sum_{i=1}^{n} |f_i|\|_{\infty} = \sup_{t\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} |f_i|(t) = \sup_{t\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t) f_i(t)$, luego, dado $\varepsilon > 0$, existe t_0 de Ω tal que $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t_0) > \|\sum_{i=1}^{n} |f_i|\|_{\infty} - \varepsilon$. Poniendo ahora $\varepsilon_i(t) = \varepsilon_i(t_0) = \varepsilon_i$ para todo t resulta que $\sup_{|\varepsilon_i| = \ldots = |\varepsilon_n| = 1} \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i\|_{\infty} = \sup_{|\varepsilon_i| = 1} \sup_{t\in\Omega} |\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i(t)| \geq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t_0) >$ $> \|\sum_{i=1}^{n} |f_i|\|_{\infty} - \varepsilon$.

Esto para todo $\varepsilon > 0$, lo cual implica que $\sup_{|\varepsilon_i| = 1} \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i\|_{\infty} \geq \|\sum_{i=1}^{n} |f_i|\|_{\infty}$.

Proposición 6 Un operador $T: B(A) \to F$ es A.S. si y sólo si la medida que lo representa $m: A \to F$ es de variación acotada. En tal caso $\|T\|_{AS} = |m|(\Omega)$.

Demostración Si $T: B(A) \to F$ es A.S. entonces, por definición, se cumple $\sum_{i=1}^{n} \|Tf_i\| \leq \|T\|_{AS} \sup \{ \sum_{i=1}^{n} |x^*(f_i)| : x^* \in B(A)', \|x^*\| \leq 1\}$. Pero $B(A)' = ba(A)$, espacio de las medidas finitamente aditivas y acotadas $\mu: A \to \mathbb{C}$ con la norma de la variación, luego si m es la medida que representa a T será

$$|m|(\Omega) = \sup_{\pi} \sum_{E_n \text{ de } \pi} \|mE_n\| = \sup_{\pi} \sum_{E_n \text{ de } \pi} \|T(\chi_{E_n})\| \leq$$

$$\leq \sup_{\pi} \|T\|_{AS} \cdot \sup \{ \sum_{E_n \text{ de } \pi} |x^*(\chi_{E_n})| : x^* \in B(A)', \|x^*\| \leq 1\} =$$

$$= \sup_{\pi} \|T\|_{AS} \cdot \sup \sum_{E_n \text{ de } \pi} \left|\int_{\Omega} \chi_{E_n} \, d\mu\right| : \mu \in ba(A), \text{ variac. } (\mu) \leq 1\} =$$

$$= \sup_{\pi} \|T\|_{AS} \cdot \sup \{ \sum_{E_n \text{ de}} |\mu(E_n)| : \mu \in ba(A), \text{ variac.}(\mu) \leq 1\} \leq \|T\|_{AS}$$

luego m es de variación acotada con $|m|(\Omega) \leq \|T\|_{AS}$.

Recíprocamente supongamos que m es de variación acotada, en este caso si $f_1, \dots, f_n \in B(A)$

$$\sum_{i=1}^{n} \|Tf_i\| = \sum_{i=1}^{n} \left\|\int f_i \, dm\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \int |f_i| \, d|m| = \int \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right) d|m| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} |f_i| \right\|_{\infty} \cdot |m|(\Omega)$$

pero, de acuerdo con el lema 5, $\left\| \sum_{i=1}^{n} |f_i| \right\|_{\infty} = \sup_{|\varepsilon_1| = \dots = |\varepsilon_n| = 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i \right\|_{\infty}$

donde ε_i son constantes, luego

$$\sum_{i=1}^{n} \|Tf_i\| \leq |m|(\Omega) \sup_{|\varepsilon_1| = \dots = |\varepsilon_n| = 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i \right\|_{\infty} = |m|(\Omega) \sup_{|\varepsilon_1| = \dots = |\varepsilon_n| = 1}$$

$$\sup \{ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i d\mu : \mu \in ba(A) \text{ variac.}(\mu) \leq 1\} =$$

$$= |m|(\Omega) . \sup \{ \sum_{i=1}^{n} | f_i d\mu| : \mu \in ba(A), \text{ variac.}(\mu) \leq 1\} =$$

$= |m|(\Omega).\ \sup\ \{ \sum_{i=1}^{n} |x^*(f_i)| \ : x^* \in B(A)'\ , \|x^*\| \leq 1\}$, luego T es A.S. con $\|T\|_{AS} \leq |m|(\Omega)$.

A la vista de estos resultados es natural preguntarse: ¿qué ocurre con un operador $T: L^p(\mu) \to F$ con $1 \leq p \leq \infty$?

Al tenerse la inclusión $j: L^\infty(\mu) \to L^p(\mu)$, si tenemos un operador $T: L^p(\mu) \to F$ que es A.S. por composición será $T \circ j: L^\infty(\mu) \to F$ A.S., luego la medida que representa a $T \circ j$ es de variación acotada, pero ésta es la medida que representa a T, así

Proposición 7 $T: L^p(\mu) \to F$ A.S. $\Rightarrow$ la medida vectorial que lo representa es de variación acotada.

El recíproco falla, un sencillo contraejemplo es el siguiente

Ejemplo 8 La identidad id: $L'[0,1] \to L'[0,1]$ no es A.S. porque todo Banach de dimensión infinita contiene series débilmente sumables que no son absolutamente sumables. Sin embargo la medida que lo representa $m: \Sigma \to L'(\mu)$ es tal que $m(E) = \chi_E$ cuya variación

$$|m|(\Omega) = \sup \sum_{E \in \pi} \|mE\| = \sup_{\pi} \mu(E) = \mu[0,1] = 1 < \infty.$$

Otro contraejemplo es el ejemplo 16 del capítulo 4

Veremos a continuación que se cumple $T: L^p(\mu) \to F$ O.S. si y sólo si $\bar{m}_q < \infty$, y que esto generaliza los resultados anteriores ya que los operadores $T: L^p(\mu) \to F$ O.S. coinciden con los A.S. en el caso $p = \infty$.

Definición Sea $1 \leq p \leq \infty$. Un operador $T: L^p(\mu) \to F$ es orden sumante, lo llamaré O.S., cuando existe $\rho \geq 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \|Tf_i\| \leq \rho \left\| \sum_{i=1}^{n} |f_i| \right\|_p$$

Equivale a decir que T aplica series de elementos positivos convergentes en series absolutamente sumables. Se define $\|T\|_{OS}$ como el ínfimo de las constantes $\rho \geq 0$ que cumplen la desigualdad de la definición.

Nótese que si $1 \leq p < \infty$ es

$$\|\sum_{i=1}^{n}|f_i|\|_p = \sup\{|\int_\Omega(\sum_{i=1}^{n}|f_i|)g\,d\mu| : g\in L^q(\mu), \|g\|_q\leq 1\} = \sup\{|\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|f_i|g\,d\mu| :$$

$$g\in L^q(\mu), \|g\|_q\leq 1\} = \sup\{\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|f_i||g|d\mu : g\in L^q(\mu), \|g\|_q\leq 1\} = \sup_{\|g\|_q\leq 1}\sum_{i=1}^{n}|\int_\Omega|f_i|gd\mu|$$

y en el caso $p=\infty$ se tiene

$\|\sum_{i=1}^{n}|f_i|\|_\infty = \sup\{|\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}|f_i|d\eta| : \eta\in(L^\infty(\mu))'\}$ que, como veremos a continuación, en la proposición 10, es igual al $\sup\{\sum_{i=1}^{n}|\int_\Omega f_i\,d\eta| : \eta\in(L^\infty(\mu))'\}$, donde recordemos que $(L^\infty(\mu))'$ = medidas escalares finitas acotadas nulos sobre los μ-nulos, con la norma de la semivariación.

Proposición 9 Todo operador $T: L^p(\mu)\to F$ A.S. es O.S.

Demostración Para $1\leq p<\infty$, si T es A.S. entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\|Tf_i\|\leq\rho.\sup_{\|g\|_q\leq 1}\sum_{i=1}^{n}|\int_\Omega f_i g\,d\mu|\leq\rho.\sup_{\|g\|_q\leq 1}|\int_\Omega(\sum_{i=1}^{n}|f_i|).|g|d\mu|\leq$$

$$\leq\rho.\sup_{\|g\|_q\leq 1}|\int_\Omega(\sum_{i=1}^{n}|f_i|).g\,d\mu| = \rho.\|\sum_{i=1}^{n}|f_i|\|_q$$

luego T es O.S. con además $\|T\|_{OS}\leq\|T\|_{AS}$.

Análogamente se haría para el caso $p=\infty$. Lo mismo vale también para el espacio $C(\Omega)$ ó $B(\Sigma)$ ó $B(A)$.

El recíproco en general no es cierto, como se ve por ejemplo con la identidad id: $L'[0,1]\to L'[0,1]$ que no es A.S. pero es O.S. como veremos más adelante (proposición 11). Otro contraejemplo es el ejemplo 16 del capítulo 4 que da un operador $T: L^2[0,1]\to C_o$ O.S. no A.S.

Proposición 10 $T: L^\infty(\mu)\to F$ es O.S. si y sólo si es A.S. Además $\|T\|_{OS}=\|T\|_{AS}$.

Demostración Sólo falta ver que O.S. $\Rightarrow$ A.S.. Si T es O.S. entonces por definición $\sum_{i=1}^{n}\|Tf_i\|\leq\rho.\|\sum_{i=1}^{n}|f_i|\|_\infty$, pero veamos ahora que

$\|\sum_{i=1}^{n}|f_i|\|_\infty = \sup_{|\varepsilon_1|=\ldots=|\varepsilon_n|=1} \|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i\|_\infty$. En efecto, por un lado es

$\sup_{|\varepsilon_1|=\ldots=|\varepsilon_n|=1} \|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i\|_\infty \le \|\sum_{i=1}^{n}|f_i|\|_\infty$, por otra parte si $f \in L^\infty(\mu)$ entonces

$\|f\|_\infty = \inf_{\substack{E\in\Sigma\\ \mu(E)=0}} \sup_{t\in\Omega\setminus E}|f(t)|$, luego si llamo $\alpha_E = \sup_{t\in\Omega\setminus E}\sum_{i=1}^{n}|f_i(t)|$, como que

$|f_i(t)| = \varepsilon_i(t)\ f_i(t)$ para ciertas funciones $\varepsilon_i(t)$ de módulo 1, dado $\delta_1 > 0$ $\exists\ t_0 \in \Omega\setminus E$ tal que si llamo $\varepsilon_i = \varepsilon_i(t_0)$ es $\alpha_E \le \sup_{t\in\Omega\setminus E}|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i(t)| + \delta$,

y como que dado $\delta_2 > 0$ $\exists E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ tal que $\|f\|_\infty \le \alpha_E - \delta_2$ ya está,

luego tenemos

$$\sum_{i=1}^{n}\|Tf_i\| \le \rho \sup_{|\varepsilon_1|=\ldots=|\varepsilon_n|=1}\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i\|_\infty = \rho.\sup_{|\varepsilon_i|=1}\sup\{|\int_\Omega(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i)\,d\delta| : \delta\in L^\infty(\mu)', |\delta|\le 1\} =$$

$$= \rho \sup_{|\delta|\le 1}\sup_{|\varepsilon_i|=1}|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\int_\Omega f_i\,d\delta| = \rho\sup_{|\delta|\le 1}\sum_{i=1}^{n}|\int_\Omega f_i\,d\delta|$$

es decir que T es A.S. con $\|T\|_{AS} \le \rho$

La proposición sigue siendo válida si en vez de $L^\infty(\mu)$ partimos de $C(\Omega)$ ó de $B(\Sigma)$ ó de $B(A)$. Para estos casos puede utilizarse la misma demostración anterior con las obvias modificaciones.

Sea como siempre μ medida positiva, Σ σ-álgebra y (Ω,Σ,μ) espacio de medida finita. Sea $1\le p\le\infty$, q conjugado de p.

<u>Proposición 11</u> Un operador $T: L^p(\mu) \to F$ es O.S. si y sólo si la medida que lo representa $m: \Sigma \to F$ es de q-variación $\bar{m}_q$ acotada. En tal caso $\|T\|_{OS} = \bar{m}_q$.

<u>Demostración</u> Sea el caso $1 < p < \infty$

$\Rightarrow$ Si $T: L^p(\mu) \mapsto F$ es O.S. entonces $\bar{m}_q = \sup_{\|s\|_p\le 1}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|.\|mE_i\| =$

$$= \sup_{\|s\|_p\le 1}\sum_{i=1}^{n}\|T(\alpha_i\chi_{E_i})\| \le \sup_{\|s\|_p\le 1}\|T\|_{OS}.\|\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i\chi_{E_i}|\|_p =$$

$= \sup\limits_{\|s\|_p \leq 1} \|T\|_{OS} \cdot \|s\|_p = \|T\|_{OS}$ en donde hemos utilizado la definición de operador O.S., luego $\bar{m}_q < \infty$ con $\bar{m}_q \leq \|T\|_{OS}$.

$\Leftarrow$ Por otro lado si tenemos una medida $m: \Sigma \to F$ con $\bar{m}_q < \infty$, al ser $\tilde{m}_q \leq \bar{m}_q < \infty$, m representa un operador $T: L^p(\mu) \to F$ dado por $Tf = \int_\Omega f\, dm$ $\forall f \in L^p(\mu)$ y con $\|T\| = \tilde{m}_q$. Veamos que T es O.S., en efecto

$$\sum_{i=1}^n \|Tf_i\| = \sum_{i=1}^n \left\| \int_\Omega f_i \, dm \right\| \leq \sum_{i=1}^n \int_\Omega |f_i| d|m| = \int_\Omega \sum_{i=1}^n |f_i| d|m| \leq \bar{m}_q \cdot \left\| \sum_{i=1}^n |f_i| \right\|_p$$

ya que como sabemos $\int |f_i| d|m| \leq \bar{m}_q \cdot \|f_i\|_p$.

El caso $p = 1$ sale igual poniendo $\bar{m}_\infty = \sup\limits_{B \in \Sigma} \frac{\|mB\|}{\mu(B)}$, pero como que $\bar{m}_\infty = \tilde{m}_\infty$ resulta que todo operador $T: L^1(\mu) \to F$ es O.S.

El caso $p = \infty$ ya está visto pues en este caso O.S. es lo mismo que A.S. y también $\bar{m}_1 = |m|$, véase proposición 3.

Con esto hemos resuelto la cuestión que nos habíamos planteado. Ahora para saber si un operador $T: L^p(\mu) \to F$ es O.S. bastará con calcular $\bar{m}_q$.

<u>Ejemplo 12</u> La inclusión natural $j: L^p(\mu) \to L^1(\mu)$ es O.S.

