

Moviments quasi-aleatoris en el problema restringit, circular i pla de 3 cossos.

Regina Martínez i Barchino

ABSTRACT.

The object of this paper is to prove the existence of a particular type of quasi-random motions for the restricted three-body problem.

In this problem, two of the bodies which we call the earth (E) and the moon (M), have positive mass, μ and $1-\mu$, respectively. They rotate in the plane counterclockwise about their common center of gravity. We call satellite (S) to the third body which has mass zero and is free to move in the plane. Let x, y the position of S in a synodic system of coordinates.

We consider the equations of the motion on the integral surface obtained for a given value of the Jacobi constant C .

For a given μ , there are five basic configurations for the Hill's region. The values of C which separate these five cases will be denoted by C_i , $i=1,2,3,4$. We only consider the values of μ sufficiently small and values of C just above that C_1 or C_2 . In these cases, the existence of unstable periodic solutions near the two collinear equilibrium points L_1 and L_2 follows from a theorem of Liapunov [1]. For this periodic orbit it is well known the existence of an unstable invariant manifold and a stable invariant manifold. The orbits in the intersection of both manifolds are called homoclinic orbits. They are orbits asymptotic to the unstable periodic orbit for positive time and for negative time.

Conley [4] and McGehee [6] showed that homoclinic orbits for the periodic orbits given by the theorem of Liapunov, exist.

For the values of μ sufficiently small and values of C just above that C_2 , the existence of invariant tori is proved by McGehee [6]. The relevant regions bounded by an invariant torus are homeomorphic to a solid torus minus a 3-ball. These regions project onto the annuli shown in figure 3.4. Counting the number of times an orbit winds around the solid torus corresponds to counting the number of times it winds around the annulus. When $C_1 - C$ is positive and sufficiently small we have a similar result (see figure 3.6).

In fact, we restrict our study to a neighborhood N of the periodic orbit and the region T of the phase space bounded by the invariant torus and N . Here a Poincaré map f is defined on the surface of section J . The points of J are the points of the phase space such that the coordinate y is equal to zero, and the coordinates \dot{y} and x are greater than zero and μ , respectively.

The symmetry of the restricted three-body problem allows us to consider on J a transversal homoclinic point with $\dot{x}=0$ for the associated Poincaré map.

In a suitable neighborhood of this homoclinic point we can construct a family of horizontal strips and a family of vertical strips. Using known results for the behavior of orbits which pass near the unstable periodic orbit, the first family can be defined as the intersection of the above neighborhood and his image by the Poincaré map. We call vertical strips to the symmetric of horizontal strips. We enumerate these strips. Let p be a point of a horizontal strip H_n and γ the projection on the position plane of the orbit segment with endpoints p and $f^{-1}(p)$ if it exist. The number n denotes the number of times γ turns around the equilibrium point.

Now, we consider values of C just above that C_2 .

The following theorem is proved with the methods of Moser [8].

Theorem. Let $(\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ be a doubly infinite sequence of positive integers with $a_n \geq d$ for all n , and $d = d(\mu, C)$ a constant. Then there exist an orbit of S such that the number of integers revolutions of this orbit around the point L_2 between two consecutive revolutions of S around E , follows the terms of the given sequence.

A similar result is obtained for values of C just above that C_1 .

Memòria presentada per a optar al grau de Llicenciada en Ciències Matemàtiques.

Director: Jaume Llibre i Saló.

INDEX

0. Pròleg	169
I. El problema restringit, circular i pla de 3 cossos.	
(1.1) Les equacions del moviment.	173
(1.2) Els punts d'equilibri relatiu.	177
(1.3) Corbes de velocitat zero i regions de moviment.	179
(1.4) Espectre de les equacions variacionals en un entorn d'un punt d'equilibri d'Euler.	180
(1.5) Simetria del problema.	183
II. El flux prop dels punts d'equilibri col·lineals.	
(2.1) El teorema de Moser-Liapunov.	185
(2.2) Estructura del flux prop d'un punt d'equilibri i classificació de les òrbites.	189
(2.3) Les aplicacions flux dins de N .	193
III. Òrbites homoclíniques.	
(3.1) Els teoremes fonamentals per l'existència d'òrbi- tes homoclíniques.	195
(3.2) Existència d'òrbites homoclíniques.	198
(3.3) Intersecció de les varietats d'òrbites asimptòti- ques sobre la superfície $x_2=0$.	200
IV. El shift de Bernoulli com a subsistema d'una aplica- ció de Poincaré en el problema restringit de 3 cossos.	
(4.1) L'aplicació f .	205
(4.2) Propietats de l'aplicació f .	207
(4.3) Les successions d'enters associades a les òrbites del tercer cos.	208

(4.4) Breu introducció del shift de Bernoulli com a subsistema d'una aplicació del quadrat.	210
(4.5) Les bandes horitzontals i verticals en R .	213
(4.6) Existència de moviments quasi-aleatoris al voltant del punt d'equilibri L_2 .	216
(4.7) Moviments quasi-aleatoris al voltant del punt d'equilibri L_1 .	218
(4.8) Una condició equivalent a (ii) per l'aplicació del shift de Bernoulli.	220
(4.9) Un resultat fonamental per verificar la condició (iii).	221
(4.10) El shift de Bernoulli com a subsistema en el problema restringit, circular i pla de 3 cossos.	222
Referències	225

P R Ò L E G

Molts problemes de la mecànica defineixen sistemes dinàmics per als quals, degut al no coneixement exacte de les condicions inicials, existeixen òrbites amb un comportament bastant imprevisible per grans intervals de temps. Aquest fenomen que pot semblar poc freqüent es presenta de fet en molts sistemes hamiltonians d'equacions diferencials.

Tots els exemples que es coneixen fins ara d'aquest tipus de moviment dins del problema de n -cossos corresponen al problema restringit de 3 cossos, en el qual es consideren dos punts materials P_1 i P_2 que es mouen sota la interacció gravitatòria i s'estudia el moviment d'un tercer cos P_3 que se suposa de massa infinitesimal, en el sentit de que està sotmès a l'atracció gravitatòria dels altres dos però no influeix en el moviment de P_1 i P_2 .

El primer dels exemples estudiats va ser el problema de Sitnikov, en el qual els dos primaris P_1 i P_2 descriuen òrbites el·líptiques amb el seu centre de masses en repòs i P_3 es mou sobre una recta perpendicular al pla determinat pels dos primaris i que passa pel centre de masses d'aquests dos. Associant a cada òrbita una successió d'enters $(\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ on cada terme a_n mesura el número de voltes enteres donades per P_1 i P_2 entre el pas n i el següent de P_3 pel pla del moviment, Alekseev va demostrar l'existència d'òrbites associades a una successió qualsevol amb lo qual quedava garantitzada l'existència de moviments oscil·latoris i de tot tipus d'evolució final. Més tard (1970-73), Moser va donar una nova exposició del problema molt més simplificada usant el shift de Bernoulli i desenvolupant unes tècniques generals, que ja han estat utilitzades darrerament en altres

problemes.

Marchal va donar un segon exemple de comportament de tipus oscil·latori en les velocitats dels 3 cossos, pero sense detallar la inclusió del shift de Bernoulli com a subsistema.

Llibre i Simó han estudiat amb tot detall dos nous problemes, el problema restringit el·líptic i rectilini de 3 cossos en el qual P_1 i P_2 van col·lisionant el·lípticament en el temps i P_3 es mou sobre la recta determinada pels dos primaris, i el problema restringit circular i pla de 3 cossos, en el qual se suposa que P_1 i P_2 descriuen òrbites circulars al voltant del seu centre de masses i P_3 es mou en el pla determinat pels altres dos. Es demostra que en els dos problemes es té el shift de Bernoulli com a subsistema lo qual prova l'existència de tots els possibles tipus d'evolució final en el problema respectiv.

Una definició rigurosa d'aquest tipus de comportament és la següent: Un moviment és quasi-aleatori si el sistema dinàmic que defineix té el shift de Bernoulli com a subsistema.

Poincaré va definir un punt homoclínic com un punt tal que la seva òrbita és asimptòtica a un punt fix tant per temps positius com per temps negatius, i va fer notar la presència d'una estructura molt complexa per al flux prop d'un punt homoclínic. En tots els problemes esmentats fins ara, la clau per l'existència de moviments quasi-aleatoris ha estat sempre l'existència d'una òrbita homoclínica al punt de l'infinit, amb una certa condició de no degeneració.

En aquest treball s'estudien moviments quasi-aleatoris en el problema restringit circular i pla de 3 cossos però, a diferència dels problemes estudiats fins ara, aquests moviments sempre tenen lloc en una regió acotada de l'espai de fases. Considerem valors de la constant de Jacobi que fan que les regions de possible moviment per al tercer cos siguin les ratllades

d'els dibuixos.

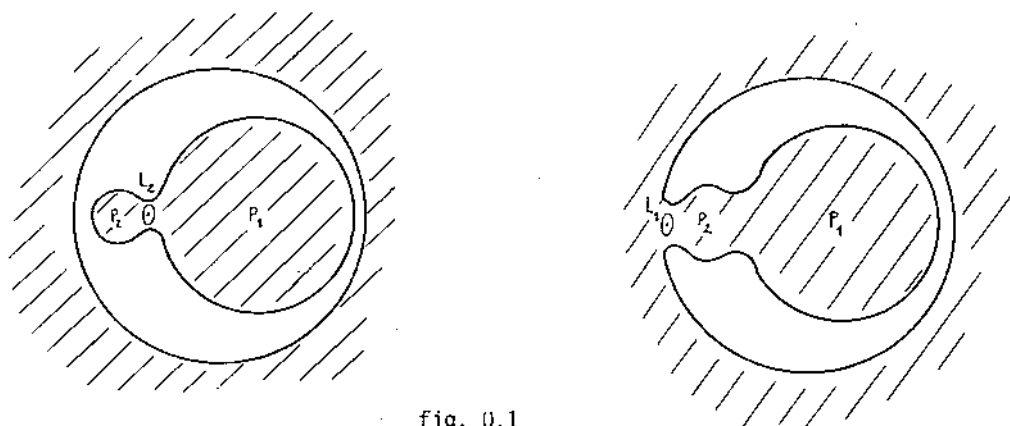


fig. 0.1

En un sistema de referència mòbil amb origen en el centre de masses de P_1 i P_2 i girant amb els dos primaris, el sistema d'equacions diferencials que descriuen el moviment de P_3 té tres punts crítics L_1 , L_2 i L_3 sobre l'eix que conté als dos primaris, i dos més L_4 i L_5 formant triangles equilàters amb P_1 i P_2 .

En els dos casos de la figura 0.1 el teorema de Liapounoff assegura que per unes certes constants de Jacobi, existeix una òrbita periòdica infinitesimal envoltant al punt d'equilibri corresponent L_1 o L_2 . Fixada la constant de Jacobi existeix una varietat d'òrbites asimptòtiques a la periòdica infinitesimal per $t \rightarrow +\infty$ i una altra d'òrbites asimptòtiques per $t \rightarrow -\infty$. Conley ha demostrat que aquestes varietats es tallen en una certa regió de l'espai de fases formant un angle diferent de zero. En el capítol III es dona una nova demostració de l'existència d'òrbites homoclíniques a la periòdica infinitesimal utilitzant raonaments de simetria. Utilitzant les tècniques de Moser, que són vàlides en un entorn d'un punt homoclínic transversal dintre d'un espai de fases de dimensió 3, es demostren els se-

güents teoremes.

TEOREMA A: Per uns certs valors de la massa μ d'un dels primaris i de la constant de Jacobi C , existeix un entorn del punt d'equilibri L_2 tal que per a qualsevol successió d'enters $(\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ amb $a_n \geq d$ per a tot enter n , on $d = d(\mu, C)$ és una constant, existeix una òrbita del tercer cos tal que el número de voltes enteres donades per aquesta òrbita al voltant del punt L_2 entre dues voltes consecutives al voltant del primari de massa més gran, segueix els termes de la successió donada.

Un resultat anàleg es compleix per al punt L_1 .

TEOREMA B: Per uns certs valors de la massa μ d'un dels primaris i de la constant de Jacobi C , existeix un entorn del punt d'equilibri L_1 tal que per a qualsevol successió d'enters $(\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ amb $a_n \geq d$ per a tot enter n , on $d = d(\mu, C)$ és una constant, existeix una òrbita del tercer cos tal que el número de voltes enteres donades per aquesta òrbita al voltant del punt d'equilibri L_1 entre dues voltes consecutives al voltant dels dos primaris, segueix els termes de la successió donada.

Finalment, es demostra l'existència del shift de Bernoulli com a sub-sistema de l'aplicació de Poincaré definida en un entorn del punt homoclínic transversal i com una conseqüència immediata d'aquest fet l'existència d'una infinitat d'òrbites periòdiques per al tercer cos.

Abans d'acabar, vull manifestar el meu agraïment al Dr. Jaume Llibre per l'eficàcia amb que ha dirigit aquest treball i per la gran ajuda que m'ha donat, però sobretot, pel seu interès i constant preocupació mostrats en tot moment. Agraïxo també la col·laboració de totes aquelles persones que d'una o altra forma han fet possible la realització de la present memòria.

I. EL PROBLEMA RESTRINGIT, CIRCULAR I PLA DE 3 COSSOS.

(1.1) Les equacions del moviment.

Siguin E i M dos cossos que anomenarem terra i lluna, de masses m_1 i m_2 respectivament, amb el centre de masses (c.d.m.) situat a l'origen d'un sistema de referència inercial X, Y (veure Szebehely [10]).

Suposem que E i M es mouen sobre un pla descrivint òrbites circulars al voltant del seu c.d.m..

Tenim de moment un problema de 2-cossos per al qual la segona llei de Kepler ens dóna

$$n^2 a^3 = C(m_1 + m_2)$$

on C és la constant de gravitació de Newton, n, la velocitat angular mitjana (constant en aquest cas per tractar-se d'un moviment circular) i 2a és la distància entre E i M.

Normalitzant, podem aconseguir $C=1$, $m_1 + m_2 = 1$ i $n=1$, per tant, el període $T=2\pi$ i també $a=1$.

Tenim així que si $m_2 = \mu$, llavors $m_1 = 1-\mu$.

Considerem $\mu \leq 1/2$, el cas $\mu \geq 1/2$ és simètric.

Introduïm ara un tercer cos de massa menyspreable el satèl·lit S, que sotmès a l'atracció gravitatòria dels altres dos es mou en el pla determinat per E i M sense afectar el moviment dels dos primaris de masses m_1 i m_2 .

Per determinar el moviment d'aquest tercer cos considerem inicialment el sistema de referència inercial X,Y, o sistema sideri.

Degut a que el moviment mitjà és 1, l'angle que formen la recta que uneix m_1 i m_2 amb l'eix X és $nt=t$, si per $t=0$ els cossos m_1 i m_2 estan

sobre l'eix X.

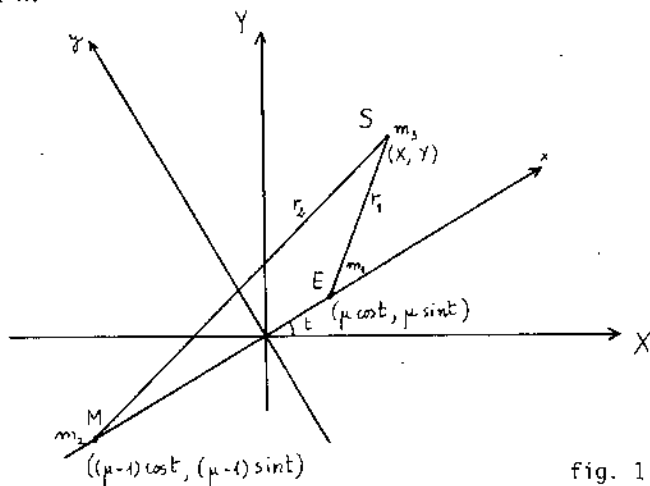


fig. 1.1

S'obtenen així les següents equacions per al moviment de m_3

$$\ddot{X} = -\frac{(1-\mu)}{r_1^3} (X - \mu \cos t) - \frac{\mu}{r_2^3} (X + (1-\mu) \cos t) \quad (1.1)$$

$$\ddot{Y} = -\frac{(1-\mu)}{r_1^3} (Y - \mu \sin t) - \frac{\mu}{r_2^3} (Y + (1-\mu) \sin t) ,$$

$$\text{on } r_1^2 = (X - \mu \cos t)^2 + (Y - \mu \sin t)^2$$

$$r_2^2 = (X + (1-\mu) \cos t)^2 + (Y + (1-\mu) \sin t)^2$$

Per eliminar el temps de les equacions, farem un canvi de manera que el moviment de m_3 quedarà referit a un sistema de coordenades (x, y) amb origen al c.d.m. i que gira amb els dos primaris, de forma que E i M estan en repòs sobre l'eix x (veure fig.1.1). Aquest serà el sistema sinòdic.

El canvi és el següent

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

i les equacions del moviment en el nou sistema de referència són:

$$\ddot{x} = -\frac{(1-\mu)}{r_1^3} (x-\mu) - \frac{\mu}{r_2^3} (x+(1-\mu)) + 2\dot{y} + x$$

$$\ddot{y} = -\frac{(1-\mu)}{r_1^3} y - \frac{\mu}{r_2^3} y - 2\dot{x} + y \quad ,$$

$$\text{on} \quad r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2$$

$$r_2^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2 \quad ,$$

que també podem escriure com

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad , \quad (1.2)$$

$$\text{on } \Omega = \Omega(x, y) = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \mu (1-\mu) \quad ,$$

$$\text{essent } \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \text{ el potencial gravitatori i}$$

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2) \text{ el potencial centrífug.}$$

Les equacions (1.2) es poden escriure com un sistema d'equacions de primer ordre introduint unes noves variables

$$\begin{array}{ll} x_1 = x & x_3 = \dot{x} \\ x_2 = y & x_4 = \dot{y} \end{array} \quad .$$

Llavors, les equacions del moviment passen a ser

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = 2x_4 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \\ \dot{x}_4 = -2x_3 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \end{array} \quad (1.3)$$

Fent el següent canvi de coordenades

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_1, x_2, y_1, y_2)$ amb $y_1 = x_3 - x_2$, $y_2 = x_4 + x_1$ les equacions (1.3) formen un sistema Hamiltonià autònom amb 2 graus de llibertat

$$\dot{x}_1 = y_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = y_2 - x_1$$

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_3 - \dot{x}_2 = y_2 - x_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}$$

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_4 = -x_2 - y_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}$$

Sigui $V(x_1, x_2) = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$ el potencial gravitatori, llavors

$\Omega(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + V(x_1, x_2)$, i per tant

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}$$

d'on

$$\dot{y}_1 = y_2 + \frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}$$

Si

$$H = H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - V(x_1, x_2) - \frac{1}{2}\mu(1-\mu) \quad (1.4)$$

podem escriure les equacions com

$$\dot{x}_1 = H_{y_1}$$

$$\dot{x}_2 = H_{y_2}$$

$$\dot{y}_1 = -H_{x_1}$$

$$\dot{y}_2 = -H_{x_2}$$

(1.5)

Com tot sistema Hamiltonià autònom, el flux d'aquest sistema dintre de la hipersuperfície, $H = \text{constant}$, de l'espai de fases, preserva el volum.

Escrivim la integral primera $H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \text{constant}$, en coordenades i velocitats sinòdiques

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2} (x_3^2 + x_4^2) - \Omega(x_1, x_2) = -\frac{C}{2}$$

Aquesta integral primera és la integral de Jacobi i C s'anomena constant de Jacobi.

La integral de Jacobi determina l'existència de corbes de velocitat zero o corbes de Hill. Fixat un valor de la constant de Jacobi, perquè la velocitat sinòdica $\frac{1}{2} (x_3^2 + x_4^2)$ sigui zero cal que $2\Omega(x_1, x_2) = C$, aquesta és l'equació de les corbes de velocitat zero. Es clar que el tercer cos només es podrà moure dins de la regió de Hill en que $2\Omega(x_1, x_2) \geq C$.

(1.2) Els punts d'equilibri relatiu.

Un punt d'equilibri relatiu és un punt del pla (x_1, x_2) tal que si en ell es posa un determinat cos amb velocitat zero, el cos no es mou d'aquest punt.

En el problema restringit pla i circular de 3 cossos existeixen només 5 punts d'equilibri relatiu, les 3 posicions col·lineals d'Euler L_1 , L_2 i L_3 sobre l'eix x_1 , i les posicions d'equilibri relatiu de Lagrange L_4 i L_5 formant un triangle equilàter tal com s'indiquen a la fig. 1.2

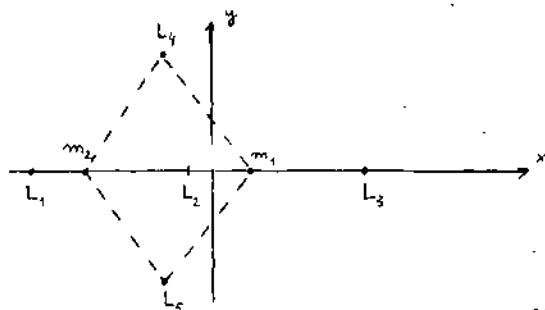


fig. 1.2

Ens interessaran els punts col·lineals i en particular L_1 i L_2 . Vegem com calcular aquests punts d'equilibri relatiu.

Per definició, en cada punt L_j , $j=1 \div 5$, es té $\dot{x}_i = 0$, amb $i=1 \div 4$, que podem escriure utilitzant el sistema (1.3) com $x_3 = x_4 = 0$, i

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 0$$

Derivant Ω s'obté

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} &= -\frac{(1-\mu)}{r_1^3} (x_1 - \mu) - \frac{\mu}{r_2^3} (x_1 + 1 - \mu) + x_1 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} &= -\frac{(1-\mu)}{r_1^3} x_2 - \frac{\mu}{r_2^3} x_2 + x_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Per qualsevol dels punts col·lineals L_1, L_2, L_3 , $x_2 = 0$. Llavors

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \Big|_{L_i} = 0, \quad i=1,2,3, \quad \text{i per tant només cal imposar}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \Big|_{L_i} = 0 \quad i=1,2,3. \quad (1.7)$$

Sigui $S_j(L_i)$, $i=1,2,3$, la distància del punt L_i a la massa $m_j \neq 0$.

En particular per al punt L_2 tenim

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1(L_2) = \mu - x_1 \\ S_2 &= S_2(L_2) = x_1 - \mu + 1 \end{aligned}$$

i d'aquí.

$$x_1 = \mu - 1 - S_2$$

$$S_1 = 1 - S_2$$

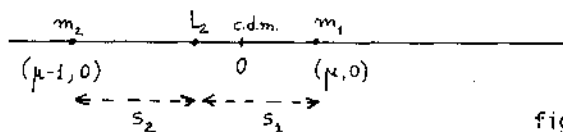


fig. 1.3

Posant (1.7) en funció de S_2 s'obté un polinomi de 5^è grau que s'anomena la quíntica d'Euler:

$$S_2^5 - (3 - \mu) S_2^4 + (3 - 2\mu) S_2^3 - \mu S_2^2 + 2\mu S_2 - \mu = 0$$

La solució S_2 pot expressar-se com a sèrie de potències de $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{3}^{1/3}$ de la següent manera:

$$S_2(L_2) = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{9} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} \dots \right] \quad (1.8)$$

Anàlogament poden obtenir-se sèries de potències per les distàncies de L_1 i L_3 a M. [10, pag.134-138].

(1.3) Corbes de velocitat zero i regions de moviment

Sigui $C_i = C(L_i)$ el valor de la constant de Jacobi per al qual les corbes de velocitat zero contenen el punt d'equilibri L_i , $i = 1 \div 5$. Les constants C_i , $i = 1, 2, 3$ depenen del valor del paràmetre de masses μ de manera que es té la següent representació gràfica per les C_i com a funcions de μ .

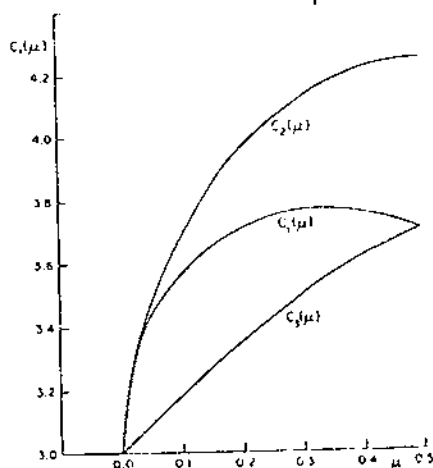


fig. 1.4

Fixat un valor del paràmetre μ i variant la constant C resulta que l'estructura topològica de les corbes de velocitat zero canvia quan $C = C_i$ obtenint-se per $\mu \neq \frac{1}{2}$ ($\mu = \frac{1}{2}$), 9 (7) estructures topològiques diferents per les corbes anteriors

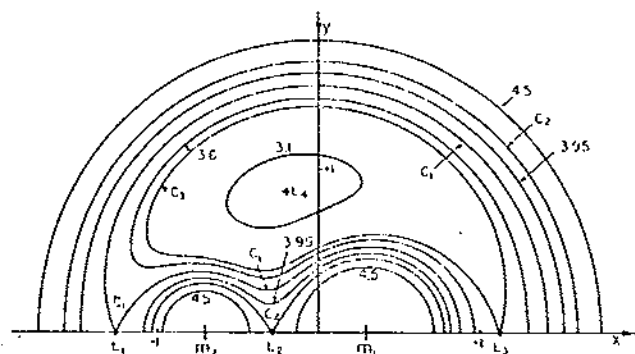


fig. 1.5

De fet estarem interessats en els casos en que $C < C_2$ i $C < C_1$ de manera que les corbes de velocitat zero tindran l'aspecte dels dibuixos següents.



fig. 1.6

El tercer cos es pot moure dins de les regions ratllades. En el primer cas només estudiarem les òrbites de m_3 que estan dins de la component acotada de la regió de possible moviment. Per $C < C_1$ veurem (capítol III) que segons un teorema de McGehee, per valors petits del paràmetre μ , les òrbites que passen suficientment a prop de L_1 no poden escapar a l'infinit. Ens limitarem a l'estudi d'aquestes òrbites.

(1.4) Espectre de les equacions variacionals en un entorn d'un punt d'equilibri d'Euler.

Per estudiar el flux a l'entorn dels punts col·lineals d'equilibri calculem les equacions variacionals lineals en un entorn d'un d'aquests punts. Desenvolupant al voltant de L_i , $i=1,2,3$ i tenint present que

$\Omega_{x_1}|_{L_i} = \Omega_{x_2}|_{L_i} = 0$, i $\Omega_{x_k x_j}|_{L_i} = 0$ per $k \neq j$, la part lineal del sistema

(1.3) és

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= 2x_4 + \Omega_{11} x_1 \\ \dot{x}_4 &= -2x_3 + \Omega_{22} x_2\end{aligned}\quad (1.9)$$

on $\Omega_{kj} = \Omega_{x_k x_j}|_{L_i}$.

Siguin

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad i \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{11} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \Omega_{22} & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

podem escriure el sistema en forma matricial

$$\dot{x} = Ax$$

L'equació característica és

$$\theta^4 + \theta^2(4 - \Omega_{22} - \Omega_{11}) + |\text{Hess } \Omega| = 0.$$

Calculem aquestes derivades en els punts L_i :

$$\Omega_{11} = -(1-\mu) \frac{-2(x_1-\mu)^2 + x_2^2}{r_1^5} - \mu \frac{-2(x_1+1-\mu)^2 + x_2^2}{r_2^5} + 1 \quad (1.10)$$

$$\Omega_{22} = -(1-\mu) \frac{r_1^2 - 3x_2^2}{r_1^5} - \mu \frac{r_2^2 - 3x_2^2}{r_2^5} + 1.$$

Farem els càlculs per al punt L_2

$$\Omega_{11}|_{L_2} = (1-\mu) \frac{2}{r_1^3} + \frac{2\mu}{r_2^3} + 1 > 0 \quad (1.11)$$

Vegem que $\Omega_{22} < 0$. En efecte,

$$\Omega_{22}|_{L_2} = -\frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} + 1 = -\frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^2} \cdot \frac{1}{r_2} + 1 \quad (1.12)$$

Com $\Omega_1|_{L_2} = 0$, tenim

$$\frac{\mu}{r_2^2} = x_1 + \frac{1-\mu}{r_1^2} = \mu - 1 + r_2 + \frac{1-\mu}{r_1^2}$$

doncs $S_2 = r_2$ si el tercer cos està a L_2 .

Substituint a (1.12) i com $r_1 + r_2 = 1$, resulta que

$$\Omega_{22}|_{L_2} = -(1-\mu) \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) \left(\frac{1}{r_1^2} - r_1 \right)$$

Com r_1 és la distància de L_2 a m_1 , $r_1 < 1$, llavors, $\frac{1}{r_1^2} - r_1 > 0$,

i per tant, $\Omega_{22}|_{L_2} < 0$.