<u>Demostración</u> En efecto, la medida que la representa es $m: \Sigma \to L^1(\mu)$ dada por $m(E) = \chi_E$ $\forall E \in \Sigma$, luego

$$\bar{m}_q = \sup_{\|s\|_p \leq 1} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot \|mE_i\|_{L^1(\mu)} = \sup_{\|s\|_p \leq 1} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \mu(E_i) = \sup_{\|s\|_p \leq 1} \|s\|_{L^1(\mu)} = \mu(\Omega)^{1/q} < \infty$$

<u>Ejemplo 13</u> Si $1 < p \leq r$ la inclusión $j: L^r(\mu) \to L^p(\mu)$ <u>no</u> es O.S.

<u>Demostración</u> En efecto, podemos suponer sin perder generalidad que $\mu(\Omega) = 1$, ahora dividimos Ω en n trozos A_n cada uno de medida $\frac{1}{n}$ (se supone que esto se puede hacer), luego

$$\bar{m}_q = \sup_{\|s\|_r \leq 1} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot \|mE_i\|_{L^p(\mu)} = \sup_{\|s\|_r \leq 1} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \mu(E_i)^{1/p} \quad \text{donde } s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i},$$

tomando en particular $s = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$ es $\|s\|_r = \mu(\Omega)^{1/r} = 1$ pero $\sum_{i=1}^{n} (A_i)^{1/p} = n \cdot \frac{1}{n^{1/p}} = \frac{1}{n^{1/p-1}}$ que diverge para $p > 1$ de donde $\bar{m}_q = \infty$.

<u>Proposición 14</u> $T: L^p(\mu) \to F$ es O.S. si y sólo si existe λ medida positiva de q-variación acotada y un operador $S: L'(\lambda) \to F$ de manera que sea conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} L^p(\mu) \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "J"'] & & F \\ & L'(\lambda) \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

donde J es la inclusión natural. En tal caso λ y S pueden elegirse de modo que $\bar{\lambda}_q = \|T\|_{OS}$ y $\|S\| \leq 1$.

<u>Demostración</u> Si T es O.S. la medida m que lo representa será de q-variación acotada, luego es de variación acotada. Definimos $S: L'(|m|) \to F$ por $S(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(E_i)$ si f es simple de la forma $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, S está bien definida y es continua sobre las funciones simples pues

$$\|S(f)\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m(E_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \|mE_i\| = \|f\|_{L'(|m|)}$$

luego por densidad podemos extenderla a todo $L'(|m|)$ con $\|S\| \leq 1$.

Por otro lado, como que $\int_\Omega |f|\, d|m| \leq \bar{m}_q \cdot \|f\|_p$, la inclusión $J: L^p(\mu) \to L'(|m|)$ es continua y es $T = S \circ J$, de donde obtenemos la factorización buscada.

Para el recíproco es suficiente con ver que $J: L^p(\mu) \to L'(\lambda)$ es O.S., lo cual es completamente análogo al ejemplo 12.

Como consecuencia de la proposición obtenemos la siguiente definición de operador O.S.

Proposición 15 $T: L^p(\mu) \to F$ es O.S. si y sólo si existe $\lambda:\Sigma \to \mathbb{R}^+$ con $\bar{\lambda}_q < \infty$ tal que

$$\|Tf\| \leq c. \int_\Omega |f(t)|\, d\lambda(t)$$

Demostración Si T es O.S. por la factorización de la proposición 14 será $\|Tf\| = \|J \circ R(f)\| \leq C\|s(f)\| \leq C\|s\|.\|f\|_{L^1(\lambda)} \leq C\|f\|_{L^1(\lambda)}$ y ya está.

Recíprocamente, definimos $S(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\chi_{E_i})$ cuando f es simple de la forma $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$. Como que por hipótesis $\|s(f)\| \leq c.\|f\|_{L^1(\lambda)}$ será $S: L^1(\lambda) \to F$ acotada, y al ser $\bar{\lambda}_q < \infty$ será $\int_\Omega |f|\, d\lambda \leq \bar{\lambda}_q.\|f\|_p$ y por tanto la inclusión $J: L^p(\mu) \to L^1(\lambda)$ es continua. Luego se comprueba que $T = S \circ J$ y se aplica la proposición 14.

CAPITULO 3

OPERADORES CON NUCLEO INTEGRAL

3.1 Integral de Bochner e integral de Pettis

Vamos aresumir brevemente a continuación algunas de las definiciones y propiedades más interesantes de la integración de una función vect· ial por una medida escalar.

Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y F un espacio de Banach una función $f:\Omega \to F$ se llama simple cuando existen $x_1,\dots,x_n$ de F y $E_1,\dots E_n$ de Σ tales que $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$. Una función $f:\Omega \to F$ es μ-medible si existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples tales que $\lim_n \|s_n - f\|_F = 0$ μ-c.p.t. Una función $f:\Omega \to F$ se llama débilmente μ-medible si para toda x^* de F^* la función escalar x^*f es μ-medible. La suma, producto por escalar y límites puntuales μ-c.p.t de funciones medibles ó débilmente medibles son de la misma clase y muchas de la propiedades del caso escalar siguen siendo ciertos en el caso vectorial, por ejemplo se cumple también el teorema de Egoroff. Se demuestra que una función $f:\Omega \to F$ es μ-medible si y sólo si es débilmente μ-medible y tiene rango esencialmente separable, es decir que salvo en un conjunto de μ-medida nula el rango de f es separable en F.

Una función μ-medible $f:\Omega \to F$ se dice que es Bochner integrable cuando existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples tales que $\lim_n \int_\Omega \|s_n - f\| d\mu = 0$. En tal caso se define la integral de Bochner de f sobre cada E de Σ por $\int_E f\,d\mu = \lim_n \int_E S_n\,d\mu$ en donde es $\int_E s_n\,d\mu = \sum_{i=1}^{m} x_i \mu(E \cap E_i)$ si es $s_n = \sum_{i=1}^{m} x_i \chi_{E_i}$.

Se demuestra que una función $f:\Omega \to F$ es Bochner-integrable si y sólo si $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$ y para la integral de Bochner se cumple el teorema de la convergencia dominada: Sea (Ω,Σ,μ) espacio de medida finita y $f_n:\Omega \to F$ una sucesión de funciones Bochner integrables tales que $f_n \to f$ puntualmente μ-c.p.t., si existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $\|f_n\| \leq g$ μ-c.p.t. entonces f es Bochner integrable y $\lim_n \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ $\forall E$ de Σ.

Análogamente al caso escalar, se definen el espacio $L^p(\mu,F)$ para $1 \leq p < \infty$ como el conjunto de las funciones μ-medibles $f:\Omega \to F$ tales que $\|f\|_F^p \in L^1(\mu)$, con la norma $\|f\|_p = (\int_\Omega \|f\|_F^p d\mu)^{1/p}$, y forman un espacio de Banach. $L^\infty(\mu,F)$ es el espacio de Banach de las funciones μ-medibles $f:\Omega \to F$ que están acotadas excepto en un conjunto de medida nula, con la norma $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{\|f(\omega)\| : \omega$ de $\Omega\}$.

Si una función sólo es débilmente μ-medible no puede definirse su integral de Bochner, para ella se define la llamada integral de Pettis. Para ello se tiene: si una función $f:\Omega \to F$ débilmente μ-medible es tal que x^*f pertenece a $L^1(\mu)$ para todo x^* de F^*, entonces, para todo E de Σ existe x_E^{**} de F^{**} tal que $x_E^{**}(x^*) = \int_E x^*f\, d\mu$ (x^* de F^*); si resulta ser x_E^{**} de F para todo E de Σ entonces se dice que f es Pettis integrable y al elemento x_E^{**} de F se le llama la integral de Pettis de f sobre E de Σ, empleándose la notación Pettis-$\int_E f\, d\mu$ para representar a x_E^{**}

Naturalmente existen ejemplos y contraejemplos de todos los tipos para las integrales y funciones indicadas aquí. Para una exposición más general y detallada véase Diestel-Uhl (5) capítulo II.

En el comienzo de este trabajo hemos asociado a algunos operadores entre espacios de Banach medidas vectoriales que los representan. Si tales medidas se pudieran escribir como una cierta integral de una función vectorial por una medida escalar, entonces los operadores representados tendrían una expresión elegante y sencilla. Por eso es importante ver cómo y en qué condiciones ello es posible. Dicho en otras palabras, se trata de estudiar cómo es el teorema de representación de Riesz y el teorema de Radón-Nikodym en el caso vectorial.

3.2 Propiedad de Radón-Nikodym (PRN)

Sea (Ω,Σ,μ) espacio de medida finita

Definición Un espacio de Banach F se dice que tiene la propiedad de Radón-Nikodym (PRN) con respecto a (Ω,Σ,μ) si para cada medida vectorial $m:\Sigma \to F$ μ-continua de variación acotada, existe g de $L'(\mu,F)$ tal que $m(E)=\int_E g\,d\mu$ para todo E de Σ.

Se dice simplemente que F tiene la PRN si F tiene la PRN con respecto a cada espacio de medida finita.

El teorema de Radon-Nikodym para medidas escalares nos dice que si F es el cuerpo de escalares entonces F tiene la PRN y ejemplos de espacios con la PRN son los reflexivos y los duales separables. No todos los Banach tienen la PRN, así por ejemplo c_0, como no, no tiene la PRN:

$m:\Sigma \to c_0$ definida por $m(E)=(\int_E \cos nt\,dt)_{n=1}^{\infty}$ (E de Σ), donde Σ son los Lebesgue medibles de $[0,1]$, es una medida vectorial que toma valores en c_0 (lema de Reimann-Lebesgue), sin embargo si existiera $g\in L'(dt,c_0)$ tal que $m(E)=\int_E g\,dt$, debería ser $g(t)=(\cos nt)_{n=1}^{\infty}$ que claramente no toma valores en c_0. Luego c_0 no tiene la PRN.

Sea $1\le p\le\infty$ y q tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Definición Un operador $T: L^p(\mu)\to F$ se dice que es Riesz-representable si existe g de $L^q(\mu,F)$ tal que

$$Tf=\int_\Omega fg\,d\mu \qquad (f \text{ de } L^p(\mu))$$

Nótese que es un operador que está bien definido ya que, si es g de $L^q(\mu,F)$, se cumple $\|Tf\|_F=\|\int_\Omega fg\,d\mu\|_F\le\int_\Omega |f|\cdot\|g\|_F\,d\mu\le\|f\|_p\cdot\|g\|_q$, luego T es un operador continuo sobre $L^p(\mu)$ con $\|T\|\le\|g\|_q$.

Lema 1 si $m(E)=\int_E g\,d\mu$ con $g\in L^q(\mu,F)$ entonces es $\bar{m}_q=\|g\|_q$

Demostración caso $q<\infty$, por un lado se tiene $\bar{m}_q=\sup\limits_{\|s\|_p\le 1}\sum\limits_{i=1}^n|\alpha_i|\|mE_i\|=$

$$=\sup_{\|s\|_p\le 1}\sum_{i=1}^n|\alpha_i|.\left\|\int_E g\,d\mu\right\|\le\sup_{\|s\|_p\le 1}\sum_{i=1}^n|\alpha_i|\int_{E_i}\|g\|d\mu=$$

$$=\sup_{\|s\|_p\le 1}\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^n|\alpha_i|.\chi_{E_i}\Big)\|g\|\,d\mu\le\|g\|_q$$ y por otra parte

$$\|g\|_q=\sup_{\|f\|_p\le 1}\left|\int_\Omega f\|g\|d\mu\right|\le\sup_{\|f\|_p\le 1}\int_\Omega|f|.\|g\|\,d\mu=\sup_{\|f\|_p\le 1}\int_\Omega|f|\,d|m|\le$$

$\le\sup\limits_{\|f\|_p\le 1}\bar{m}_q.\|f\|_p=\bar{m}_q$ ya que es $|m|(E)=\int_E\|g\|\,d\mu$(Diestel-Uhl (5) pág. 46)

caso $q=\infty$, $$\bar{m}_\infty=\sup_{B\subset\Omega}\frac{\|mB\|}{\mu(B)}=\sup_{B\subset\Omega}\frac{\left\|\int_B g\,d\mu\right\|}{\mu(B)}\le\sup_{B\subset\Omega}\frac{\|g\|_\infty\mu(B)}{\mu(B)}=\|g\|_\infty$$

lo que prueba la desigualdad en un sentido, ahora de $\int_E\|g\|\,d\mu\le\bar{m}_\infty\mu(E)$ resulta $\|g\|\le\bar{m}_\infty$ c.p.t., luego $\|g\|_\infty\le\bar{m}_\infty$

Proposición 2 Sea $T: L^p(\mu)\to F$, si se define $m:\Sigma\to F$ por $m(E)=T(\chi_E)$ (E de Σ) entonces T es Riesz-representable si y sólo si existe $g\in L^q(\mu,F)$ tal que $m(E)=\int_E g\,d\mu$ (E de Σ). En tal caso $Tf=\int_\Omega fg\,d\mu$ para todo $f\in L^p(\mu)$. Además $\|T\|\le\bar{m}_q=\|g\|_q$.

Demostración Si T es Riesz-representable, existe g de $L^q(\mu,F)$ tal que $Tf=\int_\Omega fg\,d\mu$ (f de $L^p(\mu)$); luego, si es E de Σ,

$$m(E)=T(\chi_E)=\int_\Omega\chi_E g\,d\mu=\int_E g\,d\mu$$

Recíprocamente, si es $m(E)=\int_E g\,d\mu$ (E de Σ) y si $s=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i\chi_{E_i}$ es una función simple será

$$T(s)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\,T(\chi_{E_i})=\sum_{i=1}^n\alpha_i\,m(E_i)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_{E_i}g\,d\mu=\int_\Omega sg\,d\mu.$$

Si ahora defino $R(f) = \int_\Omega fg\,d\mu$ (f de $L^p(\mu)$), R será continuo al ser g de $L^q(\mu,F)$, así tenemos dos operadores R y T continuos que coinciden sobre las funciones simples, luego coinciden sobre $L^p(\mu)$ y por ello tenemos $Tf = \int_\Omega fg\,d\mu$ (f de $L^p(\mu)$) de donde resulta $\|T\| \leq \|g\|_q$ y es $\bar{m}_q = \|g\|_q$ por el lema 1.

La norma del operador $T: L^p(\mu) \to F$ Riesz-representable con núcleo g cumple $\|T\| \leq \|g\|_q$. Puede ser la desigualdad estricta? Si $p = 1$ entonces hay igualdad puesto que $\|T\| = \tilde{m}_\infty = \bar{m}_\infty = \|g\|_\infty$. Sin embargo puede ser estricta si $p > 1$ como se ve en el ejemplo 3.

Recordemos que dada $m: \Sigma \to F$ entonces $\tilde{m}_q = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \overline{x^*m}_q$ (véase(7) pág.10), si es $m(E) = \int_E g\,d\mu$ con g de $L^q(\mu,F)$, será $x^*m(E) = \int_E x^*g\,d\mu$ para todo x^* de F^*, luego $\overline{x^*m}_q = (\int_E |x^*g|^q\,d\mu)^{1/q}$ y por tanto

$$\tilde{m}_q^q = \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \text{ de } F^*}} \int_\Omega |x^*g(t)|^q\,d\mu(t) \underset{(a)}{=} \int_\Omega \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^*g(t)|^q\,d\mu(t) \leq$$

$$\underset{(b)}{\leq} \int_\Omega \sup_{\substack{\|x^*(t)\| \leq 1 \\ x^*(t): \Omega \to F^*}} |x^*(t)g(t)|^q\,d\mu(t) = \int_\Omega \|g(t)\|^q\,d\mu(t) = \bar{m}_q^q$$

en donde hemos aplicado el teorema de la convergencia monótona para pasar el supremo dentro de la integral y en donde en (a) x^* de F^* son constantes y en (b) $x^*(t)$ son funciones de Ω a la bola unidad de F^*.

Con esto puede tomarse pues ya una idea de como funcionan estas desigualdades.

<u>Ejemplo 3</u> en el que $\|T\| < \|g\|_q$

Sea $\Omega = [0,1]$ con la medida de Lebesgue dt y sea $T: L^p[0,1] \to c_0$ definido por $Tf = \int_0^1 fg\,dt \quad \forall f \in L^p[0,1]$, en donde $g: \Omega \to c_0$ está dada por $g(t) = x_1\chi_E(t) + x_2\chi_{E_2}(t)$ con $E_1 = [0,1/2]$, $E_2 = (1/2,1]$

$$x_1 = (a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad a_n = \begin{cases} 1/n & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

$$x_2 = (b_n)_{n=1}^{\infty} \qquad b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 1/n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

así x_1, x_2 de c_0 con $\|x_1\|_{c_0} = \sup\limits_{n \geq 1} |a_n| = 1$, $\|x_2\|_{c_0} = \sup\limits_{n \geq 1} |b_n| = \frac{1}{2}$

luego si $q < \infty$ $\|g\|_q^q = \int_0^1 (\|x_1\|^q \chi_{E_1}(t) + \|x_2\|^q \chi_{E_2}(t))\, dt = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^q . \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{q+1}}$,

sin embargo si x^* de $c_0^* = l'$ es $x^* = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ será $\|x^*\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ y

$x^*(x_1) = \sum\limits_{n \text{ impar}} \frac{\alpha n}{n}$, $x^*(x_2) = \sum\limits_{n \text{ par}} \frac{\alpha n}{n}$, luego

$$\|T\| = \tilde{m}_q^q = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \int_0^1 |x^* g(t)|^q \, dt = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \int_0^1 |x^*(x_1)\chi_{E_1} + x^*(x_2)\chi_{E_2}|^q \, dt =$$

$$= \sup \{ \int_0^1 (\sum_{n \text{ impar}} \frac{\alpha n}{n})^q \chi_{E_1}(t) + (\sum_{n \text{ par}} \frac{\alpha n}{n})^q \chi_{E_2}(t) \; : \; (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in l' \text{ con } \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \leq 1 \} =$$

$$= \sup \{ \frac{1}{2} \sum_{n \text{ impar}} (\frac{\alpha n}{n})^q + \frac{1}{2} \sum_{n \text{ par}} (\frac{\alpha n}{n})^q : \Sigma |\alpha_n| \leq 1 \} = \frac{1}{2} \sup \{ \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\alpha n}{n})^q : \Sigma |\alpha_n| \leq 1 \} = \frac{1}{2}$$

<u>Definición</u> Se dice que F tiene la q-PRN respecto de (Ω, Σ, μ) si para cada medida vectorial $m : \Sigma \to F$ μ-continua de q-variación $\bar{m}_q$ acotada, existe g de $L^q(\mu, F)$ tal $m(E) = \int_E g \, d\mu$.

<u>Proposición 4</u> Son equivalentes, para $1 \leq p \leq \infty$

(a) F tiene la PRN respecto (Ω, Σ, μ).

(b) F tiene la q-PRN respecto de (Ω, Σ, μ).

(c) todo operador T: $L'(\mu) \to F$ es Riesz-representable.

(d) todo operador T: $L^p(\mu) \to F$ cuya medida que lo representa cumpla $\bar{m}_q < +\infty$ es Riesz-representable.

Demostración (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $m:\Sigma \to F$ μ-continua tal que $\bar{m}_q < +\infty$, entonces $|m| \leq \bar{m}_q \cdot \mu(\Omega)^{1-1/q} < +\infty$, al tener F la PRN, existe g de $L'(\mu,F)$ tal que $m(E) = \int_E g\,d\mu$ pero además es g de $L^q(\mu,F)$ pues por hipótesis $\|g\|_q = \bar{m}_q < +\infty$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Dado $T:L'(\mu) \to F$ sea $m:\Sigma \to F$ definida por $m(E) = T(\chi_E)$, como que m representa a T será $\bar{m}_\infty = \tilde{m}_\infty = \|T\| < +\infty$, luego $\bar{m}_q \leq \mu(\Omega)^{1/q} \cdot \bar{m}_\infty < +\infty$ y además es m μ-continua, como que F tiene la q-PRN, existe g de $L^q(\mu,F) \subset$ $\subset L'(\mu,F)$ tal que $m(E) = \int_E g\,d\mu$, de donde $\bar{m}_\infty = \|g\|_\infty$ y por tanto T es Riesz-representable.

(c) $\Rightarrow$ (a) véase Diestel-Uhl (5) pág. 63.

(a) $\Rightarrow$ (d) Sea $T: L^p(\mu) \to F$ con $\bar{m}_q < +\infty$, luego al ser $|m| \leq \mu(\Omega)^{1-1/q} \cdot \bar{m}_q$ m es de variación acotada y será además μ-continua porque representa a T, como que F tiene la PRN, existe g de $L'(\mu,F)$ con $m(E) = \int_E g\,d\mu$, luego $g \in L^q(\mu,F)$ pues $\|g\|_q = \bar{m}_q$, de donde T es Riesz-representable.

(d) $\Rightarrow$ (c) Sea $T: L'(\mu) \to F$, considero el diagrama commutativo

$$\begin{tikzcd} L'(\mu) \arrow[r, "T"] & F \\ L^p(\mu) \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$$

donde $j: L^p(\mu) \to L'(\mu)$ es la inclusión natural, la medida que representa a T es tal que $\tilde{m}_\infty = \bar{m}_\infty = \|T\| < \infty$ luego $\bar{m}_q < \infty$, pero m es también la medida que representa a R, luego por (d) será $R(f) = \int_\Omega fg\,d\mu$ con $g \in L^q(\mu,F)$, pero ahora es $m(E) = \int_E g\,d\mu$ y por tanto $\bar{m} = \|g\|_\infty$, de donde T es Riesz-representable.

La hipótesis en (d) de que $\bar{m}_q < +\infty$ no puede ser quitada como se ve en el siguiente ejemplo, ya que si $1 < p < \infty$ $L^p(\mu)$ tiene la PRN por ser reflexivo.

Ejemplo 5 de un operador $T: L^p[0,1] \to L^p[0,1]$ que no es Riesz-representable.

Sea $1 < p < \infty$ y sea la identidad id: $L^p[0,1] \to L^p[0,1]$, $L^p[0,1]$ aquí es el usual con μ la medida de Lebesgue sobre los Lebesgue medibles de $[0,1]$.

La medida que lo representa será $m:\Sigma \to L^p[0,1]$ dada por $m(E) = T(\chi_E) = \chi_E$.

Veamos que m es de variación infinita sobre cada medible E con $\mu(E) > 0$; en efecto, dividamos E en n_o trozos E_i de Σ disjuntos dos a dos de medida $\mu(E_i) = \frac{\mu(E)}{n}$, luego $\sum_{i=1}^{n} \|mE_i\| = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)^{1/p} = \mu(E)^{1/p} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1/n^{1/p}$ que al ser $p > 1$ se hace tan grande como queramos, luego, por definición de variación, es $|m|(E) = \infty$.

Por ello no puede existir ninguna $g:[0,1] \to L^p[0,1]$ medible tal que sea $Tf = \int_0^1 fg\, d\mu$ ni incluso que sea $Tf = \text{Pettis-}\int_0^1 fg\, d\mu$ ya que de ser así sería $m(E) = \text{Pettis-}\int_E g\, d\mu$ y por tanto todo conjunto E_I de Σ con $\mu(E_1) > 0$ contiene un E_2 de Σ con $\mu(E_2) > 0$ tal que $|m|(E_2) < +\infty$, contradicción (véase capítulo 3 § 2 Diestel-Uhl (5)).

Nótese que al ser $|m|(\Omega) = \infty$ será $\bar{m}_q(\Omega) = \infty$, luego aquí tenemos un ejemplo de una medida que cumple $\tilde{m}_q < +\infty$ pero $\bar{m}_q = +\infty$.

Sea $1 \leq p \leq \infty$, q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

<u>Proposición 6</u> F tiene la PRN con respecto a (Ω,Σ,μ) si y sólo si todo operador $T: L^p(\mu) \to F$ con $\bar{m}_q < \infty$ factoriza

$$\begin{array}{ccc} L^p(\mu) & \xrightarrow{T} & F \\ & S \searrow \quad \nearrow R & \\ & l' & \end{array}$$

con S Riesz representable. En tal caso para todo $\epsilon > 0$, S y R pueden tomarse de modo que $\|S\| \leq \bar{m}_q + \epsilon$ y $\|R\| \leq 1$.

<u>Demostración</u>

$\Leftarrow$ Si $S: L^p(\mu) \to l'$ es Riesz-representable es que existe g de $L^q(\mu, l')$ tal que $S(f) = \int_\Omega fg\, d\mu$, considero la función $R \circ g:\Omega \to F$ que será de $L^q(\mu,F)$ puesto que $\|R\circ g\|_q = \left(\int \|R\circ g\|_F^q\, d\mu\right)^{1/q} \leq \|R\|.\|g\|_q$, luego por el teorema de Hille (véase página 47 Diestel-Uhl (5)) será $T(f) = R \circ S(f) = \int_\Omega f.R\circ g\, d\mu$, es decir que todo operador $T: L^p(\mu) \to F$ con $\bar{m}_q < \infty$ es Riesz-representable, luego F tiene la PRN.

$\Rightarrow$ Como que F tiene la PRN y es $\bar{m}_q < \infty$, existe h de $L^q(\mu,F)$ con $TF = \int_\Omega hf\,d\mu$ (f de $L^p(\mu)$). Sea $\varepsilon > 0$. Por el corolario 3 de la pág. 42 de Diestel-Uhl (5) existe una sucesión (f_n) de funciones μ-medibles de rango numerable tales que $\|h-f_n\|_\infty \leq \varepsilon/2^n$, poniendo $h_1 = f_1$ y $h_n = f_n - f_{n-1}$ si $n \geq 2$, se tiene $\|h - \sum_{j=1}^{n} gj\|_\infty \leq \varepsilon/2^n$, escribamos $h_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{n,k}\chi_{E_{n,k}}$ donde $\{E_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ son elementos de Σ disjuntos dos a dos, definimos $S: L^p(\mu) \to 1'(N\times N)$ por $S(f) = \{\|x_{n,k}\| \int_{E_{n,k}} f\,d\mu\}_{n,k=1}^{\infty}$, que es lineal y acotada pues

$$\|S(f)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n,k}\| \int_{E_{n,k}} |f|\,d\mu = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n,k}\| \cdot \chi_{E_{n,k}} |f|\,d\mu \leq$$

$$\leq \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n,k}\| \cdot \chi_{E_{n,k}} \Big\|_q \cdot \|f\|_p$$

pero como que $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n,k}\| \chi_{E_{n,k}}(t) \leq \|h_1(t)\| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \|h_1(t)\| + \varepsilon/2$ resulta que $\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n,k}\| \chi_{E_{n,k}} \|_q \leq \|h_1\|_q + \varepsilon/2\ \mu(\Omega)^{1/q}$ y como que $\|h_1\|_q \leq \|h-h_1\|_q + \|h\|_q \leq \varepsilon/2\ \mu(\Omega)^{1/q} + \bar{m}_q$ queda finalmente

$\|S(f)\| \leq (\bar{m}_q + \varepsilon\mu(\Omega)^{1/q}) . \|f\|_p$.

Queremos probar ahora que S es Riesz-representable. Para ello podemos proceder de dos maneras, una es comprobar que la medida que representa a S cumple $\bar{n}_q < \infty$ y al tener 1' la PRN será S Riesz-representable. La otra manera es encontrar directamente la forma integral de S, que es lo que vamos a hacer:

Sea $g:\Omega \to 1'$ definida por $g(t) = \{\|x_{n,k}\| \chi_{E_{n,k}}(t)\}_{n,k=1}^{\infty}$. Entonces g pertenece a $L^q(\mu,1')$ porque $\|g\|_q = (\int_\Omega \| \|x_{n,k}\| \chi_{E_{n,k}}(t)\|_{1'}^q\, d\mu(t))^{1/q} =$

$= (\int_\Omega (\sum_{n,k} \|x_{n,k}\| \chi_{E_{n,k}}(t))^q\, d\mu(t))^{1/q}$ que como hemos probado antes es $\|g\|_q \leq \bar{m}_q + \varepsilon\mu(\Omega)^{1/q} < +\infty$.

Luego $S(f) = \{\|x_{n,k}\| \int_{E_{n,k}} f d\mu\} = \int_\Omega fg\, d\mu$ (f de $L^p(\mu)$) ya que ambos miembros son dos operadores continuos sobre $L^p(\mu)$ que coinciden sobre las funciones simples. Así S es Riesz-representable con núcleo integral g de $L^q(\mu,F)$.

Ahora, para acabar la factorización, definimos $R: l'(N\times N) \to F$ por $R(\{\alpha_{n,k}\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n,k} \frac{x_{n,k}}{\|x_{n,k}\|}$ si $\{\alpha_{n,k}\} \in l'(N\times N)$. Claramente $\|R\| \leq 1$ y si $f \in L^p(\mu)$ será

$$RS(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\|x_{n,k}\| \int_{E_{n,k}} f d\mu) \frac{x_{n,k}}{\|x_{n,k}\|} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f h_n\, d\mu = \int_\Omega fh\, d\mu$$

en donde hemos aplicado el teorema de la convergencia dominada.