De forma semblant es demostra que

$$\text{Hess } \Omega|_{L_i} = \Omega_{11}|_{L_i} \cdot \Omega_{22}|_{L_i} < 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Si es resol l'equació característica s'obtenen dues solucions reals canviades de signe $\pm \lambda$, i dues imaginàries $\pm i\nu$, per tant, els punts d'equilibri col·lineals són inestables en el sentit de que existeixen dues varietats asimptòtiques al punt, una estable i una inestable. Segons el teorema de Hartman, del fet de que la part lineal del flux sigui inestable es dedueix la inestabilitat per al flux global.

Hom pot demostrar que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \\ \lambda \\ \lambda\sigma \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma \\ -\lambda \\ \lambda\sigma \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\tau \\ i\nu \\ -\nu\tau \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\tau \\ -i\nu \\ -\nu\tau \end{pmatrix}$$

$$\text{on } \sigma = \frac{\lambda^2 - a}{2\lambda} = \frac{-2\lambda}{b + \lambda^2} < 0, \quad \tau = \frac{a + v^2}{2v} = \frac{2v}{v^2 - b} > 0,$$

són els vectors propis de valors propis $+\lambda$, $-\lambda$, iv , $-iv$, respectivament.

Podem escriure la solució general com

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} v_1 + \alpha_2 e^{-\lambda t} v_2 + 2 \operatorname{Re}(\beta e^{ivt} w_1) \quad (1.13)$$

on $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ i $\beta = \beta_1 + \beta_2 i$, són constants que depenen de les condicions inicials.

Observem que per $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ la solució és periòdica. La projecció d'aquesta òrbita periòdica sobre el pla del moviment és una el·lipse amb l'eix major segons la direcció de l'eix x_2 . Per altra part, si $\alpha_1 = 0$, l'òrbita (1.13) tendeix asimptòticament a la periòdica per temps positius, i si $\alpha_2 = 0$ ho fa per temps negatius.

En el capítol II usant un teorema de Liapounoff veurem que aquesta òrbita periòdica infinitesimal que hi ha a l'entorn de L_i , $i=1,2,3$, si només tenim en compte la part lineal del flux, es conserva si considerem el flux global.

(1.5) Simetria del problema.

El problema restringit de 3 cossos que estem estudiant té una certa simetria en el sentit de que si $(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$ és solució del sistema diferencial (1.3), llavors, $(x_1(-t), -x_2(-t), -\dot{x}_1(-t), \dot{x}_2(-t))$ també és solució. El significat geomètric d'aquesta simetria és el representat en la figura 1.7.

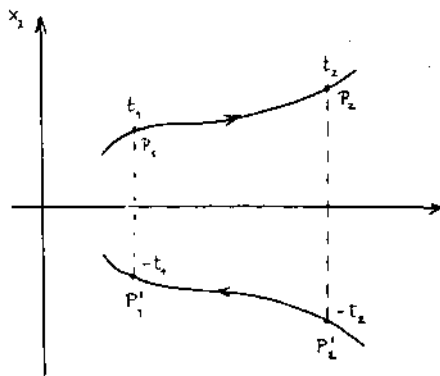


fig. 1.7

Suposem que en un temps t_1 el tercer cos està en el punt $P_1 = (x_1(t_1), x_2(t_1))$ del pla del moviment movent-se amb una velocitat sinòdica $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$ de manera que seguint la seva òrbita arriba a un punt $P_2 = (x_1(t_2), x_2(t_2))$ en el temps t_2 . Aleshores, la simètrica respecte l'eix x_1 de la corba solució que passa per P_1 i P_2 és també una solució del sistema pero sobre aquesta, el cos es mou de $P'_2 = (x_1(-t_2), -x_2(-t_2))$ a $P'_1 = (x_1(-t_1), -x_2(-t_1))$ amb velocitat $(-\dot{x}_1(-t), \dot{x}_2(-t))$.

Per altra banda, és clar que si dues òrbites simètriques es tallen ho fan sobre l'eix x_1 .

Si introduïm el temps com una variable més podem definir la simetria com una transformació lineal:

$$S: (x_1, x_2, y_1, y_2, t) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, s) \quad (1.14)$$

on $\xi_1 = x_1, \xi_2 = -x_2, \eta_1 = -y_1, \eta_2 = y_2, s = -t$.

Es fàcil comprovar que S deixa invariant el hamiltonià (1.4) i que $S^2 = \text{Id}$. Per més detalls veure [1, pag.426].

II. EL FLUX PROP DELS PUNTS D'EQUILIBRI COL·LINEALS

(2.1) El teorema de Moser-Liapounoff.

Per estudiar millor el flux del sistema prop dels punts col·lineals L_1 i L_2 introduïrem previament alguns canvis de coordenades a fi d'obtenir una expressió del hamiltonià i de les equacions més assequible als nostres propòsits. Vegem alguns resultats clàssics sobre sistemes hamiltonians que aplicarem al nostre problema.

Sigui

$$\begin{aligned}\dot{x}_v &= H_{y_v}(x,y) \\ \dot{y}_v &= -H_{x_v}(x,y)\end{aligned}\quad (2.1)$$

amb $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $v = 1, 2, \dots, n$, un sistema hamiltonià amb n graus de llibertat tal que el punt $x_v = y_v = 0$ sigui un punt d'equilibri. Suposem que $H(x,y)$ és una funció real analítica en un entorn de l'origen.

En aquestes condicions Moser [7] ha demostrat el següent

TEOREMA 2.1: (Moser) Suposem que els valors propis de la matriu de la part lineal del sistema $\alpha_1, \dots, \alpha_n, -\alpha_1, \dots, -\alpha_n$ són $2n$ números complexos diferents. Siguin α_1, α_2 independents sobre els reals i $\alpha_v \neq n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2$ per a tot parell d'enters n_1, n_2 i per a tot $v \geq 3$.

Aleshores, existeix una família de solucions de (2.1) de la forma

$$\begin{aligned}x_v &\doteq \varphi_v(\xi_1, \xi_2, n_1, n_2) \\ y_v &= \psi_v(\xi_1, \xi_2, n_1, n_2)\end{aligned}\quad (2.2)$$

on

$$\begin{aligned}\xi_T &= \xi_T^0 e^{ta_T(\zeta^0)} \\ \eta_T &= \eta_T^0 e^{-ta_T(\zeta^0)}\end{aligned}\quad (2.3)$$

per $T = 1, 2$

í, $\alpha_1(\zeta^0) = \alpha_1 + \dots$, $\alpha_2(\zeta^0) = \alpha_2 + \dots$, són sèries de potències convergents en $\zeta_T^0 = \xi_T^0 \cdot \eta_T^0$.

Les sèries φ_v, ψ_v convergeixen en un entorn de l'origen i el rang de la matriu

$$\begin{pmatrix} \varphi_{v\xi_T} & \varphi_{v\eta_T} \\ \psi_{v\xi_T} & \psi_{v\eta_T} \end{pmatrix}$$

és 4.

Les solucions depenen de quatre paràmetres complexos ξ_T^0, η_T^0 . Si a més, $\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2$ contenen els seus complexos conjugats, les solucions poden ser triades reals i depenen de 4 paràmetres reals.

Si el sistema (2.1) és real, les $\bar{\alpha}_v, v=1, \dots, n$, són també valors propis i en el cas particular de que els valors propis α_1, α_2 del teorema 2.1 siguin tals que $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 \neq 0$ real, $\alpha_2 = -\bar{\alpha}_2 \neq 0$ imaginari pur, tenim per les equacions diferencials

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_T &= \alpha_T(\zeta) \cdot \xi_T \\ \dot{\eta}_T &= -\alpha_T(\zeta) \eta_T\end{aligned}\quad (2.4)$$

que

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_1(\zeta_1, \zeta_2)} &= \alpha_1(\zeta_1, \zeta_2) \\ \overline{\alpha_2(\zeta_1, \zeta_2)} &= -\alpha_2(\zeta_1, \zeta_2),\end{aligned}\quad (2.5)$$

i les solucions de (2.4) estan donades per les funcions exponencials (2.3) on ara l'exponent ta_T és una sèrie real de potències en $\zeta_T^0 = \xi_T^0 \cdot \eta_T^0$,

$\tau = 1,2$ i ta_2 és imaginari pur. Posant $a_1 = \alpha$, $a_2 = i\beta$ les solucions (2.3) són sèries reals de potències en $e^{i\alpha}$, $\cos \beta$, $\sin \beta$. Observem que en aquest cas existeix una família de solucions periòdiques reals dependent de dos paràmetres reals. Aquest resultat es coneix com a teorema de Liapounoff. De fet, el teorema 2.1 de Moser és una generalització de l'anterior. Donarem un enunciat més precís del Teorema de Liapounoff [1].

Considerem el sistema Hamiltonià (2.1) on H és una funció de classe C^1 amb $l \geq 2$. Suposem que l'origen és un punt crític per H i que $\alpha_1, \dots, \alpha_n, -\alpha_1, \dots, -\alpha_n$ són els valors propis del sistema linealitzat.

TEOREMA 2.2: (Liapounoff) Si $\alpha_2 = i\beta$, $\beta > 0$, és a dir $\alpha_2, -\alpha_2$ imaginaris purs i cap α_j per $j=1,3,\dots,n$ és un múltiple enter de α_2 , aleshores existeix una família uniparamètrica γ_ϵ definida per $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ d'òrbites tancades solucions de (2.1), tal que tendeix al punt crític 0 quan $\epsilon \rightarrow 0$ i tal que els seus períodes tendeixen a $2\pi/\beta$ per $\epsilon \rightarrow 0$.

Aquesta família uniparamètrica d'òrbites tancades formen una subvarietat invariant de dimensió 2 que passa a través del punt crític.

A fi d'aplicar aquests teoremes al problema restringit de 3 cossos, Conley [3] ha adaptat aquesta generalització del Teorema de Liapounoff deguda a Moser al cas especial d'un sistema hamiltonià autònom i analític amb 2 graus de llibertat com és el del nostre problema.

Sigui

$$H(x,y) = \lambda x_1 y_1 + \frac{1}{2} \nu (x_2^2 + y_2^2) + O_3(x,y) \quad (2.6)$$

amb $\lambda, \nu > 0$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ el hamiltonià d'un sistema d'equacions diferencials per al qual l'origen és un punt d'equilibri no degenerat.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= H_{y_1} = \lambda x_1 + O_2(x,y) \\ \dot{y}_1 &= -H_{x_1} = -\lambda y_1 + O_2(x,y) \\ \dot{x}_2 &= H_{y_2} = \nu y_2 + O_2(x,y) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\dot{y}_2 = -H_{x_2} = -v x_2 + O_2(x, y)$$

La matriu de la part lineal del sistema diferencial té un parell de valors propis reals $\pm \lambda$ i un parell d'imaginaris purs $\pm i\nu$.

Observem que per les equacions variacionals lineals les funcions $x_1 y_1$, $x_2^2 + y_2^2$ són constants sobre les solucions a menys de termes de segon ordre. L'aplicació del Teorema de Moser a aquest cas especial ens dirà que el flux del sistema no lineal admet integrals locals anàlogues a aquestes.

TEOREMA 2.3: Per al hamiltonià (2.6) que té l'origen com a punt d'equilibri no degenerat amb valors propis $\pm \lambda$, $\pm i\nu$, existeix una transformació real analítica pròxima a la identitat

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi + O_2(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}) \\ y_1 &= \eta + O_2(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}) \\ z &= x_2 + iy_2 = \zeta + O_2(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

on ξ, η són variables reals i $\zeta, \bar{\zeta}$ variables complexes conjugades, i existeixen sèries de potències α, β en les variables $X = \xi, \eta$ i $|\zeta|^2$ de la forma

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda + O_1(X, |\zeta|^2) \\ \beta &= -i\nu + O_1(X, |\zeta|^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

tals que les solucions de les equacions transformades són

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi^0 \exp(t\alpha) \\ \eta(t) &= \eta^0 \exp(-t\alpha) \\ \zeta(t) &= \zeta^0 \exp(t\beta) \\ \bar{\zeta}(t) &= \bar{\zeta}^0 \exp(-t\beta) \end{aligned} \quad (2.10)$$

aquí, ξ^0 , η^0 , ζ^0 , es determinen de les condicions inicials.

Els coeficients de α i β són respectivament real i imaginari per tant, les funcions $\xi, \eta = x_1 y_1 + O_3(x, y)$ i $|\zeta|^2 = x_2^2 + y_2^2 + O_3(x, y)$ són integrals

Locals i en conseqüència α i β també ho són.

El hamiltonià transformat és

$$K(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}) = \lambda \xi \eta + \frac{\nu}{2} |\zeta|^2 + O_2(\chi, |\zeta|^2) \quad (2.11)$$

No és restrictiu suposar que el sistema hamiltonià és de la forma (2.6) doncs, és un resultat clàssic [9] que en general, donat un sistema hamiltonià amb n graus de llibertat $\dot{z} = f(z)$ amb $z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, tal que l'origen sigui un punt fix, si A és la matriu de la part lineal del sistema amb valors propis α_i , $\alpha_{i+n} = -\alpha_i$, $i = 1, \dots, n$ que suposarem tots diferents, existeix una transformació lineal canònica $z = \phi w$, $\det. \phi \neq 0$, tal que $\phi^{-1} A \phi = \text{diag}(\alpha_i)$, $i = 1, \dots, 2n$.

Resumint podem dir que cada solució col·lineal L_i del problema restringit circular i pla de 3 cossos, té al seu voltant una família uniparamètrica F_i d'òrbites periòdiques junt amb una varietat estable i una inestable. A més, se segueix del teorema de Liapounoff que les òrbites periòdiques de F_i envolten la solució col·lineal L_i . Fixada la constant de Jacobi les hipersuperfícies invariants són varietats de dimensió 3, les quals, per determinats valors de la constant de Jacobi contenen exactament una d'aquestes òrbites periòdiques. Ens restringirem a aquests valors de la constant de Jacobi.

Per altra part, el teorema 2.3 ens dóna unes bones coordenades per estudiar les solucions prop dels punts d'equilibri L_1 i L_2 . Els resultats són els mateixos per els dos punts d'equilibri, per tant, a partir d'ara considerarem que el punt crític és l'origen i que el sistema d'equacions diferencials és el que s'obté del hamiltonià (2.11).

(2.2) Estructura del flux prop d'un punt d'equilibri i classificació de les òrbites.

Sigui B una bola tancada al voltant del punt d'equilibri en la qual totes les sèries de potències del teorema 2.3 siguin convergents i de mane-

ra que, tant aquestes sèries com les seves primeres derivades parcials estiguin dominades pels seus termes d'ordre més baix.

Fixada una constant h , direm $N = N(h, c)$ al subconjunt de B format pels punts de la varietat $K = h$ tals que $|\xi - \eta| \leq c$ (veure fig. 2.1).