Notas 1) Este resultado podría haberse enunciado en forma más general aprovechando el hecho de que l' tiene la PRN: "F tiene la PRN respecto de (Ω,Σ,μ) si y sólo si todo operador $T: L^p(\mu) \to F$ con $\bar{m}_q < +\infty$ factoriza de la forma

$$\begin{array}{ccc} L^p(\mu) & \xrightarrow{T} & F \\ & S \searrow \quad \nearrow R & \\ & l' & \end{array}$$

donde la medida n que representa a S verifica $\bar{n}_q < +\infty$"

2) El caso más interesante es cuando $p = 1$ ya que en tal caso siempre es $\bar{m}_\infty < +\infty$ y $\bar{n}_\infty < +\infty$, es el llamado teorema de Lewis-Stagall (véase Diestel-Uhl (5) pág. 66).

3) Como que todo operador Riesz-representable es O.S. tendrá la factorización

$$\begin{array}{ccc} L^p(\mu) & \xrightarrow{T} & F \\ & R \searrow \quad \nearrow S & \\ & L'(|m|) & \end{array}$$

en donde m es la medida que representa a T, análogamente a la proposición

6 puede demostrarse que T es Riesz-representable si y sólo si T lo es, luego podríamos anunciar: "F tiene la PRN si y sólo si todo operador T: $L^p(\mu) \to F$ con $\bar{m}_q < +\infty$ factoriza en la forma anterior con S Riesz-representable".

4) Análogamente si T: $L^p(\mu) \to F$ es Riesz-representable entonces existe $h \in L^q(\mu,F)$ con $Tf = \int_\Omega hf\,d\mu$, luego T factoriza por

$$\begin{tikzcd} L^p(\mu) \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "R"'] & & F \\ & L'(\mu,F) \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

donde R está definido por $R(f) = f.h$ con $\|R\| \leq \|h\|_q$ y S está definida por $S(g) = \int_\Omega g\,d\mu$, siendo $\|S\| \leq 1$, luego será también T Riesz-representable si y sólo si S lo es y podría decirse algo parecido a 3). De hecho esta construcción da la factorización

$$\begin{tikzcd} L^p(\mu) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & F \\ L'(\mu,F) \arrow[r, "J"] & L'(|m|) \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

donde J es la inclusión natural y aquí T es Riesz-representable si y sólo si S lo es.

5) Como que F tiene la PRN si y sólo si F tiene la PRN respecto de los Lebesgue medibles de [0,1] con la medida de Lebesgue en [0,1], véase Chattergi, S.D. (3), sustituyendo $L^p(\mu)$ por $L^p[0,1]$ en los anteriores resultados nos dará la equivalencia de tener F la PRN en vez de tenerla únicamente respecto de (Ω,Σ,μ).

3.3 Operadores Riesz-representables y operadores O.S.

Recordemos que los operadores O.S. están caracterizados por tener la medida que los representa con q-variación acotada.

Sea $1 \leq p \leq \infty$

Proposición 7 Todo operador $T: L^p(\mu) \to F$ Riesz-representable es O.S.

Demostración Si g es el núcleo integral de T entonces $\|T\|_{OS} = \bar{m}_q = \|g\|_q < +\infty$
Si $p=\infty$ el recíproco es cierto ya que en este caso O.S. coincide con ser A.S. Sin embargo si $p \neq \infty$ el recíproco falla, como se ve en el siguiente

Ejemplo 8 Sea $p<\infty$ y $T: L^p[0,1] \to c_0$ tal que $Tf = (\hat{f}(n))_{n=1}^{\infty}$ donde $\hat{f}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i t} f(t)dt$ es el n-ésimo coeficiente de Fourier de f. El lema de Riemann-Lebesgue asegura que Tf pertenece a c_0 y además es $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1 \leq \leq \|f\|_p$, luego es $\|Tf\|_{c_0} \leq \|f\|_p$ lo que nos dice que T es continuo.

La medida que representa a T será $m(E) = T\chi_E = (\int_E e^{-2\pi int}dt)$, luego $\|m(E)\| = \sup |\int_E e^{-2\pi int}dt| \leq \mu(E)$ y por tanto $\bar{m}_q = \sup_{\|s\|_p \leq 1} \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.\|mE_i\| \leq$

$\leq \sup_{\|s\|_p \leq 1} \|s\|_1 \leq 1 < \infty$ de donde T es O.S.

Sin embargo T no es Riesz-representable, pues si existiera h de $L^q(\mu,c_0)$ tal que $m(E) = \int_E h(t)dt$ debería ser necesariamente $h(t) = (h_1(t),\ldots,h_n(t),\ldots)$ con $h_n(t) = e^{-2\pi int}$ cpt y al ser $|e^{-2\pi int}| = 1$ h no tomaría valores en c_0.

En este ejemplo ha jugado un papel esencial el hecho de que c_0 no tenga la PRN. Ello no es una casualidad:

Sea $1 \leq p \leq \infty$

Proposición 9 Si F tiene la PRN entonces todo operador $T: L^p(\mu) \to F$ O.S. es Riesz representable.

Demostración Si T es O.S. será $\bar{m}_q < +\infty$, como que $|m| \leq \bar{m}_q \cdot \mu(\Omega)^{1/q}$ resulta que m es de variación acotada y es μ-continua por representar a T.

Así pues, tenemos una medida $m: \Sigma \to F$ de variación acotada y absolutamente continua respecto de μ. Como que F tiene la PRN existirá g de $L'(\mu,F)$ tal que $m(E) = \int_E g\,d\mu$, luego $\|g\|_q = \bar{m}_q < +\infty$ de donde $g \in L^q(\mu,F)$.

Por último si definimos $R: L^p(\mu) \to F$ por $R(f) = \int_\Omega fg\,d\mu$ R y T son dos operadores acotados que coinciden sobre las funciones simples, luego R = T y por tanto T es Riesz representable.

El recíproco no siempre es cierto, sin embargo se tiene por ejemplo, para $1 \leq p \leq \infty$

Proposición 10 Si F no tiene la PRN existe un operador T: $L^p[0,1] \to F$ O.S. que no es Riesz representable.

Demostración Si F no tiene la PRN existe un conjunto acotado K en F que no es dentable, y podemos construir una medida $m:\Sigma \to F$, donde Σ son los borelianos de $[0,1]$, de tal modo que si μ es la medida de Lebesgue de $[0,1]$ se cumple $\|mE\| \leq \mu(E)$ (E de Σ) y además m no tiene derivada Bochner integrable respecto de μ. Esta construcción está en el llamado teorema de Davis-Huff-Maynard-Phelps (véase Diestel "Geometry of Banach spaces. Selected Topics" vol. 485, Lecture Notes, Springer-Verlag)

Luego por ser $\|mE\| \leq \mu(E)$, será $\bar{m}_q < \infty$ y m representará pues un operador T: $L^p(\mu) \to F$ definido por $Tf = \int_{[0,1]} f\,dm$ que es O.S., pero que no puede ser Riesz representable, ya que si fuera $Tf = \int_{[0,1]} fg\,d\mu$ (f de $L^p[0,1]$) para cierta g de $L^q(\mu,F) \subset L'(\mu,F)$ sería $m(E) = \int_E g\,d\mu$ (E de Σ), contradicción.

Nota La construcción de m sigue siendo válida para cualquier espacio (Ω,Σ,μ) de medida finita positiva no puramente atómica, luego para tal espacio es válida la proposición.

Así pues, de los resultados anteriores, si fijo p con $1 \leq p \leq \infty$ y para (Ω,Σ,μ) espacio de medida finita no puramente atómica:

Corolario 11 F tiene la PRN si y sólo si O.S. equivale a Riesz-representable.

3.4 Otros tipos de operadores integrales

Los operadores Riesz-representables son los que tienen la forma $Tf = \int_\Omega fg\,d\mu$, integral de Bochner, ¿cómo son los operadores de la forma $Tf = \text{Pettis-}\int_\Omega fg\,d\mu$ sobre $L^p(\mu)$? En principio puede haber dos clases de tales operadores, los que tienen el núcleo integral g μ-medible y los que lo tienen débilmente μ-medible. Los del primer tipo son los que trata J.J. Uhl y son los que llama "vector integral".

Definición $T: L^p(\mu) \to F$ es "vector integral" de núcleo g si existe $g:\Omega \to F$ medible tal que $x^*Tf = \int_\Omega f x^* g \, d\mu$ (f de $L^p(\mu)$ y x^* de F^*).

El núcleo g de un "vector integral" está unívocamente determinado μ-c.p.t. y para $p=1$ la clase de los "vector integral" es precisamente la clase de los Riesz-representables. Para $1 \leq p < \infty$ una función μ-medible $g:\Omega \to F$ es el núcleo de un operador "vector integral" si y sólo si es x^*g de $L^q(\mu)$ para todo x^* de F^*.

De la demostración de J.J. Uhl se sigue que el número $\sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\int_\Omega |x^*g|^q d\mu \right)^{1/q}$ es finito. Este número, al que podríamos llamar norma-q-Pettis de g, coincide precisamente con la q-semivariación de m, $\tilde{m}_q$, ya que $\tilde{m}_q = \sup \{\overline{x^*m} : \|x^*\| \leq 1\} = \sup \{\|x^*g\|_q : \|x^*\| \leq 1\}$, así pues, si T es "vector integral" con núcleo g, será

$$\|T\| = \tilde{m}_q = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\int_\Omega |x^*g|^q d\mu \right)^{1/q} = \text{norma-q-Pettis de } g.$$

Es inmediato comprobar que todo Riesz-representable es "vector integral". Si $\bar{m}_q < +\infty$ el recíproco es cierto:

Sea $T: L^p(\mu) \to F$ con $1 \leq p \leq \infty$, $m:\Sigma \to F$ la medida que representa a T.

Proposición 12 T es Riesz-representable si y sólo si T es "vector integral" y $\bar{m}_q < +\infty$.

Demostración Que la condición necesaria, es inmediato. Veamos que es suficiente: Si T es "vector integral", existe $g:\Omega \to F$ μ-medible tal que es x^*g de $L^q(\mu)$ si es x^* de F^* y, si $m:\Sigma \to F$ representa a T, es $x^*m(E) = \int_E x^*g \, d\mu$ (E de Σ). Dicho en otras palabras, $m(E) = \text{Pettis-}\int_E g \, d\mu$. En el capítulo 3 § 2 de Diestel-Uhl (5) se prueba que una tal medida es "localmente" Bochner integrable, es decir, que podemos encontrar una sucesión $\{E_n\}$ en Σ disjuntos dos a dos con $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$, de manera que g es integrable sobre cada E_n. Así pues, como que

$$\int_\Omega \|g\| \chi_{\bigcup_{n=1}^{m} E_n} d\mu \leq |m|(\Omega),$$

por el teorema de la convergencia monótona se sigue que $\int_\Omega \|g\| d\mu \leq |m|(\Omega) < +\infty$, luego será $|m|(E) = \int_E \|g\| d\mu$ y por tanto $\bar{m}_q = \left(\int_\Omega \|g\|^q d\mu\right)^{1/q} = \|g\|_q$, con lo que T es Riesz-representable con núcleo la función g.

De manera análoga puede comprobarse que si $T: L^p(\mu) \to F$ es "vector integral" entonces $\bar{m}_q$ es "localmente" finita.

<u>Corolario 13</u> Sea $T: L^p(\mu) \to F$ "vector integral". Entonces para todo E de Σ con $\mu(E_1) > 0$, existe E_2 de Σ , $E_2 \subset E_1$, con $\mu(E_2) > 0$ de modo que $\bar{m}_q(E) < +\infty$ si es E de Σ con $E \subset E_2$ y $\mu(E) > 0$.

Lo cual equivale a (ver lema 4 pág. 70 Diestel-Uhl (5))

<u>Corolario 14</u> Sea $T: L^p(\mu) \to F$ "vector integral". Entonces existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, con $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$ y tales que $\bar{m}_q(E_n) < +\infty$ para todo n.

Y esto implica:

<u>Corolario 15</u> Sea $T: L^p(\mu) \to F$ "vector integral". Entonces para todo A_1 de Σ con $\mu(A_1) > 0$, existe $A_2 \in \Sigma$ $A_2 \subset A$, con $\mu(A_2) > 0$ de manera que el conjunto $\left\{\frac{m(E)}{\mu(E)} : E \text{ de } \Sigma,\ E \subset A_2,\ \mu(E) > 0\right\}$ es relativamente compacto.

N. Di n culeanu (6) y A. y C. Ionescu Tulcea (9) con la ayuda de "liftings" dan una caracterización de las medidas de variación acotada que luego utilizan para estudiar los operadores $T: L^p(\mu) \to F$ con $\bar{m}_q < \infty$, llegando al siguiente resultado:

<u>Proposición 16</u> (Di n culeanu, Ionescu Tulcea) Sea $T: L^p(\mu) \to F$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces $\bar{m}_q < \infty$ si y sólo si existe $g: \Omega \to F^{**}$ tal que son

(a) x^*gf de $L'(\mu)$ y $x^*Tf = \int_\Omega x^*gf\,d\mu$ si $f \in L^p(\mu)$ y si $x^* \in F^*$.

(b) $\|g\|$ de $L^q(\mu)$ y $\bar{m}_q = \|g\|_q$. Además:

(c) Puede tomarse $g:\Omega \to F$ μ-medible si para todo E de Σ con $\mu(E_1) > 0$ existe $E_2 \subset E_1$ con $\mu(E_2) > 0$ tal que $\{\frac{m(E)}{\mu(E)} : E \text{ de } \Sigma,\ E \subset E_2,\ \mu(E) > 0\}$ es relativamente débilmente compacto.

Demostración Véase Dierculeanu (6).

De la proposición extraemos el siguiente

Corolario 17 Dada una medida vectorial $m:\Sigma \to F$, si m es μ-continua entonces $\bar{m}_q^q$ es medida para $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración En efecto, es $\bar{m}_q = \|g\|_q$ para cierto $\|g\|$ de $L^q(\mu)$.

Supongamos ahora que $m:\Sigma \to F$ representa un operador $T: L^p(\mu) \to F$ y que existe una sucesión E_n en Σ, disjuntos dos a dos, de modo que sea $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$ y que $\bar{m}_q(E_n) < \infty$ para todo n.

De acuerdo con la proposición 16, para todo n existe $g_n:\Omega \to F^{**}$ con x^*g_nf de $L'(\mu)$ y con $x^*Tf = \int_{E_n} x^*g_n\,d\mu$ si $x^* \in F^*$ y si $f \in L^p(\mu)$, luego $x^*m(A\cap E_n) = \int_{A\cap E_n} x^*g_n\,d\mu$ (A de Σ).