Definim S_e com el conjunt de punts de N tals que $\xi - \eta = c$ (són els punts de $|\xi - \eta| = c$ que estan més a prop de la terra) i S_m com el conjunt de punts de N amb $\xi - \eta = -c$ (punts de $|\xi - \eta| = c$ a prop de la lluna).

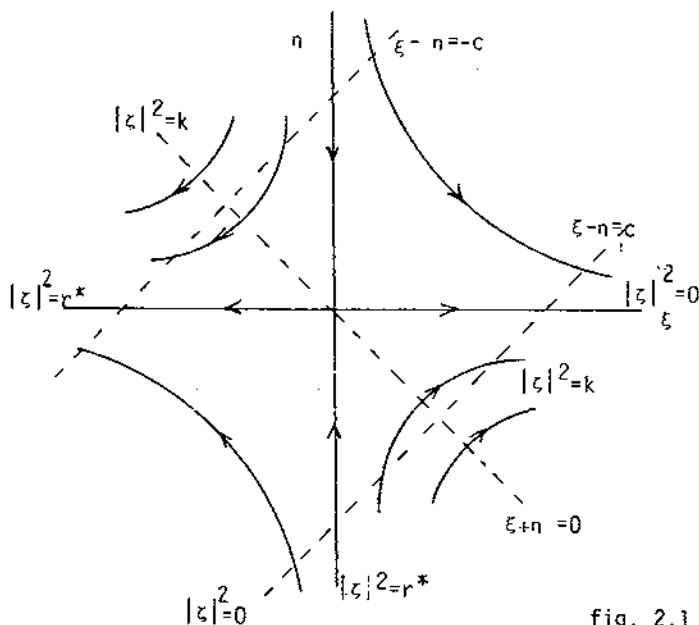


fig. 2.1

Proposició 2.1: Sempre que h i c siguin prou petits, N és topològicament equivalent al producte d'una esfera S^2 per un interval tancat de la recta, I . A més, S_e i S_m són dos S^2 que formen les fronteres del $S^2 \times I$ anterior.

Demostració: Podem escriure l'equació $K = h$ com

$$\frac{\lambda}{4} (\xi + \eta)^2 + \frac{\nu}{2} |\zeta|^2 + O_3 = h + \frac{\lambda}{4} (\xi - \eta)^2$$

Com que estem considerant punts dins de B podem menysprear els termes de tercer ordre. Aleshores, fixat un valor de $\xi - \eta \in [-c, c]$ l'equació ante-

rior descriu un conjunt topològicament equivalent a una S^2 . Quan $\xi - \eta$ recorre l'interval $[-c, c]$ obtenim per N un conjunt homeomorf a $S^2 \times I$. //

Direm equador al conjunt de punts d'una S^2 tals que $\xi + \eta = 0$. Els conjunts de punts amb $\xi + \eta > 0$, $\xi + \eta < 0$ seran els hemisferis inferior (n^-) i superior (n^+) respectivament.

Del teorema 2.3, $\xi \cdot \eta$ i $|\zeta|^2$ són integrals locals del sistema diferencial. Per tant, la projecció del flux en N sobre el pla ξ, η té l'aspecte d'un punt hiperbòlic (veure fig. 2.1), mentre que la projecció sobre el pla ζ dóna un centre (veure fig. 2.2).

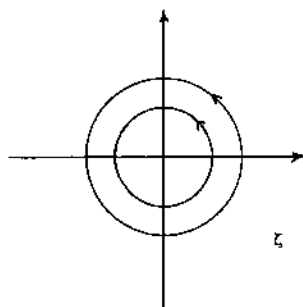


fig. 2.2

Observem que la projecció de N sobre el pla ξ, η està acotada per la hipèrbola $K(\xi, \eta, 0, 0) = h$ (corresponent a les corbes de velocitat zero, $|\zeta|^2 = 0$) i pels dos segments $\xi - \eta = \pm c$.

L'estructura del flux en un entorn del punt d'equilibri ens permetrà fer una classificació de les òrbites segons el seu capteniment prop d'aquest punt.

Sigui r^* el valor de $|\zeta|^2$ quan $\xi \cdot \eta = 0$, llavors, $r^* \approx \frac{2h}{v}$. El conjunt de punts de N on $|\zeta|^2 = \text{ctant} > r^*$ està format per dos cilindres d'òrbites en N , que sobre el pla ξ, η corresponen als dos segments hiperbòlics determinats per $\xi \cdot \eta = \text{constant} < 0$. Cada un d'aquests cilindres va d'un hemisferi d'una de les esferes frontera a l'altre hemisferi de la mateixa esfera. Les òrbites que contenen estan dins de N durant un temps finit passat el qual, tornen a

sortir per l'hemisferi contrari de la mateixa esfera. Els dos segments hiperbòlics determinats per $\xi, \eta = \text{constant} > 0$ corresponen a dos cilindres d'òrbites sobre les quals $0 < |\zeta|^2 = \text{constant} < r^*$. Aquests cilindres travessen la regió N d'una de les esferes frontera a l'altra però sempre sobre el mateix hemisferi. Les òrbites d'aquests cilindres s'anomenen òrbites de trànsit perquè passen de la regió que conté la lluna a la regió de la terra i recíprocament. El punt $\xi = \eta = 0$ correspon a una òrbita periòdica en N, l'única òrbita completa continguda en N. Els quatre segments semioberts dels eixos corresponen a 4 cilindres d'òrbites en N, que tendeixen a l'òrbita periòdica quan el temps creix si $\xi = 0$, o per temps decreixents si $\eta = 0$. Aquestes òrbites s'anomenen òrbites asimptòtiques. Sobre elles i sobre la periòdica es té $|\zeta|^2 = r^*$ (veure fig. 2.1).

Sigui n la component de la frontera de N que separa aquesta regió de la que conté a la terra. Només considerarem els dos conjunts asimptòtics que tallen a n . Els hi direm A^+ i A^- segons que les òrbites tendeixin a l'òrbita periòdica per temps positius o negatius (veure fig. 2.3).

Fixat un valor de c , la intersecció de $\xi = 0 (\eta = 0)$ amb $\xi - \eta = c$ és una corba homeomorfa a un cercle a^+ (a^-) ja que dins de N els termes de tercer ordre són menyspreables $|\zeta|^2 + 0_3 = \frac{2h}{v}$.

Les corbes a^+ i a^- determinen sobre l'esfera un parell de casquets, d^+ i d^- , que corresponent a punts sobre òrbites de trànsit. Es clar que prenent la part lineal del sistema, l'àrea de d^+ coincideix amb la de d^- . En la figura 2.3 s'han representat només els cilindres que tenen intersecció amb n , en aquest dibuix R^+ i R^- representen els anells $r^* < |\zeta|^2 < k$ sobre els hemisferis superior e inferior respectivament.

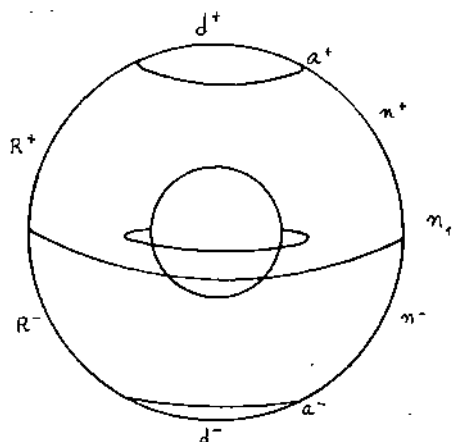


fig. 2.3

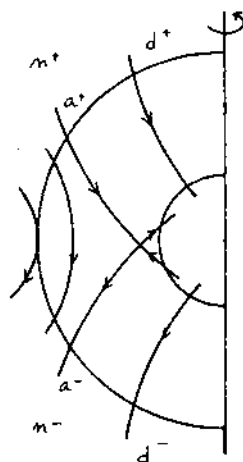


fig. 2.4

El comportament del flux en un entorn de l'òrbita periòdica infinitesimal s'obté fent girar la fig. 2.4 al voltant de l'eix vertical.

(2.3) Les aplicacions flux dins de N.

El flux és transversal a cada hemisferi obert de les esferes. Llavors, podem definir una aplicació ψ entre els parells d'anells de n , $r^* < |\zeta|^2 < K$, seguint el flux dins de N de la següent manera:

A cada punt P de R^+ li fem correspondre el primer punt d'intersecció de l'òrbita que passa per P amb l'hemisferi inferior. L'aplicació ψ així definida és un homeomorfisme. De forma semblant podem definir un homeomorfisme entre el parell d'anells situats sobre l'altra esfera frontera i els resultats són els mateixos.

Segons el teorema de Moser, $|\zeta|^2$ és una integral local, per tant, l'aplicació ψ conserva $|\zeta|^2$.

Direm $\rho = |\zeta|^2$ i $\theta = \arg \zeta$. Sigui $\Delta\theta$ la funció contínua definida en el domini de ψ que dóna el canvi d'argument de ζ sota l'aplicació anterior.

Proposició 2.2: La funció $\Delta\theta$ depèn només de la coordenada radial ρ de la següent manera

$$\Delta\theta(\rho) = -\frac{\nu}{\lambda} \ln(\rho - r^*) + g(\rho - r^*)$$

on $g(\rho - r^*)$ és una sèrie de potències en $\rho - r^*$ amb terme constant diferent de zero.

En particular, $\frac{\partial \Delta \theta}{\partial \rho}$ és d'ordre $\frac{1}{|\rho - r^*|}$ quan $\rho \rightarrow r^*$.

La demostració d'aquesta proposició és deguda a Conley [3].

De la Proposició 2.2 es dedueix una conseqüència important.

Corol·lari 2.1: Sigui γ_1 un arc en el domini de ψ amb un punt extrem P sobre a^+ , i γ_2 un arc qualsevol en la imatge de ψ tal que un dels seus punts extrems Q estigui sobre a^- . Llavors, la imatge de γ_1 seguint el flux dins de N és un arc que espiralant talla infinites vegades a l'arc γ_2 en qualsevol entorn de Q . (veure fig. 2.5)

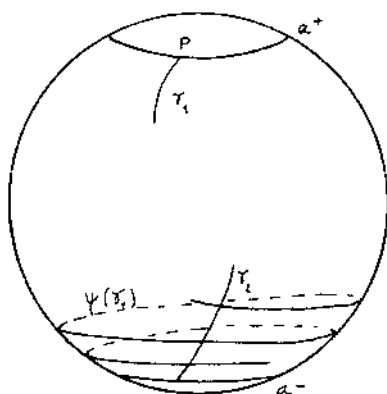


fig. 2.5

Aquest resultat és clar a partir de la proposició anterior ja que per als punts de γ_1 prop de p , la coordenada radial ρ tendeix a r^* i per tant, la variació de l'argument de z es fa arbitràriament gran. Sobre l'esfera es veurà que $\psi(\gamma_1)$ és un arc arbitràriament llarg que espirala infinites vegades tendint a a^- .

També es poden definir homeomorfismes entre dos parells de discs d'òrbites de trànsit prenent un disc sobre cada esfera frontera i seguint sempre el flux per dintre de N . La proposició 2.2 i el corol·lari 2.1 seran també vàlids en aquests casos.

III. ÒRBITES HOMOCLÍNQUES

(3.1) Els teoremes fonamentals per l'existència d'òrbites homoclíniques.

Donada una constant de Jacobi $C \lesssim C_i$ $i=1,2,3$ tenim una única òrbita periòdica infinitesimal a l'entorn de L_i , $i=1,2,3$.

Una òrbita α - (resp. ω -) asimptòtica és una òrbita que té per conjunt α - (resp. ω -) límit a la solució periòdica en N . Una òrbita és homoclínica si és asimptòtica pels dos extrems.

Conley [4] i McGehee [6] han demostrat per L_1 i L_2 que si les varietats estable e inestable d'òrbites asimptòtiques no coincideixen (en aquest cas totes les òrbites de les varietats estable e inestable serien homoclíniques), existeixen òrbites homoclíniques (veure fig. 3.1, 3.2)

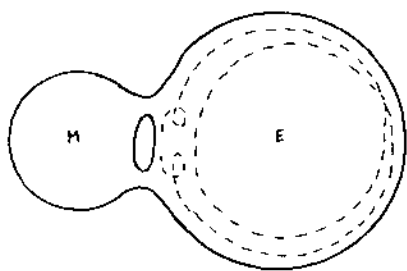


fig. 3.1

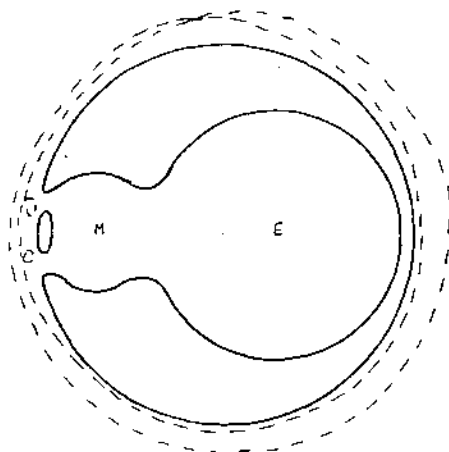


fig. 3.2

Per precisar els resultats de Conley i McGehee considerem una constant de Jacobi $C \lesssim C_1$, i aïllem els punts L_1 i L_2 en regions on el flux és ben conegut ja que el seu aspecte qualitatiu és el donat per les equacions

variacionals lineals com a conseqüència del teorema de Hartman .

Per valors de μ suficientment petits, la distància dels punts d'equilibri L_i , $i=1,2$ a la lluna és aproximadament $\tilde{\mu} = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}$, per tant, les línies verticals $x_1 = \tilde{\nu} \pm c_1 \tilde{\mu}$, $x_1 = \tilde{\nu} \pm b_1 \tilde{\mu}$, on $\tilde{\nu} = \nu - 1$, $b_1 < 1 < c_1$ divideixen la regió de Hill en cinc conjunts fonamentals D, D_1, D_2, D_3, D_4 (veure fig. 3.3)

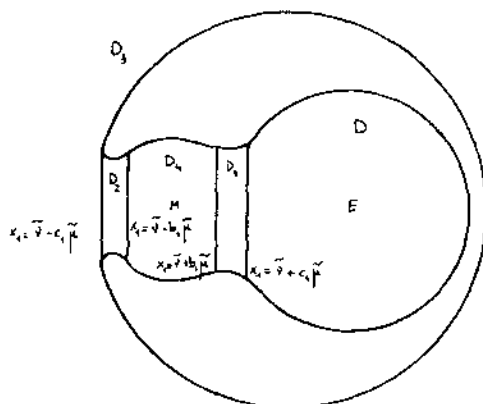


fig. 3.3

De fet ens interessarà el flux en les regions P, N_1, N_2 , i P_3 de la hipersuperfície de l'espai de fases amb una constant de Jacobi fixada, que es projecten sobre D, D_1, D_2 i D_3 respectivament.

TEOREMA 3.1: (McGehee) Existeixen unes constants $b_1 < 1 < c_1$ i un obert O_2 del pla (ν, C) que conté el gràfic de la corba $C = C_2(\nu)$ (veure fig. 1.3) per μ prou petits tal que si $(\nu, C) \in O_2$, llavors:

(1) La hipersuperfície de Jacobi conté un tor invariant que separa E de M . La projecció sobre el pla del moviment és l'anell de la fig. 3.4.

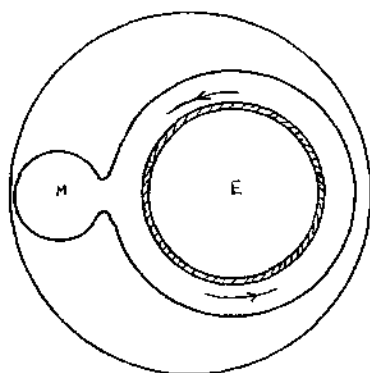


fig. 3.4

(2) Per $C < C_2(\nu)$ el flux en N_1 és qualitativament igual al flux donat per les equacions variacionals lineals.

(3) Sigui $T^{(1)}$ la subvarietat de la hipersuperfície de Jacobi acotada pel tor invariant i per la frontera de N_1 comú a P, n_1 . Aleshores, existeix una funció $\bar{\theta}: T^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

(a) $\bar{\theta}$ és una coordenada meridional angular per $T^{(1)}$

(b) $\bar{\theta}$ és estrictament creixent sobre les òrbites (veure fig. 3.5)

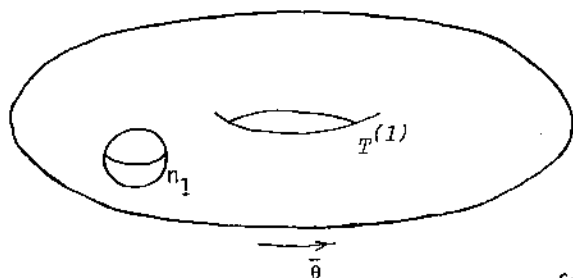


fig. 3.5

La demostració d'aquest teorema es basa en un argument de pertorbació de la línia $C = C_2(\nu)$ del pla (ν, C) en un entorn del punt $\nu = 0, C = C_2$.

També es compleix un teorema semblant per constants de Jacobi

$$C < C_1(\nu)$$

TEOREMA 3.2: (McGehee) Existeixen constants b_1 i c_1 i un conjunt obert

O_1 que conté el gràfic de la corba $C = C_1(\nu)$ (veure fig. 1.3) per ν prou petites, tal que si $(\nu, C) \in O_1$ llavors:

(1) La hipersuperfície de Jacobi conté un tor invariant que separa la terra i la lluna de l'infinit (veure fig. 3.6)

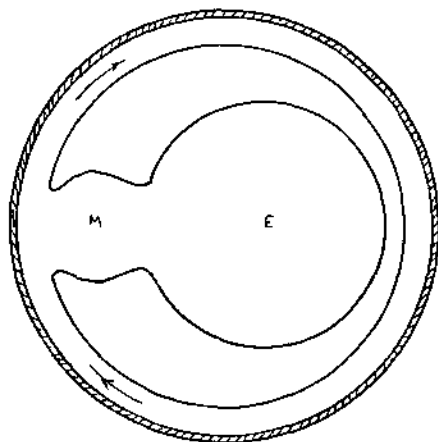


fig. 3.6

(2) Per $C < C_1(u)$ el flux en N_2 és qualitativament el mateix que el flux per les equacions linealitzades.

(3) Si $T^{(2)}$ és la subvarietat de la hipersuperfície de Jacobi acotada pel tor invariant i per la component de la frontera de N_2 comú a P_3 , aleshores, existeix una funció $\bar{\theta}: T^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(a) $\bar{\theta}$ és una coordenada meridional angular per $T^{(2)}$

(b) $\bar{\theta}$ és estrictament creixent a lo llarg de les òrbites.

Observem que per valors de (u, C) e O_1 l'existència d'aquest tor invariant fa que les òrbites de la hipersuperfície de Jacobi que passen a prop de L_1 , no puguin escapar-se a l'infinit.

La tercera part d'aquests dos teoremes ens diu que el creixement de $\bar{\theta}$ a lo llarg d'un segment d'òrbita en $T^{(i)}$ $i=1,2$, que tingui els punts extrems sobre la frontera de N_i és quasi un múltiple enter de 2π diferent de zero. A més, per continuïtat respecte les condicions inicials, el creixement de $\bar{\theta}$ sobre qualsevol segment d'òrbita amb extrems en N_i i que pugui transformar-se en el primer mantenint sempre els extrems sobre N_i , és un número pròxim al mateix múltiple enter de 2π . Per altra part, si una òrbita està molt temps a $T^{(i)}$, l'augment de $\bar{\theta}$ esdevé arbitràriament gran.

(3.2) Existència d'òrbites homoclíniques.

Direm N a un qualsevol dels conjunts N_1 o N_2 dels teoremes 3.1 i 3.2. Sigui n la component de ∂N comú a P o P_3 segons es tracti de N_1 o N_2 . Amb un mateix raonament demostrarem l'existència d'òrbites homoclíniques dels tipus representats a la fig. 3.1 i 3.2.

Només cal veure que existeix algú segment d'òrbita amb punts extrems sobre a^+ i a^- .

El flux hamiltonià preserva àrea sobre l'esfera n (veure fig. 2.3) per tant, alguna òrbita que travessa N de $x_1 = \tilde{u} + b_1 \tilde{u}$ a $x_1 = \tilde{v} + c_1 \tilde{u}$ (veure fig. 3.3) ha de tornar a la regió que conté a la lluna travessant

N en sentit contrari. Aleshores, existirà un segment d'òrbita δ_R que uneix un punt R de d^- amb un punt R' de d^+ .

Unim el punt R a la corba a^- per un arc γ sobre d^- i seguim cada punt d'aquest arc pel flux fins que talli a n en un punt de d^+ .

Donat un punt Q de γ definim, si existeix

$$\alpha(Q) = \min \{t > 0 \mid \varphi(t, Q) \in d^+\}$$

on $\varphi(t, Q)$ representa l'òrbita que per temps igual a zero passa pel punt Q.

Sigui α_0 el temps necessari per anar de R a R' sense deixar PUN, és a dir, $\alpha(R) = \alpha_0$.

Direm γ' al subarc obert i maximal, tal que sobre tot γ' , α està definida i és una funció real contínua. Si γ' és igual a γ , la imatge d'aquest arc estarà continguda en d^+ i tindrem un segment d'òrbita que unirà un punt de a^- amb un punt de d^+ . En cas contrari, la funció α no estarà acotada sobre γ' . En efecte, si \bar{R} és el primer punt de γ que no està en γ' i suposem que α és acotada, per continuïtat respecte les condicions inicials podríem definir $\alpha(\bar{R}) = \lim_{Q \rightarrow \bar{R}} \alpha(Q)$ i per tant, γ' ja no seria maximal. Suposem doncs, que α no és acotada sobre γ' . Sigui $n(R)$ el número de voltes que δ_R dona al voltant del tor invariant. En els punts de γ' pròxims a \bar{R} , la funció α s'haurà fet arbitràriament gran. Aleshores, els segments d'òrbites corresponents a aquests punts s'hauran fet arbitràriament llargs, però, per continuïtat $n(R)$ és constant sobre l'arc γ' . Per tant, és necessari que existeixin subarcs d'aquests segments d'òrbites dins de N que estiguin molt a prop del conjunt asimptòtic, per lo que, la imatge de \bar{R} per l'aplicació flux ha d'estar sobre a^+ . Tindrem en aquest cas un segment d'òrbita que uneix un punt \bar{R} de d^- amb un punt de a^+ .

Podem suposar ara que δ és un segment d'òrbita en PUN que uneix un punt M de a^- amb un punt S de d^+ . Amb extrem a M considerem un arc sobre la

corba a^- . Suposem que la funció α no està acotada sobre a^- . Aleshores, igual que abans, existirà algun punt de a^- tal que la seva imatge pel flux estarà sobre a^+ i tindrem una òrbita homoclínica. Si α es pot definir sobre tot a^- , voldria dir que per l'aplicació flux es transformaria en una corba continguda en d^+ , però això no pot passar perquè a^+ i a^- determinen sobre n àrees iguals i el flux preserva àrea sobre l'esfera.

Hem demostrat que o bé existeix alguna òrbita homoclínica o bé, la corba a^- es transforma en a^+ seguint el flux fora de N i en aquest cas les varietats asimptòtiques coincideixen.

(3.3) Intersecció de les varietats d'òrbites asimptòtiques sobre la superfície $x_2=0$.

Siguin

$$\Pi = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 1/2(x_3^2 + x_4^2) - \Omega(x_1, x_2) = -C/2\}$$

i

$$J = \Pi \cap \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2=0, x_4 \geq 0\}$$

Es clar que si $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ és una òrbita asimptòtica a la òrbita periòdica infinitesimal per temps positius, llavors, l'òrbita simètrica $(x_1(-t), -x_2(-t), -x_3(-t), x_4(-t))$ serà asimptòtica per temps negatius, per tant, si la varietat estable té per equació

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

llavors l'equació de la varietat inestable és

$$F(x_1, -x_2, -x_3, x_4) = 0$$

A partir d'ara considerarem valors del paràmetre de masses μ , i de la constant de Jacobi C , tals que el punt que determinen sobre el pla μ, C estigui en les hipòtesis del teorema 3.1 o 3.2 segons el punt d'equilibri considerat.

Lema 3.1: Fixem una constant de Jacobi. Fora de la regió N , el conjunt A^+ (A^-) d'òrbites asimptòtiques a l'òrbita periòdica infinitesimal per $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$) talla a la superfície J en una corba a_0 (a_1) tancada, simple i analítica.

Demostració: En el capítol II hem vist que degut a que les òrbites asimptòtiques tallen transversalment a l'esfera n , la intersecció de A^+ amb n és una corba a^+ homomorfa a un cercle. Com que les equacions del problema són analítiques i n és una superfície analítica, a^+ és una corba real analítica. Per obtenir la corba a_0 sobre J seguim les solucions que passen per a^+ per temps decreixents desde l'esfera n fins a la superfície J . Es clar que existeix intersecció doncs, segons els teoremes 3.1 i 3.2 quan una òrbita surt de la regió N , sobre el pla del moviment es veu que gira al voltant dels anells representats a les fig. 3.4 i 3.6, segons considerem el punt d'equilibri L_2 o el punt L_1 . El temps de transport és finit. Com que el flux és transversal a la superfície J , el cilindre originat per a^+ seguint el flux endarrera talla a J transversalment i per tant, la intersecció és una corba tancada, simple i analítica (veure fig. 3.7)

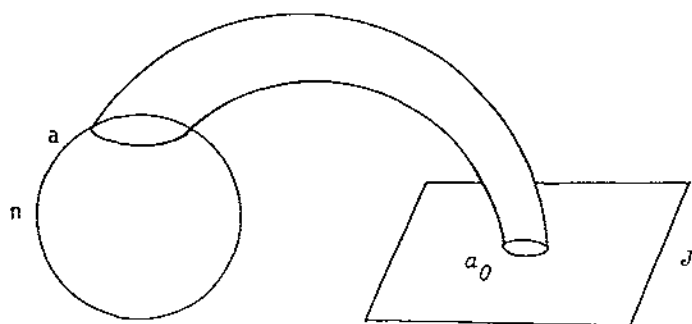


fig. 3.7

Lema 3.2: Fora de la regió N , les varietats A^+ i A^- d'òrbites asimptòtiques es tallen sobre la superfície J en un punt M amb $x_3 = 0$.

Demostració: Les corbes a_0 i a_1 donades pel lema 3.1 són simètriques per la simetria (1.14) per tant, tindran per equacions

$$F(x_1, 0, x_3, x_4) = 0$$

$$F(x_1, 0, -x_3, x_4) = 0$$

Es clar que per una mateixa constant de Jacobi aquestes dues corbes es tallen per $x_3 = 0$. Aquest punt d'intersecció correspon a una òrbita homoclínica ja que pertany a les dues varietats asimptòtiques. A més, si $\varphi(t, \bar{M})$ és l'òrbita que per $t = 0$ passa pel punt \bar{M} es té que si $\tau = \min\{t > 0 \mid \varphi(t, \bar{M}) \text{ e n}\}$ llavors, $\varphi(\tau, \bar{M}) \in a^+$ i $\varphi(-\tau, \bar{M}) \in a^-$. //

Lema 3.3: El conjunt H de les òrbites homoclíniques és invariant per la simetria S .

Demostració: Es una conseqüència del fet de que $H = A^+ \cap A^-$ i de que A^+ i A^- són simètriques. //

Direm que el punt homoclínic \bar{M} és transversal si en aquest punt les tangents a les corbes a_0 i a_1 formen un angle diferent de zero (veure fig.3.8)

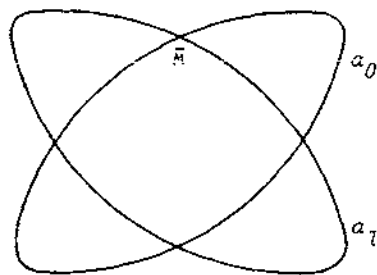


fig. 3.8

Demostrarem l'existència d'òrbites homoclíniques transversals en el nostre problema amb el mateix argument utilitzat per R.C. Churchill i D.L. Rod a [2].

Conley ha demostrat numèricament que existeixen intervals no buits de la recta real, I_2 dins de l'interval (C_1, C_2) i I_1 en (C_3, C_1) , tals que per valors de la constant de Jacobi en I_1 o I_2 existeixen òrbites homoclíniques transversals. Si per valors de C més petits però pròxims a C_2 o a C_1 els punts homoclínics fossin no transversals, les derivades primeres de

$F(x_1, 0, x_3, x_4)$ i de $F(x_1, 0, -x_3, x_4)$ coincidirien en un interval i per analicitat coincidirien sempre, lo qual esta en contradicció amb els resultats de Conley. D'aquest raonament es dedueix el següent resultat.