Así, si definimos $h:\Omega \to F$ por $h_n(\omega) = g_n(\omega)$ si es ω de E_n, h es débilmente-*-μ-medible en el sentido en que x^*h es medible (x^* de F^*) y

$$x^*m(A \cap \bigcup_{n=1}^{m} E_n) = \int_A x^*h\,\chi_{\bigcup_{n=1}^{m} E_n}\,d\mu$$

de donde $x^*m(A) = \lim_m x^*m(A \cap \bigcup_{n=1}^{m} E_n) = \lim_m \int_A x^*h\,\chi_{\bigcup_{n=1}^{m} E_n}\,d\mu$, y como que

$\lim_m \int_\Omega |x^*h|^q\,\chi_{\bigcup_{n=1}^{m} E_n} \leq |x^*m|^q(\Omega)$, por el teorema de la convergencia monótona $x^*h \in L^q(\mu)$, y $x^*m(A) = \lim_m \int_A x^*h\,\chi_{\bigcup_{n=1}^{m} E_n}\,d\mu = \int_A x^*h\,d\mu$ (x^* de F^*, A de Σ)

por el teorema de la convergencia dominada. Además

$$\widetilde{m}_q = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \overline{x^*m}_q = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \left(\int_\Omega |x^*h|^q \, d\mu\right)^{1/q} = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|x^*h\|_q$$

Así pues, hemos demostrado:

<u>Proposición 18</u> Sea $m:\Sigma \to F$ que representa $T: L^p(\mu) \to F$, entonces, si existe $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ con E_n de Σ disjuntos dos a dos, con $\bar{m}_q(E_n) < \infty$ y con $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$, existe $h:\Omega \to F^{**}$ débilmente -*-μ-medible tal que:

(a) $x^*m(A) = \int_A x^*h \, d\mu$ y $x^*h \in L^q(\mu)$, si $x^* \in F^*$ y si $A \in \Sigma$

(b) $x^* Tf = \int_\Omega x^*hf \, d\mu$, para toda f de $L^p(\mu)$

(c) $\widetilde{m}_q = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|x^*h\|_q$ y $\bar{m}_q(E_n) = \left(\int_{E_n} \|h\|^q d\mu\right)^{1/q}$ para todo n.

Si fuera $h:\Omega \to F$ μ-medible entonces el operador T así obtenido sería "vector integral". Una condición suficiente para que aquello ocurra es que se cumpla la condición (c) de la proposición 19. Pero esta condición se cumple siempre si T es "vector integral". Así pues, tenemos una condición necesaria y suficiente para que T sea vector integral para $1 \leq p \leq \infty$:

Sea $T: L^p(\mu) \to F$ y $m:\Sigma \to F$ que representa a T

<u>Proposición 19</u> T es "vector integral" si y sólo si para todo E_1 de Σ con $\mu(E_1) > 0$, existe E_2 de Σ con $\mu(E_2) > 0$ y con $\bar{m}_q(E_2) > 0$ de manera que el conjunto $\{\frac{m(E)}{\mu(E)} : E \text{ de } \Sigma,\ E \subset E_2,\ \mu(E) > 0\}$ es relativamente débilmente compacto.

CAPITULO 4

OPERADORES NUCLEARES

4.1 Productos tensoriales Sean X e Y espacios de Banach, en el producto tensorial $X \otimes Y$ podemos considerar varias normas, entre ellas son importantes las llamadas "reasonable crossnorm" que son las que cumplen

(a) $\alpha(X \otimes Y) \leq \|x\| \cdot \|y\|$

(b) Si son x^* de X^*, y^* de Y^*, entonces es $x^* \otimes y^*$ de $(X \otimes Y, \alpha)^*$ y tienen norma del dual $\leq \|x^*\| \cdot \|y^*\|$.

Si para u de $X \otimes Y$ se define

$\lambda(u) = \sup \{|x^* \otimes y^* (u)| : x^* \text{ de } X^*, y^* \text{ de } Y^*, \|x^*\| \leq 1, \|y^*\| \leq 1\}$

resulta que λ es una norma sobre $X \otimes Y$, que se llama la "least reasonable crossnorm" porque si α es una "reasonable crossnorm" es $\lambda(u) \leq \alpha(u)$ $\forall u \in X \otimes Y$

Defición Se llama producto tensorial inyectivo de X e Y, $X \check{\otimes} Y$, a la compleción de $X \otimes Y$ con λ.

Ejemplo 1 Sea $1 \leq p \leq \infty$ q tal $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dado (Ω, Σ, μ) espacio de medida finita, $L^p(\mu) \check{\otimes} F$ es el espacio $K_p(\mu, F)$ de las medidas vectoriales $m: \Sigma \to F$ de p-semivariación acotada y μ-continuas, que representan a los operadores compactos $T: L^q(\mu) \to F$:

caso $1 \leq p \leq \infty$. En efecto, si $u = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i \in L^p(\mu) \otimes F$ definimos $m_u: \Sigma \to F$ por $m_u(E) = \int_E \sum_{i=1}^{n} f_i . x_i \, d\mu$, entonces

$$\tilde{m}_p = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \overline{x^* m_u}_p = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\int_\Omega \left| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) f_i \right|^p d\mu \right)^{1/p} =$$

$$= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left| \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) f_i \right) g \, d\mu \right| =$$

$= \sup \{ |(y^* \otimes x^*)(u)| : y^* \in (L^p(\mu))', x^* \in F^*, \|y^*\| \leq 1, \|x^*\| \leq 1\} = \lambda(u)$

y el operador $T: L^q(\mu) \to F$ definido por $Tf = \int_\Omega f\, dm_u \quad \forall f \in L^q(\mu)$ es de rango finito, luego compacto.

Luego la aplicación $u \to m_u$ inyecta $L^p(\mu) \otimes F$ isométricamente dentro de $K_p(\mu,F)$, si ahora vemos que aplica $L^p(\mu) \otimes F$ en un subconjunto denso de $K_p(\mu,F)$, habremos terminado.

Sea pues $m \in K_p(\mu,F)$, si para cada partición finita π formada con elementos de Σ defino

$$m_\pi(E) = \sum_{A \in \pi} \frac{m(A)}{\mu(A)} \mu(E \cap A) \quad \forall E \in \Sigma$$

resulta que m_π es la imagen de $u = \sum_{A \in \pi} \chi_A \otimes \frac{m(A)}{\mu(A)} \in L^p(\mu) \otimes F$, ahora defino

$$E_\pi(f) = \sum_{A \in \pi} \frac{\int_A f d_\mu}{\mu(A)} \chi_A \quad \text{y } T: L^q(\mu) \to F \text{ es } Tf = \int_\Omega f\, dm \text{ con la } m \in K_p(\mu,F)$$

de partida, entonces por el lema 4 es $\lim TE_\pi = T$, y como que

$TE_\pi(f) = \sum_{A \in \pi} \frac{1}{\mu(A)} \cdot \int_A f\, d\mu \, . \, T(\chi_A) = \int_\Omega f\, dm_\pi$ resulta que

$$\lim_\pi (\widetilde{m - m_\pi})_p = \lim_\pi \|TE_\pi - T\| = 0,$$

como queríamos probar.

caso $p = \infty$, teniendo en cuenta que para $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu,F)$ es

$$\|f\|_\infty = \sup_{E \subset \Omega} \frac{\| \int_E f\, d\mu \|}{\mu(E)} = \sup_{\substack{\nu \in ba(\Sigma,\mu) \\ \|\nu\| \leq 1}} \left| \int \|f\| d\nu \right| \text{ será}$$

$$\widetilde{m} = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sup_{E \subset \Omega} \frac{|x^* m_u(E)|}{\mu(E)} = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sup_{E \subset \Omega} \frac{1}{\mu(E)} \left\| \int \left(\sum_{u=1}^{n} x^*(x_i) f_i \right) d\mu \right\| =$$

$$= \sup \sup \left\| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) f_i \right\|_\infty = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sup_{|\nu| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) \int f_i\, d\nu \right| =$$

$= \sup |x^* \otimes y^*(u)| = \lambda(u)$ luego todo como antes utilizando el lema 3.

Probemos ahora los detalles que nos faltan para completar el ejemplo:

Sea π una partición finita de elementos de Σ disjuntos dos a dos y E_π la aplicación lineal definida por

$$E_\pi(f) = \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)} \chi_A \quad \forall f \in L^1(\mu,F)$$

<u>Lema 2</u> (a) para $1 \leq p \leq \infty$ $\|E_\pi(f)\|_p \leq \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mu,F)$

(b) para $1 \leq p < \infty$ y tomando el conjunto de particiones finitas dirigidas por refinamiento se tiene $\lim_\pi \|E_\pi(f)-f\|_p = 0$, $\forall f \in L^p(\mu,F)$.

(c) para $p = \infty$ $\lim \|E_\pi(f)-f\|_\infty = 0$ $\forall f \in L^\infty(\mu,F)$ con rango esencialmente relativamente compacto.

<u>Demostración</u>

(a) si $1 \leq p < \infty$ $\|E_\pi(f)\|_p = \|\sum_{A\in\pi} \frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)} \chi_A\|_p$, pero si llamo $m(A) = \int_A f\,d\mu$

será $\|E_\pi(f)\|_p = \|\sum_{A\in\pi} \frac{m(A)}{\mu(A)} \chi_A\|_p = \{\sum_{A\in\pi} \frac{\|mA\|^p}{\mu(A)^p} \mu(A)\}^{1/p} \leq \bar{m}_p = \|f\|_p$,

para $p = \infty$ $\|E_\pi(f)\|_\infty = \sup\{ \frac{\|\int_A f\,d\mu\|}{(A)} : A \in \pi\} \leq \|f\|_\infty$

(b) si s es simple la red $(E_\pi(s))_\pi$ es constante y $E_\pi(s) \to s$, ahora dado $\varepsilon > 0$ sea s simple con $\|f-s\|_p \leq \varepsilon/2$, será

$$\|E_\pi(f)-f\|_p \leq \|E_\pi(f)-E_\pi(s)\|_p + \|E_\pi(s)-f\|_p \leq \|E_\pi\|\cdot\|f-s\|_p + \|s-f\|_p \leq \varepsilon,$$

luego $\lim_\pi \|E_\pi(f)-f\|_p = 0$.

(c) Análogo al anterior teniendo en cuenta que las funciones simples son densas en las funciones de $L^\infty(\mu,F)$ con rango esencialmente relativamente compacto, es decir, que salvo en un conjunto de medida nula el rango es relativamente compacto.

Recordemos que $(L^\infty(\mu))' = ba(\Sigma,\mu)$ el espacio de las medidas finitamente aditivas de variación acotada nulos sobre los μ-nulos, si $\mu_A(\cdot)$ es la medida definida por $\mu_A(E) = \mu(E \cap A)$ $\forall E \in \Sigma$, y defino $\forall$ $\nu \in ba(\Sigma,\mu)$

$E_\pi(\nu) = \sum_{A \in \pi} \frac{\nu(A)}{\mu(A)} \mu_A(\cdot)$ resulta que E_π es lineal y además $E_\pi(\nu) \in ba(\Sigma,\mu)$, si

$\|\cdot\|$ es la variación.

Lema 3 (a) $\|E_\pi(\nu)\| \leq \|\nu\|$ $\forall \nu \in ba(\Sigma,\mu)$

(b) $\lim_\pi \|E_\pi(\nu) - \nu\| = 0$ $\forall \nu \in ba(\Sigma,\mu)$

dem.

(a) $\|E_\pi(\nu)\| = \|E_\pi(\nu)\|(\Omega) \leq \sum_{A \in \pi} \frac{|\nu(A)|}{\mu(A)} \|\mu_A(\Omega)\| = \sum_{A \in \pi} |\nu(A)| \leq \|\nu\|$

(b) si $\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_{A_i}(.)$ entonces $\nu \in ba(\Sigma,\mu)$ y $(E_\pi(\nu))_\pi$ es constante con

$E_\pi(\nu) \to \nu$, como que tales ν son densos en $ba(\Sigma,\mu)$ (véase Diestel (5))

y $\|E_\pi\| \leq 1$ se cumple (b).

Lema 4 $1 \leq p \leq \infty$, si $T: L^p(\mu) \to F$ es compacto entonces $\lim TE_\pi = T$.

Demostración

para $1 \leq p < \infty$ si $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, es

$\int_\Omega E_\pi(f) g d\mu = \sum_{A \in \pi} \frac{\int_A f d\mu . \int_A g d\mu}{\mu(A)} = \int_\Omega f . E_\pi(g) d\mu$, luego E_π coincide con su

adjunto y por tanto el adjunto de TE_π es $E_\pi T^*$. Por el teorema de Schauder

$T^*: F^* \to L^q(\mu)$ es compacto, y como que $\lim_\pi E_\pi(f) = f$ $\forall f \in L^q(\mu)$ y $\|E_\pi\| \leq 1$

es $\lim_\pi E_\pi(f) = f$ uniformemente sobre los compactos de $L^q(\mu)$, luego

$\lim_\pi E_\pi T^*(x^*) = T^*(x^*)$ uniformemente para $\|x^*\| \leq 1$ ya que la imagen de la bola

unidad de F^* es compacto, con lo que finalmente tenemos $\lim TE_\pi = T$.

para $p = \infty$ si $f \in L^\infty(\mu)$, $\nu \in ba(\Sigma,\mu)$ entonces

$(E_\pi(f), \nu) = \int_\Omega E_\pi(f) d\nu = \int_\Omega \left(\sum_{A \in \pi} \frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)} \chi_A \right) d\nu = \sum_{A \in \pi} \frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)} \nu(A) =$

$= \int_\Omega f d \left(\frac{\nu(A)}{\mu(A)} \mu_A(\cdot) \right) = (f, E(\nu))$, luego E_π es adjunto de sí mismo,

$T^*: F^* \to (L^\infty(\mu))'$ es compacto y el resto es como antes.

Para $1 \leq p < \infty$ sea $M_p(\mu,F)$ el espacio de las funciones μ-medibles Pettis integrables $f:\Omega \to F$ tales que

$$\|f\|_{M_p} = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\int |x^*f|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty$$

y sea $M_\infty(\mu,F)$ el espacio de las funciones μ-medibles Pettis integrables de rango esencialmente relativamente compacto tales que

$$\|f\|_{M_\infty} = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|x^*f\|_\infty < +\infty.$$

Si a cada $f \in M_p(\mu,F)$ con $1 \leq p \leq \infty$ le asociamos la medida $m_f:\Sigma \to F$ definida por $m_f(E) = \text{Pettis-}\int_E f \, d\mu$ resulta que $(\widetilde{m_f})_q = \|f\|_{M_p}$ y por tanto la aplicación $f \mapsto m_f$ inyecta isométricamente $M_p(\mu,F)$ en $K_p(\mu,F)$, ya que si f es simple es $m_f \in K_p(\mu,F)$ y las funciones simples son densas en $M_p(\mu,F)$. Por último se comprueba como en el ejemplo que la aplicación $f \mapsto m_f$ inyecta $M_p(\mu,F)$ en un subconjunto denso de $K_p(\mu,F)$. Luego son isométricos.