Lema 3.4: *Per valors de la constant de Jacobi més petits pero pròxims a C_2 o a C_1 existeixen òrbites homoclíniques transversals, tret potser d'un conjunt numerable de valors de C .*

IV. EL SHIFT COMA SUBSISTEMA D'UNA APLICACIÓ DE POINCARÉ DEL PROBLEMA RESTRINGIT DE 3 COSSOS.

(4.1) L'aplicació f

Considerem valors donats de la constant de Jacobi C i valors del paràmetre de masses μ , tals que el punt que determinen sobre el pla μ, C estigui contingut dins l'obert O_2 del teorema 3.1. Aleshores, existeix una regió N_1 homeomorfa a $S^2 \times I$ que conté una única òrbita periòdica, donada pel teorema de Liapounoff, i tal que dins de N_1 , el flux està donat per les equacions variacionals lineals. Aquesta regió ha estat estudiada en detall en el capítol II.

Sigui r un número positiu petit. Definim $E^+(r)$ ($E^-(r)$) com el conjunt de punts de $R^+(R^-)$ tals que $r^* < |z|^2 < r$ (notació de (2.2)) (veure fig. 4.1)

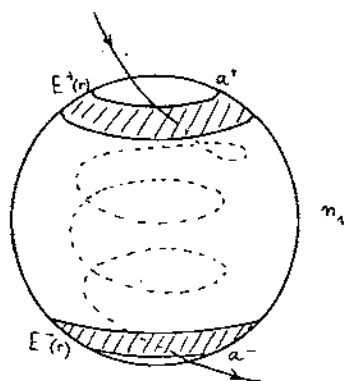


fig. 4.1

Si r és prou petit, les òrbites que passen per $E^+(r)$ i $E^-(r)$ tallen transversalment a n_1 . A més, les solucions que passen per $E^+(r)$, deixen N_1 en algun temps posterior surtint per $E^-(r)$ ja que $|z|^2$ és una integral local, per tant, l'homeomorfisme ψ definit a la secció (2.3) transforma $E^+(r)$ en $E^-(r)$.

Siguin $T^+(r)$ i $T^-(r)$ els conjunts originats per $E^+(r)$ i $E^-(r)$ seguint el flux per temps decreixents i per temps creixents respectivament, fins a la primera intersecció amb la superfície $x_2=0$. $T^+(r)$ i $T^-(r)$ són homeomorfs a un conjunt de \mathbb{R}^3 definit com

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid s_1 < x^2 + y^2 < s_2\}$$

on $0 < s_1 < s_2$ i $s_1^1 \leq z \leq s_2^1$ amb $s_1^1 < s_2^1$. Es clar que la frontera de $T^+(r)$ ($T^-(r)$) homeomorfa a $s_1 = x^2 + y^2$ està formada per les òrbites asimptòtiques a la periòdica infinitesimal per $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$). Direm $E_0(r)$ a la intersecció de $T^+(r)$ amb la superfície $x_2=0$. Degut a la transversalitat del flux sobre aquesta superfície, la frontera de $E_0(r)$ està formada per dues corbes homeomorfes a S^1 una de les quals és la corba α_0 del lema 3.1. Ànalogament definim $E_1(r)$ com la intersecció de $T^-(r)$ amb la superfície $x_2=0$. Una de les components de la frontera de $E_1(r)$ és la corba α_1 .

Ja que el punt homoclínic \bar{M} és transversal, podem prendre r suficientment petit de manera que el conjunt R igual a la component connexa de $E_0(r) \cap E_1(r)$ tal que la seva adherència \bar{R} conté al punt \bar{M} , tingui la forma següent.

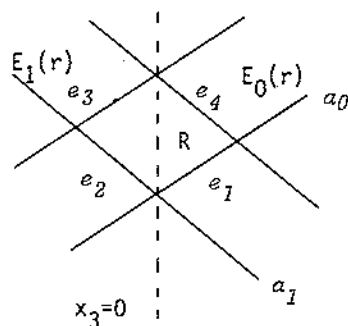


fig. 4.2

El conjunt R està limitat per quatre corbes diferenciables que anomenarem e_1, e_2, e_3 i e_4 .

Definim ara dues aplicacions de forma natural

(a) per a tot $x \in R$, $\phi_-(x) = \varphi(t_1, x)$ on

$$t_1 = \min \{t > 0 \mid \varphi(t, x) \in E^+(r)\}.$$

(b) per a tot $y \in E^-(r)$, $\phi_+(y) = \varphi(t_2, y)$ on

$$t_2 = \min \{t > 0 \mid \varphi(t, y) \in E_1(r)\}.$$

Sigui f l'aplicació definida com $f = \phi_+ \circ \psi \circ \phi_-$. És clar que f no està definida en els punts de a_0 ja que no és possible estendre l'homeomorfisme ψ a la frontera de $E^+(r)$.

(4.2) Propietats de l'aplicació f

Siguin

$$R_1 = \phi_-(R) \quad , \quad R_2 = \phi_+^{-1}(R) \quad (4.1)$$

Del corol·lari 2.1 i del fet de que ϕ_+ i ϕ_- són diferenciables adhiu en les fronteres dels seus dominis, es dedueix el resultat següent:

Lema 4.1: Sigui $\gamma = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Pi \mid x_1 = x_1(\lambda), x_2 = 0, x_3 = x_3(\lambda), x_4 = x_4(\lambda), 0 \leq \lambda \leq 1\}$ un arc amb el seu extrem corresponent a $\lambda = 0$ sobre a_0 i tal que en aquest extrem γ i a_0 no són tangencials. Aleshores, la corba imatge de γ , $f(\gamma) = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \Pi \mid y_1 = y_1(\lambda), y_2 = 0, y_3 = y_3(\lambda), y_4 = y_4(\lambda), 0 \leq \lambda \leq 1\}$ tendeix a a_1 espiralant, és a dir, $\arg(y_1(\lambda) + iy_3(\lambda)) \rightarrow \infty$ quan $\lambda \rightarrow 0$.

En J , podem prendre x_1, x_3 com a coordenades ja que $x_2 = 0$ i x_4 queda determinada sobre J , a partir de la integral de Jacobi.

Lema 4.2: Si S és la simetria (1.14) restringida a J ,

$$S : (x_1, x_3) \rightarrow (x_1, -x_3) \quad (4.2)$$

llavors, $f^{-1} = S^{-1} \circ f \circ S$.

Demostració: Sigui A un punt del domini de f que escriurem com $A = (x_1^0, x_3^0)$, aleshores, $A' = S(A) = (x_1^0, -x_3^0)$.

Si $\varphi(t, A') = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ és l'òrbita que per $t=0$ passa per A' es té

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = -x_3^0$$

Suposem que per un temps $\tau > 0$, $\varphi(\tau, A') = f(S(A))$, llavors, $x_2(\tau) = 0$. Tenim ara que $S^{-1} \circ f \circ S(A) = (x_1(\tau), -x_3(\tau))$. Perquè $f^{-1}(A) = S^{-1} \circ f \circ S(A)$ només cal veure que $A = f \circ S^{-1} \circ f \circ S(A)$.

Considerem l'òrbita simètrica de $\varphi(t, A')$, $\varphi'(t, A') = (x_1(-t), -x_2(-t), -x_3(-t), x_4(-t))$, és clar que $\varphi'(t, A')$ passarà pel punt A per $t=0$, a més, per $t=-\tau$ passa pel punt $S^{-1} \circ f \circ S(A)$, i per tant, si partim d'aquest punt i seguim l'òrbita que passa per ell, resulta que la imatge per l'aplicació f és el punt A . //

(4.3) Les successions d'enters associades a les òrbites del tercer cos.

Sigui p un punt de R i $\varphi(t, p) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ l'òrbita que per $t=0$ passa pel punt p . Considerem tots els zeros t_n de $x_1(t) = \tilde{v} + c_1 \tilde{u}$ ordenats $t_n < t_{n+1}$ i de manera que per a tot $t \in [t_n, t_{n+1}]$ $x_1(t) > \tilde{v} + b_1 \tilde{u}$ (veure fig. 3.3). Poden donar-se els següents casos:

- (a) Que existeixi t_n per a tot enter n .
- (b) Que existeixi t_n per a tot enter positiu n , però que per un cert enter $k < 0$, t_k ja no existeixi.
- (c) Que existeixi t_n per a tot enter negatiu n , però que per algun $l > 0$, t_l ja no existeixi.
- (d) Que t_k no existeixi per un cert enter $k < 0$ i que t_l no existeixi per un cert enter $l > 0$.

Sigui $\Delta\theta$ la funció contínua definida en la secció (2.3) com la variació de $\theta = \arg \zeta$ sota l'aplicació ψ . Definim

$$a_n = \left\lceil \frac{\Delta\theta_n}{2\pi} \right\rceil \quad (4.3)$$

on $\Delta\theta_n$ és la variació de θ en l'interval de temps $[t_{2(-n)}, t_{2(-n)+1}]$ si és finit. Si algun dels extrems de l'interval no existeix prenem $a_n = \infty$. En la definició anterior $[x]$ representa la part entera de x si x és real.

Els enters a_n mesuren el número de voltes enteres al voltant de l'òrbita periòdica infinitesimal donades per $\varphi(t, p)$ en cada pas per N_1 .

Els punts de J situats a prop del punt homoclínic \tilde{M} representaran diferents tipus d'òrbites segons que la successió d'enters a_n associada amb el criteri anterior, pugui o no ser continuada infinitament tant per temps positius com per temps negatius. Les successions associades a aquestes òrbites seran d'algun dels quatre tipus següents:

(a) $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ amb a_n naturals per a tot enter n .

Corresponen a òrbites que en intervals finits de temps entren i surten de N_1 pels anells R^+ i R^- de n_1 indefinidament, tant per temps positius com per temps negatius.

(b) $(\infty, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$ amb $k < 0$ i a_n natural per a tot $n > k$.

Corresponen a òrbites que han estat entrant a N_1 per R^+ i que deixen de fer-ho en un moment donat. Poden ser òrbites asimptòtiques a la periòdica infinitesimal per $t \rightarrow +\infty$ o bé òrbites que se'n van a la regió que conté a la lluna.

(c) $(\dots, a_{l-2}, a_{l-1}, \infty)$ amb $l \geq 1$ i a_n natural per a tot $n < l$.

Corresponen a òrbites que a partir d'un cert instant tallen infinites vegades a R^+ . Poden ser òrbites que venen de la regió de la lluna o bé òrbites asimptòtiques per $t \rightarrow -\infty$.

(d) $(\infty, a_{k+1}, \dots, a_{l-1}, \infty)$ amb $k < 0$, $l \geq 1$ i a_n natural per a tot enter n tal que $k < n < l$.

Les òrbites associades a aquestes successions només tallen a R^+ i R^- un número finit de vegades. Poden ser òrbites asimptòtiques a la periòdica per $t \rightarrow \infty$ i $t \rightarrow -\infty$.

(4.4) Breu introducció del shift de Bernoulli com a subsistema d'una aplicació del quadrat.

Sigui A el conjunt $N \cup \{\infty\}$ on N és el conjunt de números naturals i ∞ un element qualsevol. Definirem en A una ordenació total de la següent manera, direm que $a \leq b$ si essent a i b naturals, a és menor o igual que b , o bé, si a és natural i b és ∞ .

Definim S com el conjunt format per les successions d'elements de A que són d'algun dels tipus següents:

- (a) $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ amb $a_n \neq \infty$ per a tot enter n .
- (b) (a_k, a_{k+1}, \dots) amb $a_k = \infty$, $k < 0$ i $a_n \neq \infty$ per a tot enter $n > k$.
- (c) $(\dots, a_{1-2}, a_{1-1}, a_1)$ amb $a_1 = \infty$, $1 \geq 1$ i $a_n \neq \infty$ per a tot enter $n < 1$.
- (d) $(a_k, a_{k+1}, \dots, a_{1-1}, a_1)$ amb $a_k = a_1 = \infty$, $k < \infty$, $1 \geq 1$ i $a_n \neq \infty$ per a tot enter n tal que $k < n < 1$.

Donem a S una estructura d'espai topològic definint per a cada element a de S una base d'entorns. $\{U_j(a)\}$, $j = 1, 2, 3, \dots$

Segons que a sigui del tipus (a), (b), (c) o (d) tenim

$$U_j(a) = \{a' \in S \mid a'_n = a_n \text{ si } |n| < j\}$$

$$U_j(a) = \{a' \in S \mid a'_n = a_n \text{ si } k < n \leq j, \text{ i } a'_k \geq j\}$$

$$U_j(a) = \{a' \in S \mid a'_n = a_n \text{ si } -j \leq n < 1, \text{ i } a'_1 \geq j\}$$

$$U_j(a) = \{a' \in S \mid a'_n = a_n \text{ si } k < n < 1 \text{ i } a'_k, a'_1 \geq j\}$$

Proposició 4.1: Els subconjunts $U_j(a)$ variant j i a defineixen una topologia en S . L'espai topològic S és compacte.

La demostració d'aquesta proposició es troba a [5].

El shift de Bernoulli de S és una aplicació σ definida sobre elements a de S tal que $(\sigma(a))_n = a_{n-1}$ per a tot enter n .

El domini de definició de σ és

$$D(\sigma) = \{a \in S \mid a_0 \neq \infty\}$$

i la imatge

$$\text{Im}g(\sigma) = \{a \in S \mid a_1 \neq \infty\}$$

Sigui f una aplicació contínua de l'espai topològic X en el mateix, i g una altra aplicació contínua d'un espai topològic Y en ell mateix. Direm que g és un subsistema de f si existeix un homeomorfisme de Y en $h(Y) \subset X$ que fa commutatiu el següent diagrama.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \uparrow & & \uparrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Es demostra que el shift σ és un subsistema de certes aplicacions f definides en el quadrat $Q = [0,1] \times [0,1]$. Per precisar aquest fet definirem algunes nocions en el quadrat Q .

Sigui p un número $0 < p < 1$. Una corba $y = h(x)$ se'n diu horitzontal si

- (a) $0 \leq h(x) \leq 1$ per a tot $0 \leq x \leq 1$.
 (b) $|h(x_1) - h(x_2)| \leq p |x_1 - x_2|$ per a tot $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$

Una banda horitzontal en Q sera el conjunt

$$H = \{(x,y) \in Q \mid h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

on $h_1(x)$, $h_2(x)$ són corbes horitzontals tals que $0 \leq h_1(x) < h_2(x) \leq 1$ per a tot $0 \leq x \leq 1$ (veure fig.4.3)

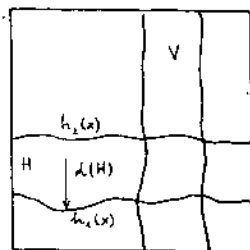


fig. 4.3

Es defineix el diàmetre d'una banda horitzontal com $d(H) = \max(h_2(x) - h_1(x))$, $0 \leq x \leq 1$.