Resumiendo todo lo que hemos visto

Proposición 5 Sea (Ω,Σ,μ) espacio de medida finita. Para $1 \leq p \leq \infty$ los siguientes espacios son isométricos

(a) $K_p(\mu,F)$

(b) $M_p(\mu,F)$

(c) $L_p(\mu) \check{\otimes} F$

(d) si $1 < p \leq \infty$ con el espacio de los operadores $T: L^q(\mu) \to F$ compactos.

Para $p = 1$ con el subespacio de los operadores $T: L^\infty(\mu) \to F$ compactos $(\sigma^*\text{-}\sigma)$-continuos.

Demostración

Sólo falta ver la última parte de (d), que es consecuencia del teorema 5 del capítulo 1, pues m es μ-continua con $\widetilde{m}_1 < +\infty$ representa un operador $T: L^\infty(\mu) \to F$ $(\sigma^*\text{-}\sigma)$-continuo.

Si dado $u \in X \otimes Y$ consideramos

$$f(u) = \inf \{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| . \|y_i\| : x_i \in X,\ y_i \in Y \quad \text{si} \quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \}$$

f es una norma en $X \otimes Y$ que se llama la "greatest reasonable crossnorm" ya que si α es otra "reasonable crossnorm" en $X \otimes Y$ se verifica $\alpha(u) \leq f(u)$ $\forall u \in X \otimes Y$.

Definición Se llama producto tensorial proyectivo de X e Y, $X \hat{\otimes} Y$, a la compleción de $X \otimes Y$ con f.

Ejemplo 6 $L'(\mu) \hat{\otimes} F = L'(\mu,F)$ si (Ω,Σ,μ) es espacio de medida.

Consideremos la inclusión $J: L'(\mu) \otimes F \to L'(\mu,F)$ que es continua con norma $\|J\| \leq 1$. J aplica el subespacio S de los elementos de la forma $\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes x_i$ con $A_1,\dots,A_n \in \Sigma$ disjuntos dos a dos y de medida finita y con $x_1,\dots,x_n \in F$, que denso en $L'(\mu) \hat{\otimes} F$, sobre el subespacio de las funciones simples de $L'(\mu,F)$ que también es denso en $L'(\mu,F)$, luego si comprobamos que $f(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes x_i) \leq \| J(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes x_i)\|_{L'(\mu,F)}$ para $\sum \chi_{A_i} \otimes x_i \in S$ será J una isometría, para ello

$$f(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\chi_{A_i} \otimes x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \|\chi_{A_i}\|_1 . \|x_i\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) . \|x_i\| = \| \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i} \|_{L'(\mu,F)} = \|J(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes x_i)\|_{L'(\mu,F)}$$

4.2 Operadores nucleares

Sean X e Y espacios de Banach

Definición Un operador $T: X \to T$ es nuclear si $\exists\ x_n^* \in x^*$, $y_n \in Y$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| . \|y_n\| < +\infty$ de modo que $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) . y_n$ $\forall x \in X$.

Si T es nuclear se define la norma nuclear de T como

$\|T\|_{nuc} = \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| . \|y_n\| \}$, ínfimo tomado de entre todas las sucesiones

$\{x_n^*\}$ e $\{y_n\}$ tales que $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x).y_n$. Con $\|T\|_{nuc}$ el conjunto de operadores nucleares de X a Y es un Banach y la clase de operadores nucleares es estable por la composición con operadores continuos.

¿ Qué relación existe entre operadores nucleares y las medidas que los representan ?

Para el espacio $C(\Omega)$ se tiene

Teorema 7 $T: C(\Omega) \to F$ es nuclear si y sólo si la medida que lo representa $m:\Sigma \to F$ es de variación acotada y de la forma $m(E) = \int_E f\,d|m|$. En tal caso $\|T\|_{nuc} = |m| = \|f\|_{L'(|m|,F)}$

La demostración está en varios autores, véanse las referencias que de Diestel-Uhl (5), pág. 184. Nótese que como todo operador nuclear es débilmente compacto la medida m toma valores en F (véase teorema 8 capítulo 1). Cuando una medida $m:\Sigma \to F$ tiene la forma $m(E) = \int_E f\,d\mu$ con $f \in L'(\mu,F)$ se dice que m tiene derivada Bochner integrable f con respecto a μ.

Diestel en [4] trata el espacio $B(\Sigma)$,

Definición Se dice que $m:\Sigma \to F$ tiene derivada aproximada de Radón-Nikodym en el sentido de Bochner con respecto a ν si dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \sigma:\Sigma \to F$ de la forma $\sigma(A) = \sum_{i=1}^{n} \nu(E_i \cap A)y_i$ $\forall A \in \Sigma$, con $E_1,\dots,E_n \in \Sigma$ disjuntos dos a dos, $y_i \in F$, de manera que $|m-\sigma| \leq \varepsilon$.

Teorema 8 (Diestel) $T: B(\Sigma) \to F$ es nuclear si y sólo si la medida que lo representa $m:\Sigma \to F$ tiene derivada aproximada de Radón-Nikodym en el sentido de Bochner, con respecto a $|m|$.

C. Swartz (15) demuestra para $L^\infty(\mu)$

Teorema 9 $T: L^\infty(\mu) \to F$ es nuclear si y sólo si la medida que lo representa $m:\Sigma \to F$ tiene derivada Bochner integrable con respecto a μ, es decir, que es $m(E) = \int_E f\,d\mu$ con $f \in L'(\mu,F)$.

¿Qué diferencia hay entre el teorema 8 y el 9? Cuándo una medida m que tiene derivada aproximada de Radón-Nikodym en el sentido de Bochner con respecto a ν es de la forma $m(E)=\int_E f\,d\nu$ con $f\in L'(\nu,F)$? Si no es contablemente aditiva son dos los casos diferentes, sin embargo si ν es contablemente aditiva no:

<u>Proposición 10</u> $m(E)=\int_E f\,d\mu$ con $f\in L'(\mu,F)$ si y sólo si m tiene derivada aproximada de Radón-Nikodym en el sentido de Bochner con respecto a μ.

<u>Demostración</u>

Si $f\in L'(\mu,F)$ entonces (véase Diestel-Uhl [5] pág. 17) $\exists\ E_n\in\Sigma$ no necesariamente disjuntos, $x_n\in F$ tales que $f=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\,\chi_{E_n}$ absolutamente μ-c.p.t. con $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\mu(E_n)\leq\|f\|_{L'(\mu,F)}+\epsilon$, por el teorema de la convergencia dominada

$$m(A)=\int_A f\,d\mu=\int_A\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\chi_{E_n}\right)d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_A\chi_{E_n}d\mu\right)x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n\cap A)x_n$$

luego si ponemos $\mu_{E_n}(A)=\mu(E_n\cap A)$ es $m(.)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{E_n}(.).x_n$

y si $\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_{E_i}(.).x_i$ entonces $|m-\sigma_n|=|\sum_{i>n}x_i\mu_{E_i}(.)|=$

$$=\int_\Omega\|\sum_{i>n}x_i\chi_{E_i}\|d\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ya que si $m(A)=\int_A f\,d\mu$ con $f\in L'(\mu,F)$ es $|m|=\int_\Omega\|f\|d\mu$, como que podemos escribir $\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_{E_i}.x_i=\sum_{i=1}^{m(n)}\mu_{A_i}(.).y_i$ con $A_i\in\Sigma$ disjuntos dos a dos ya esta; hemos demostrado que m tiene derivada aproximada de Radón-Nikodym en el sentido de Bochner con respecto a μ.

Veamos la condición suficiente, si dado $\epsilon>0$ $\sigma=\sum_{i=1}^{n}x_i\mu_{E_i}$ tal que $|m-\sigma|\leq\epsilon$ por suma telescópica obtenemos $m=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n$ con $\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_n|\leq|m|+\epsilon$, luego podemos escribir m como $m = \Sigma \mu_{A_n} . x_n$ con $\Sigma \mu_{A_n} . \|x_n\| < +\infty$, como que

$\forall n$ μ_{A_n} es μ-continua por el teorema de Radón-Nikodym $f_n \in L'(\mu)$ tales que $\mu_{A_n}(E) = \int_E f_n d\mu$ con $|\mu_{A_n}| = \mu_{A_n} = \int_E |f_n| d\mu$ aquí es $f_n = \chi(A_n)$; luego si ponemos $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n . x_n$ al ser $\sum_{n=1}^{\infty} \|f\|_{L'(\mu)} . \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{A_n} . \|x_n\| < +\infty$ resulta que $f \in L'(\mu, F)$ y $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_A(E) . x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu . x_n = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n d\mu = \int_E f d\mu$

donde hemos aplicado el teorema de la convergencia dominada.

Dado $T: B(\Sigma) \to F$ si la medida que lo representa m fuera contablemente aditiva entonces tendría derivada Bochner integrable con respecto a $|m|$ como en el teorema 3, pero en general m es sólo finitamente aditiva.

Sea $1 \leq p < \infty$ q tal $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

<u>Definición</u> Se dice que la medida vectorial $m: \Sigma \to F$ tiene derivada q-aproximada de Radón-Nikodym en el sentido de Bochner con respecto a ν si dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \sigma: \Sigma \to F$ de la forma $\sigma(A) = \sum_{i=1}^{n} \nu(E_i \cap A) . y_i$ $\forall A \in \Sigma$ con $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$ disjuntos dos a dos, $y_i \in F$, de manera que $(\overline{m-\sigma})_q \leq \varepsilon$.

Nótese que en tal caso $\overline{m}_q < +\infty$ y que para $q = 1$ coincide con la definición habitual.

El siguiente resultado es una inmediata generalización de la proposición 8

Sea $1 < p \leq \infty$, dado $T: L^p(\mu) \to F$

<u>Proposición 11</u> T es Riesz representable si y sólo si la medida $m: \Sigma \to F$ que lo representa tiene derivada q-aproximada de Radón-Nikodym en el sentido de Bochner con respecto a μ.

<u>Demostración</u>

Si T es Riesz-representable será $Tf = \int_\Omega fg\, d\mu$ con $g \in L^q(\mu, F)$, luego $m(E) = \int_E g\, d\mu$ representa T. Como que $g \in L^q(\mu, F)$ $\exists\, s_n$ simples tales que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists_n$ con $\|g - s_n\|_q \leq \varepsilon$, si es $s_n = \sum_{i=1}^{m(n)} x_i \chi_{E_i^n}$ con $E_i \in \Sigma$ disjuntos dos a dos, $x_i \in F$, s_n define la medida $m_{s_n}(A) = \sum_{i=1} \mu_{E_i}(A)x_i \quad \forall A \in \Sigma$ con $(\overline{m-m_{s_n}})_q = \|g-s_n\|_q \leq \varepsilon$, ya que $m-m_{s_n}$ es la medida asociada al operador $R(f) = \int_\Omega (g-s_n) f\, d\mu$, luego ya está.

Para el recíproco, si dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \sigma = \sum_{i=1}^{n} \mu_{E_i}.x_i$ con $(\overline{m-\sigma})_q \leq \varepsilon$ por suma telescópica obtenemos $m = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{n_q} \leq \bar{m}_q + \varepsilon$. Si es $\sigma_n(A) = \sum_{i=1}^{m(n)} \mu_{E_i}(A)x_i$ será $\sigma_n(A) = \int_A s_n\, d\mu$ con $s_n = \sum_{i=1}^{m(n)} \chi_{E_i}.x_i$ y con $(\bar{\sigma}_n)_q = \|s_n\|_q$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ converge hacia una cierta $h \in L^q(\mu,F)$ ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \|s_n\|_q \leq \bar{m}_q + \varepsilon$. Así pues $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A s_n\, d\mu = \int_A \sum_{n=1}^{\infty} s_n\, d\mu =$ $= \int_A h\, d\mu \quad \forall A \in \Sigma$, por el teorema de la convergencia dominada, luego T es Riesz-representable con $Tf = \int_\Omega h f\, d\mu \quad \forall f \in L^p(\mu)$.

Análogamente para $p = 1$ se tiene

<u>Proposición 12</u> $T: L'(\mu) \to F$ es Riesz-representable con núcleo integral $g \in L^\infty(\mu,F)$ de rango esencialmente relativamente compacto si y sólo si la medida que representa a T tiene derivada ∞-aproximada de Radón-Nikodym en el sentido de Bochner con respecto a μ.

La caracterización de las medidas que representan a los operadores nucleares $T: L^p(\mu) \to F$ con $1 \leq p < \infty$ es muy burda:

<u>Proposición 13</u> $T: L^p(\mu) \to F$ es nuclear si y sólo si la medida $m: \Sigma \to F$ que lo representa es de la forma $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(A).x_n \quad \forall A \in \Sigma$ con $\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\nu}_n)_q.\|x_n\| < +\infty$. Y dado $\varepsilon > 0$ pueden tomarse ν_n, x_n con $\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\nu}_n)_q.\|x_n\| \leq \|T\|_{nuc} + \varepsilon$

<u>Demostración</u>

Si T es nuclear $\exists\, x_n \in F$, $g_n \in L^q(\mu) = (L^p(\mu))'$ con

$\sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|_q\cdot\|x_n\|\leq\|T\|_{nuc} + \varepsilon$ tales que $Tf = \sum_{n=1}^{\infty}(\int_\Omega fg_n d\mu)x_n$ $\forall f\in L^p(\mu)$, luego $\forall A\in\Sigma$ $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty}(\int_A g_n d\mu)x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\nu_n(A)x_n$ donde hemos puesto $\nu_n(A) = \int_A g_n d\mu$

y es $\bar{m}_q \leq \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{\nu}_n)_q\cdot\|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|_q\cdot\|x_n\|\leq\|T\|_{nuc} + \varepsilon$.