Una corba vertical serà una corba $x = v(y)$ tal que

(a) $0 \leq v(y) \leq 1$ per a tot $0 \leq y \leq 1$

(b) $|v(y_1) - v(y_2)| \leq p |y_1 - y_2|$ per a tot $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$

De forma semblant es defineixen les bandes verticals i el diàmetre d'una banda vertical (veure fig. 4.3).

Considerem un homeomorfisme $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

(i) Existeixi una família de bandes horitzontals H_n disjunctes dos a dos, i una família de bandes verticals V_n disjunctes dos a dos, tals que $f(V_n) = H_n$ per a tot n natural, i que les fronteres horitzontals (respectivament verticals) de H_n siguin les imatges per f de les fronteres horitzontals (respectivament verticals) de V_n (veure fig. 4.4). A més, si les bandes estan ordenades com a la fig. 4.5 i prenem $V_\infty = \{(x, y) \in Q \mid x = 1\}$ i

$H_\infty = \{(x, y) \in Q \mid y = 1\}$, aleshores, $V_n \rightarrow V_\infty$ i $H_n \rightarrow H_\infty$ quan $n \rightarrow \infty$.

(ii) Si V és una banda vertical continguda en $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$, aleshores, $V'_n = V_n \cap f^{-1}(V)$ és una banda vertical per a tot natural n , i per algun l fix $0 < l < 1$, es compleix $d(V'_n) \leq l \cdot d(V_n)$. Anàlogament, si H és una banda horitzontal continguda en $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$, aleshores, $H'_n = H_n \cap f(H)$ és una banda horitzontal per a tot natural n , amb $d(H'_n) \leq l \cdot d(H_n)$.

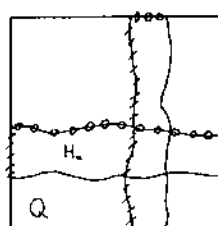


fig. 4.4

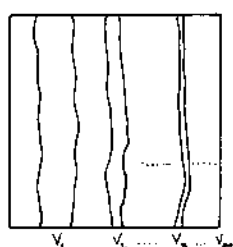
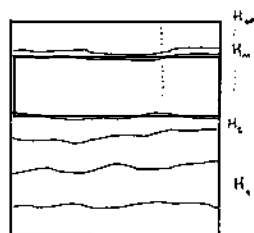


fig. 4.5



La demostració del següent teorema es troba a [8].

TEOREMA 4.1: Un homeomorfisme $f: Q \rightarrow R^2$ cumplint les condicions (i) i (ii) té el shift de Bernoulli com a subsistema, és a dir, existeix un homeomorfisme $h: S \rightarrow h(S) \subset Q$ tal que $h \circ \sigma = f \circ h|_{D(\sigma)}$

La versió del shift de Bernoulli utilitzada en aquest treball és deguda a Moser, el qual només ha estudiat en detall el cas en que S es el conjunt de successions de tipus (a), aplicant el shift de Bernoulli al problema de Sitnikov [8]. Amb la introducció de les successions de tipus (b), (c) i (d), Llibre i Simó [5] han demostrat que en el problema restringit el·líptic i rectilini de 3 cossos i en el problema restringit circular i pla de 3 cossos, es té el shift de Bernoulli com a subsistema, lo qual prova l'existència de tots els tipus possibles d'evolució final en el problema respectiu. Aquesta generalització del shift de Bernoulli permet determinar una varietat més ampla de moviments quasi-aleatoris.

Veurem que en el nostre problema l'homeomorfisme f definit sobre R en la secció (4.1) té el shift de Bernoulli com a subsistema. Seguirem les tècniques introduïdes per Moser construint en R unes famílies de bandes horitzontals i verticals que de forma anticipada ens permetran abans d'introduir el shift, demostrar l'existència de moviments quasi-aleatoris del tercer cos. La clau per la construcció de les bandes en R la dona el lema 4.1.

(4.5) Les bandes horitzontals i verticals en R .

Els costats de R , e_2 i e_4 són dos arcs de corba amb un dels seus extrems sobre α_0 , per tant, segons el lema 4.1 la imatge de R per f , és una cinta de longitud no acotada que espiralant talla infinites vegades a R i que es va fent més estreta a mesura que s'acosta a α_1 . La intersecció d'aquesta cinta amb R està formada per un nombre infinit de components connexes disjunts, de les quals només un número finit no estan limitades pels costats e_1 i e_3 (veure fig. 4.6)

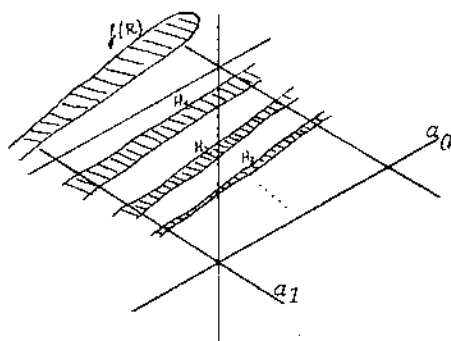


fig. 4.6

Direm banda horitzontal a cada una de les components connexes de $f(R) \cap R$. Considerem només les bandes de $f(R) \cap R$ limitades per e_1 i e_3 i les numerem començant per la que està més a prop de e_4 , H_1, H_2, \dots . Definim $H_\infty = e_1$ i $V_\infty = e_2$. Tenim així definides sobre R una família de bandes horitzontals $\{H_n\}$ limitades pels costats e_1 i e_3 i tals que el seu diàmetre tendeix a zero quan $n \rightarrow \infty$.

Definim les bandes verticals com $V_n = S(H_n)$ on S és la simetria (4.2).

En el següent lema veurem que l'homeomorfisme f i les famílies anteriors de bandes horitzontals i verticals verifiquen la condició (i) de la secció (4.4).

Lema 4.3: (a) Les bandes horitzontals H_n , així com les verticals V_n són disjunts dos a dos i $V_n \rightarrow V_\infty$, $H_n \rightarrow H_\infty$ quan $n \rightarrow \infty$.

(b) Les fronteres horitzontals (respectivament verticals) de H_n són imatges per f de les fronteres horitzontals (respectivament verticals) de V_n .

(c) $f(V_n) = H_n$ per a tot natural n .

Demostració: Els apartats (a) i (b) són immediats per construcció de les bandes.

Veurem que $f(V_n) = H_n$ per a tot n natural.

En primer lloc demostrarem que $f(V_1) \subset H_1$. A partir d'aquí i utilitzant el lema 4.2 es dedueix fàcilment que $f(V_1) \supset H_1$. La demostració de

(c) per n diferent de 1 és similar.

Per connexió n'hi ha prou amb veure que existeix un punt p de V_1 tal que $f(p) \in H_1$.

Sigui $\gamma = H_1 \cap \{x_3 = 0\}$. Segons el lema 4.2 $S \circ f^{-1}(\gamma) = f \circ S(\gamma) = f(\gamma)$. $f^{-1}(\gamma)$ és un arc contingut en H_k per a algun natural k , que talla a l'eix $x_3 = 0$.

Sigui p un punt d'aquesta intersecció. Degut a que

$$f(\gamma) \cap \{x_3 = 0\} = S \circ f^{-1}(\gamma) \cap \{x_3 = 0\} = f^{-1}(\gamma) \cap \{x_3 = 0\},$$

p és un punt de l'eix de simetria que pertany a $f(\gamma)$ i a $f^{-1}(\gamma)$. Per tant tenim un punt de H_1 per al qual existeix un cert punt $q \in \gamma$ tal que $f(q) = p$.

Si els punts p i q són diferents, la imatge del segment de l'eix $x_3 = 0$ que uneix q amb p , és un arc de corba que començant a p s'acosta a α_1 , amb lo qual $f(p)$ no pot estar a γ . Per tant p és un punt fix per f tal que $p \in V_1$ i $f(p) \in H_1$.

Direm que un subconjunt H de R és una banda horitzontal de R , si és homeomorf a alguna banda H_n de R . Anàlogament es defineixen les bandes verticals de R .

Les demostracions dels lemes següents són idèntiques a les dels lemes 4.3, 4.4 i 4.5 de [5].

Lema 4.4: *Sigui V una banda vertical en R continguda en alguna V_m . Llavors, per a tot natural n , el conjunt V'_n definit per $V'_n = V_n \cap f^{-1}(V)$ és també una banda vertical de R .*

Lema 4.5: *Si H és una banda horitzontal de R continguda en alguna H_m , llavors, el conjunt H'_n definit com $H'_n = H_n \cap f(H)$ és també una banda horitzontal per a tot natural n .*

Lema 4.6: (i) *Per a tota successió de tipus (a), existeix algun punt $p \in R$ tal que $f^{-m}(p) \in V_{\alpha_m}$ per a tot enter m .*

(ii) *Per qualsevol successió de tipus (b), existeix algun punt $p \in R$ tal que*

$f^{-m}(p) \in V_{a_m}$ per a tot enter $m \geq K$.

(iii) Per les successions de tipus (c) i (d) es tenen propietats equivalents.

(4.6) Existència de moviments quasi-aleatoris al voltant del punt d'equilibri L_2 .

TEOREMA 4.2: Existeix un obert O_0 del pla (u, C) contenint la corba $C = C_2(u)$ tal que si prenem valors del paràmetre de masses i de la constant de Jacobi diferents de zero i de manera que $(u, C) \in O_0$, qualsevol de les successions dels quatre tipus anteriors amb cada terme a_n més gran o igual que un cert nombre enter $b = b(u)$, correspon a alguna òrbita del tercer cos.

Demostració: Els arcs $\phi_-(e_2)$ i $\phi_-(e_4)$ tenen un extrem sobre la corba a^+ , per tant, segons el corol·lari 2.1, $\psi(R_1)$ talla a R_2 en un nombre infinit de components connexes disjunts dos a dos i limitades pels arcs $\phi_+^{-1}(e_2)$ i $\phi_+^{-1}(e_4)$ (veure fig. 4.7). La imatge d'aquestes components per ϕ_+ ens dóna les bandes horitzontals de R definides a la secció (4.5). Les numerem de forma natural segons estaven a R , H_1^+ , H_2^+ , ..., H_m^+ , ... i prenem H_∞^+ com la intersecció de l'adherència de R_2 amb a^- .

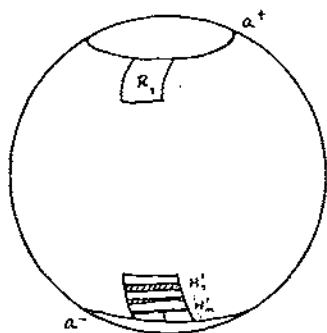


fig. 4.7

Sigui p un punt d'una banda vertical V_m . Com que $f(V_m) = H_m$ cal que $\psi \circ \phi_-(p) \in H_m^+$. Per tant, els punts de R continguts en alguna banda vertical V_m donen condicions inicials per òrbites per les quals la variació de θ

en el primer pas de l'òrbita per N_1 és $2\pi(m+b+\beta)$, on b està relacionat amb el número de voltes enteres donades per $\psi(R_1)$ al voltant de l'òrbita periòdica infinitesimal abans de tallar a la esfera pel costat $\phi_+^{-1}(e_2)$ i β és tal que $0 \leq \beta \leq 1$. El número b depèn de μ , doncs depèn de l'angle amb que es tallen $\phi_+^{-1}(e_2)$ i a^- .

Sigui $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ amb $a_n \geq b$ per a tot enter n , una successió de tipus (a). Considerem la successió $(\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots)$ on $b_n = a_n - b$ per a tot enter n . Segons el lema 4.6 existeix un punt p de R tal que $f^{-n}(p) \in V_{b_n}$ per a tot enter n . L'òrbita associada a la successió donada és la determinada pel punt p . És clar que per aquesta òrbita els naturals a_n mesuren el número de voltes enteres donades per l'òrbita al voltant de la periòdica infinitesimal en cada pas de l'òrbita per l'entorn N_1 . De la mateixa manera es demostra el teorema pels altres tipus de successions. //

Ara ja podem demostrar fàcilment el teorema A.

Demostració del teorema A: Fixada la constant de Jacobi C , la projecció de l'òrbita periòdica infinitesimal sobre el pla del moviment és una el·lipse que envolta el punt d'equilibri L_2 . Aleshores per un número r prou petit, existeix un entorn N'_1 de l'òrbita periòdica contingut en N_1 i tal que per les òrbites que passen per $E^+(r)$ es compleix que cada volta al voltant de l'òrbita periòdica infinitesimal en N'_1 correspon a una volta al punt L_2 sobre el pla del moviment. La continuïtat respecte les condicions inicials i el fet de que el temps de pas entre N'_1 i N_1 és finit demostren el teorema A.

Observem que prenent suficientment petit, per continuïtat respecte les condicions inicials hom pot aconseguir que per als segments d'òrbita continguts en P i amb extrems sobre els conjunts R_1 i R_2 de n_1 , el creixement de la coordenada $\bar{\theta}$ definida en el teorema 3.1 sigui aproximadament

2π , ja que segons el lema 3.2, l'augment de $\bar{\theta}$ corresponent al segment d'òrbita homoclínica que conté a \bar{M} i té extrems sobre a^+ i a^- , és pròxim a 2π . //

Noti's que per demostrar el teorema A no cal que el punt homoclínic \bar{M} sigui transversal doncs és possible fer la mateixa construcció de bandes horitzontals i verticals si les tangents a les corbes α_0 i α_1 en \bar{M} coincideixen, l'únic cas en el qual no és vàlida la construcció és el de la fig. 4.8 que no pot donar-se degut a que les corbes α_0 i α_1 són simètriques.

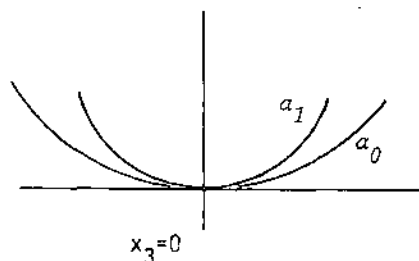


fig. 4.8

La transversalitat del punt homoclínic és indispensable en la demostració de la inclusió del shift de Bernoulli com a subsistema.

(4.7) Moviments quasi-aleatoris al voltant del punt d'equilibri L_1 .

Resultats anàlegs als obtinguts en la secció anterior seran certs al voltant del punt d'equilibri L_1 .

Considerem ara valors de la constant de Jacobi més petits però propers a C_1 , i prenem el paràmetre de masses μ diferent de zero i suficientment petit, de manera que (μ, C) sigui un punt de l'obert O_1 donat pel teorema 3.2.

Els teoremes 3.1 i 3.2 ja ens demostren que en aquestes condicions el comportament de les òrbites el·líptiques de la regió O_3 , que passen a prop de L_1 , és semblant al de les òrbites estudiades anteriorment dins de la subvarietat $T^{(1)}$. A més, el flux del sistema diferencial prop dels punts d'equilibri L_1 i L_2 és qualitativament el mateix.

Fixada la constant de Jacobi, aïllem l'òrbita periòdica infinitesimal que envolta a L_1 en una regió N_2 que es projecta sobre D_2 en el pla del moviment (veure fig. 3.3). Els lemes 3.2 i 3.3 demostren que les varietats estable e inestable de l'òrbita periòdica infinitesimal que surten de la regió N_2 per la component $x_1 = \tilde{v} - c_1 \tilde{u}$ de la frontera de N_2 , es tallen transversalment sobre la hipersuperfície $x_2 = 0$ en un punt homoclínic situat sobre l'eix de simetria $x_3 = 0$. Es construeix un conjunt \hat{R} en un entorn d'aquest punt homoclínic, i es defineix una aplicació \hat{f} en \hat{R} de la mateixa manera que es va fer per f i R en les seccions (4.1) i (4.2) per constants de Jacobi menors però pròxims a C_2 . Totes les propietats ja demostrades per f són també vàlides en aquest cas.

Per a cada òrbita que passi per \hat{R} considerem tots els zeros t_n de $x_1(t) = \tilde{v} - c_1 \tilde{u}$ ordenats, i de manera que existeixi un número $\epsilon > 0$ tal que per a tot $t_n < t < t_n + \epsilon$ es compleix $x_1(t) < \tilde{v} - c_1 \tilde{u}$ (veure fig. 3.3). Segons que la successió de t_n pugui o no ser continuada indefinidament tant per temps positius com per temps negatius, podrem associar a les òrbites que passen per \hat{R} una successió d'algun dels tipus (a), (b), (c) o (d) definint els termes a_n d'aquestes successions com a (4.3).

Es construeixen les bandes horitzontals i verticals en \hat{R} com a la secció (4.5). Utilitzant les propietats d'aquestes famílies de bandes i el lema 4.6, la demostració del següent teorema és idèntica a la del teorema 4.2 per constants de Jacobi $C \leq C_2$.

TEOREMA 4.3: *Existeix un obert O_1 del pla (μ, C) contenint la corba $C = C_1(\mu)$ tal que si prenem valors del paràmetre de masses i de la constant de Jacobi diferents de zero i de manera que $(\mu, C) \in O_1$ i qualsevol de les successions dels tipus (a), (b), (c) o (d) amb a_n més gran o igual que un cert número enter $b = b(\mu)$ per a tot enter n , correspon a una òrbita del tercer cos.*

La demostració del teorema B és igual a la del teorema A. Només cal

observar ara que cada segment d'òrbita en P_3 i amb extrems sobre n_2 pròxims als extrems del segment de l'òrbita homoclínica considerada, casi completa una volta entera al voltant dels dos primaris (veure fig. 3.6).

(4.8) Una condició equivalent a (ii) per l'aplicació del shift de Bernoulli.

En molts problemes resulta difícil comprovar que es verifica la condició (ii) de la secció (4.4) per assegurar l'existència del shift de Bernoulli com a subsistema.

Moser [8, pag. 76-79] ha donat una condició equivalent per al cas en que l'aplicació f sigui diferenciable.

Sigui f una aplicació de $Q = [0,1] \times [0,1]$ en \mathbb{R}^2 de classe C^1 . Si $f(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ amb $x_1 = f_1(x, y)$, $y_1 = f_2(x, y)$, l'aplicació tangent a f en el punt (x_0, y_0) és una aplicació lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 donada per la matriu

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

i aplica els vectors tangents (u_0, v_0) en el punt (x_0, y_0) en els vectors tangents (u_1, v_1) en el punt (x_1, y_1) .

La condició que substitueix a (ii) és la següent

(iii) Existeix $Z \in (0,1)$ tal que el camp de sectors S^+ definit sobre punts de $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$, per $|v| \leq Z|u|$, s'aplica sobre ell mateix per Df ; és a dir, $Df(S^+) \subset S^+$. A més, si $(u_0, v_0) \in S^+$ i $Df(u_0, v_0) = (u_1, v_1)$, aleshores $|u_1| \geq Z^{-1}|u_0|$.

Anàlogament, el camp de sectors S^- definit sobre $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ per $|u| \leq Z|v|$, s'aplica sobre ell mateix per Df^{-1} ; i si $(u_1, v_1) \in S^-$ i $Df(u_0, v_0) = (u_1, v_1)$ aleshores $|v_0| \geq Z^{-1}|v_1|$.

Proposició 4.2: (Moser) Si f de Q en R^2 és de classe C^r , i satisfà les condicions (i) i (iii) amb $0 < \lambda < 1/2$, aleshores, també compleix la condició (ii) per $\lambda = 2/(1-\lambda)$, i per tant f admet a σ com a subsistema.

(4.9) Un resultat fonamental per verificar la condició (iii).

A partir d'ara considerarem indistintament constants de Jacobi $C \leq C_1$ i $C \leq C_2$. Tots els resultats obtinguts per l'aplicació f definida a la secció (4.1) sobre R seran també vàlids per \hat{f} .

Els lemes 4.4 i 4.5 proven una part de la condició (ii) donada en la secció (4.4). Completar la demostració d'aquesta condició pot dur una feina considerable per lo qual provarem (iii) ja que disposem d'una aplicació f de classe C^1 . Per això definirem uns feixos de sectors prop de la corba a_0 .

Sigui $\delta > 0$ en longitud dels costats de R , e_i per $i = 1, 2, 3, 4$. Per un δ suficientment petit, definim $a_0(\delta)$ com el conjunt de punts de $E_0(r)$ tals que la seva distància a a_0 sigui menor que δ . Com que a_0 és continuament diferenciable, podem associar a cada punt $p \in a_0(\delta)$ un únic punt $q \in a_0$ tal que $d(p, a_0) = d(p, q)$.

En $a_0(\delta)$ definim dos feixos de vectors. $\Sigma_0 = \Sigma_0(\delta^{1/3})$ que assigna a cada punt $p \in a_0(\delta)$ el conjunt de rectes que formen un angle més petit o igual que $\delta^{1/3}$ amb la recta que, passant a través de p és paral·lela a la tangent a a_0 en q , el punt de a_0 més pròxim a p . Σ'_0 assigna a cada punt el conjunt de rectes complementaries a les de Σ_0 (veure fig. 4.9). De forma semblant Σ_1, Σ'_1 són els corresponents feixos de sectors sobre $a_1(\delta)$ obtinguts, per exemple, a través de la simetria S a partir de Σ_0 i Σ'_0 .

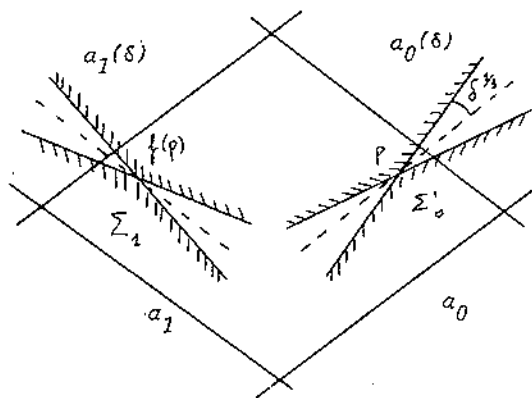


fig. 4.9

Lema 4.7: Existeix un $0 < \beta < 1$ tal que per $\delta > 0$ suficientment petit, l'aplicació f porta $a_0(\delta)$ en $a_1(\delta^\beta)$ i l'aplicació tangent Df porta el feix $\Sigma'_0 = \Sigma'_0(\delta^{1/3})$ en $\Sigma_1 = \Sigma_1(\delta^{8/3})$. A més, si $w_0 \in \Sigma'_0$, $w_1 \in Df(w_0)$ i u_0 és la projecció ortogonal de w_0 sobre la recta central de Σ'_0 i u_1 la de w_1 sobre la recta central de Σ_1 , aleshores, $|u_1| \geq \delta^{-1/3} |u_0|$.

Aquest lema ha estat demostrat per Moser [8, pag. 171-181] en el problema de Sitnikov i les tècniques utilitzades poden ser aplicades de la mateixa manera per demostrar el lema 4.7 en el nostre problema. Això és degut a que en un entorn de l'òrbita periòdica de l'infinít en el problema de Sitnikov, el comportament de les varietats d'òrbites parabòliques per temps positius i negatius, és qualitativament igual al de les varietats estable e inestable d'òrbites asimptòtiques en el entorn N de l'òrbita periòdica infinitesimal que envolta els punts d'equilibri L_1 i L_2 , en el problema restringit circular i pla de 3 cossos un cop fixada la constant de Jacobi. En aquest mateix entorn N , les òrbites que entren per l'anell R^+ es comporten de la mateixa manera que les òrbites el·líptiques en el problema de Sitnikov.

(4.10) El shift de Bernoulli com a subsistema en el problema restringit, circular i pla de 3 cossos.

TEOREMA 4.4: L'aplicació f definida sobre R té al shift de Bernoulli σ definit sobre $D(\sigma) \subset S$ com a subsistema, és a dir, existeix un homeomorfisme de $D(\sigma)$ en $h(D(\sigma)) \subset R$ tal que $f \circ h = h \circ \sigma$.

Demostració: Veurem que el conjunt R definit a la secció (4.2) i les bandes verticals i horitzontals que hem construït sobre ell, fan el paper del quadrat Q amb les respectives bandes. En efecte, R està limitat per quatre corbes diferenciables de longitud menor o igual a δ , per tant, és possible transformar R en Q per una aplicació lineal tret de termes de valors $O(\delta)$. Per veure que les bandes $\{V_n\}$ i $\{H_n\}$ definides a (4.5) corresponen a les famílies de bandes verticals i horitzontals sobre Q , n'hi ha prou amb demostrar que les fronteres de V_n interiors a R tenen tangents pròximes a la tangent de a_0 en \bar{M} . Això es dedueix del lema 4.7 segons el qual l'angle entre les tangents als costats de V_n i a_0 en \bar{M} , és menor que $c'\delta^{1/3} + O(\delta)$ on c' és una constant. De la mateixa manera es demostra que els H_n poden ser considerats com les bandes horitzontals a Q .

La condició (i) es dedueix directament del lema 4.3. Falta comprovar que (iii) es compleix.

Considerem els sectors Σ_j, Σ'_j , $j=0,1$ definits a la secció (4.9) sobre $R \subset a_0(\delta) \cap a_1(\delta)$. Llavors, $\Sigma_1(\delta^{1/3}) \subset \Sigma'_0(\delta^{1/3})$ ja que podem triar δ de manera que $2\delta^{1/3} + O(\delta)$ sigui menor que l'angle format per les tangents a a_0 i a_1 en \bar{M} (veure fig. 4.10).

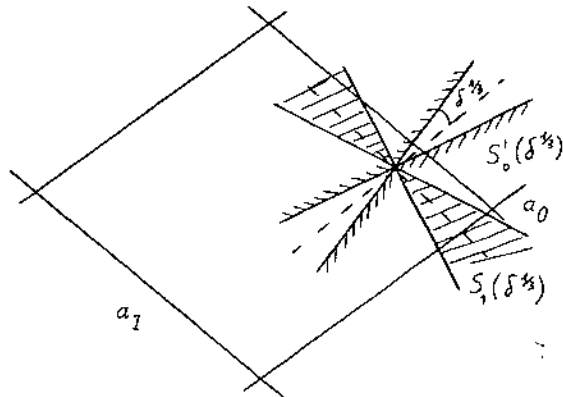


fig. 4.10

Segons el lema 4.7, Df restringida a $R \cap f^{-1}(R)$ envia $\Sigma'_0(\delta^{1/3})$ en $\Sigma_1(\delta^{8/3}) \subset \Sigma_1(\delta^{1/3})$, i com que $\Sigma_1(\delta^{1/3}) \subset \Sigma'_0(\delta^{1/3})$ tenim

$$Df|_{R \cap f^{-1}(R)} : \Sigma_1(\delta^{1/3}) \rightarrow \Sigma_1(\delta^{1/3})$$

Per tant, si S^+ és el feix de sectors $\Sigma_1(\delta^{1/3})$ restringit a $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subset R \cap f^{-1}(R)$ tenim $Df(S^+) \subset S^+$. La contracció de la projecció sobre la línia central del sector s'obté del lema 4.7. De forma semblant, prenent S^- com el feix de sectors $\Sigma_0(\delta^{1/3})$ restringit a $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ tenim que Df^{-1} aplica S^- en ell mateix i es compleix la condició (iii).

Una conseqüència important de l'existència del shift de Bernoulli com a subsistema és la no integrabilitat del problema restringit circular i pla de 3 cossos. Per més detalls veure Moser [8].

El teorema A també permet establir l'existència d'una infinitat d'òrbites periòdiques. En efecte, segons aquest teorema existeix un conjunt $I \subset R$ homeomorfe al conjunt de S format per les successions doblement infinites. En particular, si a és una successió periòdica de S és a dir existeix un natural m tal que $a_n = a_{n+m}$ per a tot enter n , llavors es té que existeix un únic punt $q \in I$ tal que $f(q) = h \circ \sigma \circ h^{-1}(q)$ i com que $\sigma^m(a) = a$ també $f^m(q) = q$. Per tant, q és un punt m periòdic per f .

REFERENCIES

- [1] Abraham,R., Marsden,J.;Foundations of Mechanics. Benjamin-Cummings Publishing Company 1978, pag. 498.
- [2] Churchill,R.C.,Rod,D.L.;Pathology in Dynamical Systems III:Analytic Hamiltonians, per apareixer a J. Diff. Eq.
- [3] Conley,C.;On the Ultimate Behavior of Orbits with Respect to an Unstable Critical Point, J. Diff. Eq. V (1969), pag.136-158.
- [4] Conley,C.Twist Mappings, Linking, Analyticity, and Periodic Solutions which Pass Close to an Unstable Periodic Solution, a Topological Dynamics (Joseph Auslander, Ed.),W.A. Benjamin, New York (1968), pag. 129-154.
- [5] Llibre,J., Simó,C.;Oscillatory Solutions in the Planar Restricted Three-body Problem, Math. Ann. 248 (1980) pag.153-184.
- [6] McGehee,R.P.;Some Homoclinic Orbits for the Restricted Three-body Problem, a thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Mathematics). University of Wisconsin 1969.
- [7] Moser,J.;On the Generalization of a Theorem of A. Liapunov. Comm. Pure Appl. Math., XI (1958), pag. 257-271.
- [8] Moser,J.;Stable and Random Motions in Dynamical Systems. Princeton Univ. Press. 1973.
- [9] Siegel,C.L.;Vorlesungen Über Himmelsmechanik. Springer-Verlag Berlin 1956.
- [10] Szebehely,V.;Theory of Orbits, Academic Press, 1967.