Recíprocamente si $(\bar{\nu}_n)_q < +\infty$ ν_n es μ-continua, luego por el teorema de Radón-Nikodym $\exists$ $f_n\in L^1(\mu)$ con $\nu_n(A) = \int_A f_n d\mu$, pero al ser $(\bar{\nu}_n)_q < +\infty$ será $f_n\in L^q(\mu)$ con $\|f_n\|_q = (\bar{\nu}_n)_q$. Ahora si es $l_n(f) = \int_\Omega f.f_n d\mu$ resulta que $l_n\in(L^p(\mu))'$ con $\|l_n\| = \|f_n\|_q$, luego el operador R: $L^p(\mu)\to F$ definido por $R(f) = \sum_{n=1}^{\infty}l_n(f).x_n$ es nuclear ya que $\sum_{n=1}^{\infty}\|l_n\|.\|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{\nu}_n)_q\cdot\|x_n\| < +\infty$, pero $R = T$ ya que coinciden sobre las funciones simples.

Sea $1\leq p<\infty$

<u>Proposición 14</u> Todo T: $L^p(\mu)\to F$ nuclear es Riesz-representable. Y dado $\varepsilon > 0$ puede elegirse un núcleo integral de T, $h\in L^q(\mu,F)$, con $\|h\|_q\leq\|T\|_{nuc} + \varepsilon$

<u>dem.</u>

Por definición dado $\varepsilon > 0$ existirán $g_n\in L^q(\mu)$, $x_n\in F$ con $\sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|_q\cdot\|x_n\|\leq\|T\|_{nuc} + \varepsilon$ tales que $Tf = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega fg_n\, d\mu\,.x_n$ $\forall f\in L^p(\mu)$.

Por ser normalmente convergente y $L^q(\mu,F)$ completo la serie $\sum_{n=1}^{\infty}g_n.x_n$ converge hacia un elemento $g\in L^q(\mu,F)$, luego

$$\int_\Omega fg\,d\mu = \int_\Omega f(\sum_{n=1}^{\infty}g_n x_n)d\mu = \int_\Omega\sum_{n=1}^{\infty}fg_n x_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega fg_n.x_n d\mu =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega fg_n d\mu.x_n = Tf$$

donde hemos aplicado el teorema de la convergencia dominada. Además $\|T\|\leq\|g\|_q\leq\|T\|_{nuc} + \varepsilon$.

También se tiene

Proposición 15 Si $T: L^p(\mu) \to F$ es nuclear entonces la medida que lo representa es de q-variación acotada y $m(E) = \int_E h\, d|m|$ con $h \in L^q(|m|, F)$. Dado $\varepsilon > 0$ puede tomarse h de modo que $\|h\|_q \le \|T\|_{nuc} + \varepsilon$.

Demostración

Si T es nuclear dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, g_n \in L^q(\mu)$, $y_n \in F$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_q \cdot \|x_n\| \le \|T\|_{nuc} + \varepsilon$ de manera que $T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (\int_\Omega fg_n d\mu) y_n$, la medida que representa a T es

$$m(A) = T(\chi_A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega \chi_A g_n d\mu . y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A g_n d\mu . y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(A) . y_n$$

donde hemos pueso $\nu_n(A) = \int_A g_n d\mu \quad \forall A \in \Sigma$.

Así resulta que $m: \Sigma \to F$ es una medida vectorial cuya q-variación

$$\overline{m}_q = \sup_{\|s\|_p \le 1} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| . \|mE_i\| = \sup_{\|s\|_p \le 1} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| . \| \sum_{j=1} \nu_j(E_i) y_j \| \le$$

$$\le \sup_{\|s\|_p \le 1} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \sum_{j=1}^{\infty} \| \nu_j(E_i) \| . \|y_j\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\|s\|_p \le 1} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| . \| \nu_j(E_i) \| . \|y_j\| =$$

$= \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{\nu}_j)_q \|y_j\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_q . \|y_j\| \le \|T\|_{nuc} + \varepsilon < +\infty$ luego m es contablemente aditiva y de variación $|m|$ acotada, veamos ahora que podemos elegir las ν_n de modo que sean $|m|$-continuas, para ello descomponemos $\nu_n = \bar{\nu}_n + \bar{\bar{\nu}}_n$ con $\bar{\nu}_n$ $|m|$-continua y $\bar{\bar{\nu}}_n$ $|m|$-singular y con $|\nu_n| = |\bar{\nu}_n| + |\bar{\bar{\nu}}_n|$ (teorema de decomposición de Lebesgue, véase Diestel-Uhl [5] pág. 31), entonces

$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\nu}_n(E) y_n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\bar{\nu}}_n(E) y_n \quad \forall E \in \Sigma$, como que cada $\bar{\bar{\nu}}_n$ es $|m|$-singular la medida $E \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\bar{\nu}}_n|(E) . \|y_n\|$ es $|m|$-singular, luego $\exists\, A, B \in \Sigma$ con $A \cup B = \Omega$ de manera que $|m|(A) = |m|(\Omega)$, $|m|(B) = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\bar{\nu}}_n|(A) . \|y_n\| = 0$ y

$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\bar{\nu}}_n|(B) . \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\bar{\nu}}_n|(\Omega) . \|y_n\|$, luego $\forall E \in \Sigma$ es $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\bar{\nu}}_n(E \cap A) . y_n = 0$ y como que $m << |m|$ será $m(E) = m(E \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\nu}_n(E \cap A) . y_n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\bar{\nu}}_n(E \cap A) y_n =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\nu}_n(E).y_n$. Ahora al ser $|\bar{\nu}_n| \leq |\nu_n|$ será $(\overline{\bar{\nu}_n})_q \leq (\overline{\nu_n})_q$ $\forall n$, y como que $m << |m|$ por el teorema de Radón-Nikodym $\exists\, f_n \in L'(|m|)$ tales que $\bar{\nu}_n(E) = \int_E f_n d|m|$ $\forall E \in \Sigma$ y al ser $(\overline{\bar{\nu}_n})_q < +\infty$ será $f_n \in L^q(\mu)$ con $\|f_n\|_q = (\overline{\bar{\nu}_n})_q$, luego

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\nu}_n(E) y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d|m| y_n = \int_E \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n . y_n\Big) d|m| =$$

$$= \int_E h\, d\,|m|$$

donde $h = \sum_{n=1}^{\infty} f_n . y_n \in L^q(|m|, F)$ y hemos aplicado el teorema de la convergencia dominada.

Luego m representa también a un operador $R\colon L^p(|m|) \to F$ dado por $R(f) = \int_\Omega h\, f\, d|m|$ $\forall f \in L^p(|m|)$ y se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L^p(\mu) \arrow[dr, "J"'] \arrow[drr, "T"] & & \\
& L'(|m|) \arrow[r] & F \\
L^p(|m|) \arrow[ur] \arrow[urr, "R"'] & &
\end{tikzcd}$$

El recíproco de la proposición 14 es falso, com se ve en el

<u>Ejemplo 15</u> de un operador $T\colon L^2[0,1] \to l^\infty$ Riesz-representable no nuclear.

Consideremos primero la inclusión $l^2 \xhookrightarrow{R} c_0$ que no es 2-absolutamente sumante, en efecto, de serlo verificaría

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \|Rx_i\|_{c_0}^2\Big)^{1/2} \leq \rho \cdot \sup_{\substack{\|a\|_2 \leq 1 \\ a \in l^2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, a\rangle|^2\Big)^{1/2}$$

pero ello no se cumple, basta tomar por ejemplo $x_i = e_i$, el vector cuyas componentes son cero excepto la i-ésima que vale uno, pues en tal caso sería

$$n^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \|Re_i\|_{c_0}^2\Big)^{1/2} \le \rho \; . \sup_{\substack{\|a\| \le 1 \\ a \in l^2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, a\rangle|^2\Big)^{1/2}$$

para $n = 1,2...$ lo cual es obviamente imposible. Como que todo operador A.S. es 2-absolutamente sumante, la inclusión $R: l^2 \hookrightarrow c_0$ no es A.S. (véase A. Pietsch [12] , donde trata estos tipos de operadores). Si en vez de c_0 ponemos l^∞ todo es análogo y obtenemos $l^2 \hookrightarrow l^\infty$ no A.S.

Ahora utilizando la isometría de espacios de Hilbert $L^2[0,1] \to l^2$, que viene dada por $f \mapsto \{\hat{f}(n)\}$, obtenemos por composición el operador T que buscamos

$$\begin{tikzcd} L^2[0,1] \equiv l^2 \arrow[r, hook] \arrow[r, bend left, "T"] & l^\infty \end{tikzcd}$$

que no es A.S., luego no es nuclear porque todo operador nuclear es A.S.

Sin embargo es un operador Riesz-representable, pues la medida representa T es

$$m(E) = T(\chi_E) = \{\hat{\chi}_E(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \Big\{\int_E e^{-2\pi int} dt\Big\}_{n=-\infty}^{+\infty} \in l^\infty \quad \forall E \in \Sigma ,$$

luego si defino $h: [0,1] \to l^\infty$ por $h(t) = \{e^{-2\pi int}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ $\forall t \in [0,1]$, h es dt-medible y $h \in L^2(dt, l^\infty)$ puesto que

$$\|h\|_{L^2(dt,l^\infty)} = \Big(\int_0^1 \|h(t)\|_{l^\infty}^2 \, dt\Big)^{1/2} = \Big(\int_0^1 dt\Big)^{1/2} = 1$$

con lo que el operador $S: L^2[0,1] \to l^\infty$ dado por $S(f) = \int_{[0,1]} f(t)h(t)dt$ $\forall f \in L^2[0,1)$ está bien definido y coincide con T sobre las funciones simples, luego $S = T$, con lo que T es Riesz-representable.

Cambiándolo un poco podemos conseguir que sea un ejemplo de operador O.S. no Riesz representable, en efecto, si consideramos ahora $T: L^2[0,1] \to c_0$ que sea la composición $L^2[0,1] \equiv l^2 \xrightarrow{R} c_0$, la medida que lo representa será

$$m(E) = \{\hat{\chi}_E(n)\}_{n-\infty}^{+\infty} = \{\int_0^1 \chi_E(t)e^{-2\pi int}dt = \{\int_E e^{-2\pi int}dt\}$$

que es $m:\Sigma \to c_0$ por representar a T (o bien directamente por el lema de Riemann-Lebesgue) cuya variación si $\mu = dt$ medida de Lebesgue en $[0,1]$:

$$|m| = \sup_{\pi} \sum_{E \in \pi} \|mE\|_{c_0} \leq \sup_{\pi} \sum_{E \in \pi} \mu(E) = \mu[0,1] = 1$$

pues
$$\|mE\|_{c_0} = \sup_{n \in Z} \left|\int_E e^{-2\pi int}dt\right| \leq \mu(E)$$

y es un operador O.S. pues su 2-variación es finita:

$$\bar{m}_2 = \sup_{\|s\|_2 \leq 1} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| . \|mE_i\|_{c_0} \quad \text{para} \quad s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \quad \text{con } \|s\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 . \mu(E_i))^{1/2} \leq 1$$

$$\bar{m}_2 \leq \sup_{\|s\|_2 \leq 1} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| . \mu(E_i) \leq 1 < + \infty$$

Sin embargo ahora $T: L^2[0,1] \to c_0$ no es Riesz-representable, pues de serlo existiría $g \in L^2(dt, c_0)$ tal $Tf = \int_{[0,1]} fg\,dt \ \forall f \in L^2[0,1]$ pero si $g(t) = \{g_n(t)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ y 1_n es la proyección sobre la n-ésima componente resultaria que $1_n Tf = \int_{[0,1]} f.g_n dt$ con $g_n(t) = 1_n g(t)$ medible por ser composición de una medible con la n-proyección que es continua, en particular poniendo $f = \chi_E$ se tendría $1_n\, m(E) = \int_{[0,1]} \chi_E\, g_n\, dt = \int_E g_n(t)dt$, pero la medida que representa a T es $m(E) = \{\int_E e^{-2\pi int}dt\}_{n \in Z}$ de donde resulta que necesariamente $g_n(t) = e^{-2\pi int}$ c.p.t., así pues debería ser $g(t) = \{e^{-2\pi int}\}_{n \in Z}$ que no es una función de $L^2(dt, c_0)$ pues no toma valores en c_0 (los toma en $l^\infty = (c_0)''$) .

Así pues, resumiendo, obtenemos un operador $T: L^2[0,1] \to c_0$ O.S., no A.S., no Riesz-representable, y cambiando c_0 por l^∞ obtenemos un operador Riesz-representable no A.S., luego no nuclear.

Veremos a continuación que para $1 < p < \infty$ siempre existe al menos un operador $T: L^p(\mu) \to F$ Riesz-representable no nuclear, para ello haremos un cambio de lenguaje que quizás nos presente el problema de un modo más familiar:

Lema 17 Si $1 \leq p \leq \infty$ existe una biyección entre $L^q(\mu,F)$ y el conjunto de los operadores Riesz-representables $T: L^p(\mu) \to F$.

dem. Definimos la aplicación $g \in L^q(\mu,F) \to T_g \in$ operadores Riesz-representable de $L^p(\mu)$ a F, donde es $T_g(f) = \int_\Omega fg\,d\mu$ $\forall f \in L^p(\mu)$. Que es inyectiva puesto que si $g_1 \neq g_2$ entonces es $T_{g_1} \neq T_{g_2}$ puesto que sobre $f = \chi_\Omega$ es $T_{g_1}(\chi_\Omega) = \int_\Omega g_1 d\mu \neq \int_\Omega g_2 d\mu = T_{g_2}(\chi_\Omega)$ y es obviamente exhaustiva, luego es biyección.

Lema 18 Si $1 \leq p < \infty$ existe una biyección entre el producto tensorial proyectivo $L^q(\mu) \hat{\otimes} F$, y el conjunto de los operadores nucleares $T: L^p(\mu) \to F$ que los identifica como espacios de Banach.

Demostración

Definimos la aplicación que a cada $u \in L^q(\mu) \otimes F$ con $u = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i$ le asocia el operador $T_u: L^p(\mu) \to F$ dado por $T_u(f) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f f_i x_i d\mu$ $\forall f \in L^p(\mu)$, T_u es nuclear con $\|T_u\|_{nuc} = \|u\|_{L^q(\mu) \otimes F}$, luego tal aplicación es lineal e inyectiva y aplica $L^q(\mu) \otimes F$ en un subconjunto denso de la imagen, luego al hacer la compleción coinciden $L^q(\mu) \hat{\otimes} F$ con el conjunto de operadores nucleares $T: L^p(\mu) \to F$.

Así pues el problema se reduce a estudiar la relación entre $L^q(\mu,F)$ y $L^q(\mu) \hat{\otimes} F$. Ya conocemos que para $q = 1$ es $L'(\mu) \hat{\otimes} F = L'(\mu,F)$ y esto puede ser utilizado, con algunas modificaciones, para demostrar la equivalencia entre operadores Riesz-representables y nucleares de $c(\Omega)$ ó $L^\infty(\mu)$ como lo hace por ejemplo Gil de Lamadrid [8].

Proposición 19 Si $q > 1$ existe una inclusión continua no exhaustiva $L^q(\mu) \hat{\otimes} F \hookrightarrow L^q(\mu,F)$.

dem. En efecto, dado $T \in L^q(\mu) \hat{\otimes} F$ y $\varepsilon > 0$ es $Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_\Omega f g_n d\mu\right) y_n$ con $g_n \in L^q(\mu)$, $y_n \in F$ y con $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_q \cdot \|y_n\| \leq \|T\|_{nuc} + \varepsilon$, así definimos la aplicación que a cada $T \in L^q(\mu) \hat{\otimes} F$ le asocia su núcleo integral $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot x_n \in L^q(\mu, F)$, que está bien definida puesto que diferentes representaciones de T nos dan el mismo núcleo integral como elemento de $L^q(\mu,F)$ y es lineal inyectiva.

Es continua puesto que si $T_n \to 0$ asociamos g_n a T_n con $\|g_n\|_q \leq \|T_n\| + \varepsilon/n$, así $T_n \to 0 \Rightarrow g_n \to 0$.

Sin embargo esta inyección no puede ser exhaustiva pues de serlo $L^q(\mu) \hat{\otimes} F$ y $L^q(\mu,F)$ coincidirían como espacio de Banach y ello es imposible como veremos seguidamente.

Sea (Ω, Σ, μ) sin átomos, sea $1 < q < \infty$, fijemos un α con $1 < \alpha \leq q$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge por ser $\alpha > 1$, llamo $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ y tomo una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $E_n \in \Sigma$, disjuntos dos a dos de manera que $\mu(E_n) = \frac{\mu(\Omega)}{c} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$ $\forall_n$, ello es posible porque (Ω, Σ, μ) no tiene átomos y es $\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(\Omega)$. Tomo ahora una sucesión $\{x_n\}$ de elementos linealmente independientes de F tales que $\|x_n\| = 1$ $\forall$ y sea $g = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n}$. Entonces $g: \Omega \to F$ así definida es de $L^q(\mu,F)$ ya que

$$\|g\|_q = \left(\int_\Omega \|g\|^q d\mu\right)^{1/q} = \left(\int_\Omega \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n} \right\|^q d\mu\right)^{1/q} = \left(\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^q \cdot \chi_{E_n} d\mu\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} d\mu\right)^{1/q} = \mu(\Omega)^{1/q} < +\infty$$

y si llamo $g_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$ entonces $g_n \to g$ en $L^q(\mu,F)$. Sea ahora T_n el elemento de $L^q(\mu) \hat{\otimes} F$ que corresponde a g_n por la inclusión $L^q(\mu) \hat{\otimes} F \hookrightarrow L^q(\mu,F)$, será $T_n = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i} \otimes x_i$ con

$$\|T_n\|_{L^q(\mu)\hat{\otimes} F} = \sum_{i=1}^{n}\|\chi_{E_i}\|_{L^q(\mu)}\cdot\|x_i\| = \sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)^{1/q} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu(\Omega)}{c}\right)^{1/q}\cdot\frac{1}{i^{\alpha/q}}$$

puesto que $\chi_{E_1},\ldots,\chi_{E_n}$ y $x_1,\ldots,x_n$ son linealmente independientes en $L^q(\mu)$ y F respectivamente. Pero como que $\alpha \leq p$ será $\|T_n\|_{L^q(\mu)\hat{\otimes} F} \to \infty$ cuando $n \to \infty$, luego T_n no puede converger en $L^q(\mu,F)$, mientras que sus imágenes g_n convergen hacia g en $L^q(\mu)\hat{\otimes} F$, luego hemos encontrado una sucesión no convergente cuya imagen por la inclusión converge, luego la inclusión no es bicontinua y por tanto no puede ser exhaustiva.

Si (Ω,Σ,μ) no es puramente atómica podemos adecuar el razonamiento anterior obteniendo los mismos resultados.

Para $q=\infty$ y (Ω,Σ,μ) no puramente atómica tendremos la inclusión $L^\infty(\mu)\hat{\otimes} F \hookrightarrow L^\infty(\mu,F)$ definida como antes al asociar a cada operador nuclear $T: L'(\mu) \to F$ su núcleo integral, como que $A_1,\ldots A_n$ disjuntos y $x_1,\ldots x_n$ linelamente independientes se tiene

$$\|\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}\otimes x_i\|_{L^\infty(\mu)\hat{\otimes} F} = \sum_{i=1}^{n}\|\chi_{A_i}\|_{L^\infty(\mu)}\cdot\|x_i\|_F = \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|$$

pero

$$\|\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}\cdot x_i\|_{L^\infty(\mu,F)} = \sup_{1\leq i\leq n}\|x_i\|$$

obviamente podremos también encontrar sucesiones no convergentes en $L^\infty(\mu)\hat{\otimes} F$ que se aplican en sucesiones convergentes de $L^\infty(\mu,F)$, por ejemplo tomando $x_n \in F$ linealmente independientes y unitarios, $E_n \in \Sigma$ disjuntos dos a dos ya se cumple.

Si (Ω,Σ,μ) es puramente atómica pero tiene un número infinito de átomos también con un razonamiento análogo llegamos a los mismos resultados

Si (Ω,Σ,μ) es puramente atómica con un número finito de átomos entonces si tiene n átomos es $L^p(\mu) = k^n$ si K es el cuerpo de escalares para

$1 \leq p \leq \infty$, mientras que $L^p(\mu,F) = F^n$, luego todo se reduce a comprobar que $K^n \hat{\otimes} F = F^n$ lo cual es inmediato ya que en K^n y en F^n todas las normas son equivalentes.

Corolario 20 Dado (Ω,Σ,μ) que no sea puramente atómica con un número finito de átomos y dado $1 \leq p < \infty$ siempre existe al menos un operador $T: L^p(\mu) \to F$ Riesz-representable no nuclear.

4.3 Operadores quasinucleares

Dados X e Y espacios de Banach

def. Un operador $T: X \to Y$ es quasi nuclear cuando existe una sucesión $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| < +\infty$ de manera que $\|Tx\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |< x_n^*, x >|$ $\forall x \in X$.

Si T es quasi nuclear se define la norma quaisnuclear de T como $\|T\|_q = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\|$, ínfimo tomado de entre todas las sucesiones $\{x_n^*\}$ de X^* que cumplen $\|Tx\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |< x_n^*, x >|$ $\forall x \in X$. Todo operador quasinuclear es lineal acotado con $\|T\| \leq \|T\|_{qn}$ y el conjunto de operador quasinucleares de X a Y es un Banach con $\|T\|_{qn}$. Todo operador nuclear es quasinuclear y todo quasinuclear es A.S. La composición de un quasinuclear con un operador continuo es quasinuclear. Para más detalles y més información de estos operadores véase A. Pietsch [13].

Proposición 21 Un operador $T: C(\Omega) \to F$ es quasinuclear si y sólo si admite una factorización

$$\begin{array}{ccc} C(\Omega) & \xrightarrow{T} & F \\ \downarrow J & & \downarrow S \\ L^1(\mu) & \xrightarrow{R} & l^1 \end{array}$$

donde μ es una medida positiva regular sobre los borelianos del compacto Haunsdorff Ω . En tal caso dado $\varepsilon > 0$ μ puede ser elegida de modo que $\|T\|_{qn} \leq \mu(\Omega) \leq \|T\|_{qn} + \varepsilon$, $J: C(\Omega) \to L^1(\mu)$ es la inclusión natural y $\|R\| \leq 1$, $\|S\| \leq 1$.

dem. Si $T: C(\Omega) \to F$ es quasinuclear existirán $\mu_n \in C(\Omega)'$ con $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|(\Omega) < +\infty$ de modo que $\|Tf\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\int_\Omega f d\mu_n|$ con $\|T\|_{qn} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|(\Omega) \leq$ $\leq \|T\|_{qn} + \varepsilon$, defino $H: C(\Omega) \to l^1$ por $H(f) = \{\int_\Omega f d\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\forall f \in C(\Omega)$, que está bien definida y es continua puesto que

$$\|H(f)\|_{l^1} = \sum_{n=1}^{\infty} |\int_\Omega f d\mu_n| \leq \|f\|_{C(\Omega)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n)(\Omega).$$

Veamos que H es A.S., para ello comprobaremos que la medida que representa H es de variación acotada. La medida que representa H es $m: \Sigma \to l^1$ dada por $m(E) = \{\mu_n(E)\}_{n=1}^{\infty}$ cuya variación

$$|m| = \sup_{\pi} \sum_{E \in \pi} \|mE\|_{l^1} = \sup_{\pi} \sum_{E \in \pi} \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n(E)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\pi} \sum_{E \in \pi} |\mu_n(E)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n| < +\infty$$

luego H factoriza por

$$\begin{tikzcd} C(\Omega) \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "J"'] & & l^1 \\ & L^1(|m|) \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$$

con $\|T\|_{qn} \leq |m| = \|H\|_{AS} = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n| \leq \|T\|_{qn} + \varepsilon$, ahora si llamo $E = H(C(\Omega))$, que será subespacio normado de l^1 (o bien toma su clausura que será Banach) y defino $S: E \to F$ tal que $S\{\int f d\mu_n\} = Tf$ $\forall f \in C(\Omega)$, es decir de manera que cierre el diagrama, entonces S está bien definida puesto que si $\int f d\mu_n = \int g d\mu_n$ $\forall_n \Rightarrow \|Tf - Tg\| = 0 \Rightarrow Tf = Tg$, es lineal y es continua ya que

$$\|S\{\int_\Omega f d\mu_n\}\| = \|Tf\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\int_\Omega f d\mu_n| = \|\{\int_\Omega f d\mu_n\}\|_{l^1},$$

Ahora fijémonos en $H: C(\Omega) \to E$, como que E es subespacio cerrado de l^1 tendrá la PRN, y como que la medida que representa a H, m, es de variación acotada y $|m|$-continua resulta que $\exists\, h \in L^1(|m|, E)$ con $m(A) = \int_A h\, d|m|$

$\forall A \in \Sigma$ luego será $H(f) = \int_\Omega fh\, d|m|$ $\forall f \in C(\Omega)$ y por tanto H es nuclear (véase teorema)3) luego por composición T es nuclear.

Pero si T es nuclear existirán $x_n \in F$, $\nu_n \in C(\Omega)'$ con $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n| \cdot \|x_n\| < +\infty$ de manera que $Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f d\nu_n \cdot x_n$ $\forall f \in C(\Omega)$, defino $H: C(\Omega) \to l'$ por $H(f) = (\|x_n\| \cdot \int_\Omega f d\nu_n)_{n=1}^{\infty} \in l'$ que es lineal y continua puesto que

$$\|H(f)\|_{l'} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\|x_n\| \cdot \int_\Omega f d\nu_n\right| \leq \|f\|_{C(\Omega)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n| \cdot \|x_n\|$$

Sea $G: \Sigma \to l'$ la medida que representa a H, será $G(A) = H(\chi_A) = (\|x_n\| \cdot \nu_n(A))_{n=1}^{\infty}$ $\forall A \in \Sigma$, cuya variación es

$$|G| = \sup_\pi \sum_{A \in \pi} \|GA\| = \sup_\pi \sum_{A \in \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \cdot |\nu_n(A)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_\pi \sum_{A \in \pi} \|x_n\| \cdot |\nu_n(A)| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \cdot |\nu_n| < +\infty,$$

luego H es A.S. y por tanto factoriza por $L'(|G|)$.

Si defino ahora $S: l' \to F$ por $S((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x_n}{\|x_n\|}$ resulta que S cierra el diagrama y es continua ya que

$$\|S((a_n)_{n=1}^{\infty})\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|(a_n)\|_{l'}$$

lo que nos da la factorización buscada.

Recíprocamente si existe tal factorización $H: C(\Omega) \to l'$ es A.S. porque factoriza por $L'(\mu)$, luego es nuclear y por tanto T es nuclear por composición. De donde T es quasinuclear.

De paso hemos demostrado

Corolario 22 $T: C(\Omega) \to F$ es quasi nuclear si y sólo si es nuclear, con además $\|T\|_{qn} = \|T\|_{nuc}$.

Corolario 23 T: $C(\Omega) \to F$ es nuclear si y sólo si tiene la factorización

$$\begin{tikzcd} C(\Omega) \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "R"'] & & F \\ & l^1 \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

con R nuclear. En tal caso R y S pueden elegirse de modo que sea
$\|R\|_{nuc} = \|T\|_{nuc}$ y $\|S\| \leq 1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.G. Bartle, N. Dunford and J.J. Schwartz. Weak compactness and vector measures. Canad. J. Math. 7, 289-305 (1955).

[2] S. Bochner and A. Taylor. Linear functionals on certain spaces of abstractly valued-functions. Ann. of Math. (2) 39, 913-944 (1938).

[3] Chattergi, S.D. Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces. Math. Scand. 22, 21-41 (1968).

[4] J. Diestel. The Radon-Nikodym property and the coincidence of integral and nuclear operators. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 17, 1611-1620 (1972).

[5] J. Diestel and J.J. Uhl, Jr. Vector measure Mathematical Surveys, Number 15. Amer. Math. Society, 1977.

[6] N. Dinculeanu. Linear operations on L^p-spaces. "Vector and operator valued measures and applications". Academic Press, 1973.

[7] N. Dinculeanu. Vector measures. Pergamon Press, New York, 1967.

[8] J. Gil de Lamadrid. Measures and tensors. Trans. Amer. Math. Soc. 114, 98-121 (1965).

[9] A. and C. Ionescu Tulcea. On the lifting property II. J. Math. Mec. II, 773-795 (1962).

[10] J. Lindestrauss and A. Pelczynski. Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications. Studia Math. 29, 275-326 (1968).

[11] A Persson and A. Pietsch. p-nukleare und p-integrale Abbildunger in Banachroumen. Studia Math. 33, 19-62 (1969).

[12] A Pietsch. Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Raumen. Studia Math. 28, 333-353 (1967)

[13] A. Pietsch. Nuclear locally convex spaces. Springer-Verlag, 1972.

[14] M.A. Rieffel. The Radon-Nikodym theorem for the Bochner integral. Trans. Amer. Math. Soc. 131, 466-487 (1968)

[15] C. Swartz. An operator characterization of vector measures which have Radon-Nikodym derivatives. Math. Ann. 202, 77-84 (1973).

[16] A.E. Tong. Nuclear mappings on C(x). Math. Ann. 194, 213-224 (1971).

[17] J.J. Uhl, Jr. Vector integral operators. Nederl. Aked. Wetensch Proc. Ser. A73 = Indag. Math. 32, 463-478 (1970).