Pub. Mat. UAB
Nº 24 Març 1981

Punts periòdics de les aplicacions contínues del cercle.

Lluís Alseda i Soler

Abstract.-

In this work we study the periodic points of the continuous map f of the circle into itself. Our results are obtained using the lifting map of f and its degree. One basic tool of this paper is an analogous theorem in the circle of Li and Yorke's theorem in the real line.

We obtain a complete answer for a degree different of -1 or 1. For a map of degree zero we find again the theorem of Sarkovskii and, for a map of degree different of -1, 0, 1 we have periodic points of all periods with one exception. This exception occurs when the degree is -2 and there is no periodic point of period two. We also give a complete result for a homeomorphism of the circle (it is a particular case of degree -1 or 1) and partial results for a continuous map of degree -1 or 1.

Memòria presentada per a optar al grau de Llicenciat en Ciències Matemàtiques.
Director: Jaume Llibre i Saló

INDEX

INTRODUCCIÓ

En els últims anys, el treball en problemes concrets de Sistemes Dinàmics i altres camps de la ciència, ha portat a estudiar els punts periòdics d'aplicacions contínues (les definicions es donen en el capítol 1). C.Simó a [7] exposa això més detalladament.

De les aplicacions contínues de la recta es té molta informació, bàsicament en el Teorema de Šarkovskii (veure [9]).

Teorema (A.N. Šarkovskii). Sigui $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicació contínua i suposem que té punts n-periòdics. Llavors f té punts m-periòdics per a tot m a la dreta de n en la següent ordenació : 3,5,7,9, ... , 2.3, 2.5, 2.7, 2.9, ... , 4.3, 4.5, 4.7, 4.9, ... , 8,4,2,1.

El Teorema de Šarkovskii és igualment vàlid per a les funcions contínues d'un interval de la recta en ell mateix.

Quant a les funcions contínues del cercle en el cercle disposem d'un treball de L.Block (veure [2]).

Per a poder exposar els resultats d'aquest treball necessitem la següent definició : per a cada aplicació contínua $f: S^1 \longrightarrow S^1$, és a dir, $f \in C^0(S^1, S^1)$, P(f) serà el conjunt dels enters que són període d'algun punt periòdic de f (veure el Capítol 1 per definicions).

Teorema 1. Sigui $f\in C^{0}(S^{1},S^{1})$. Suposem que $1\in P(f)$ i $n\in P(f)$ per algun enter $n>1$, senar . Llavors per a tot $m>n$ tenim $m\in P(f)$.

Teorema 2. Sigui $f\in C^{0}(S^{1},S^{1})$ i suposem que $P(f)$ és finit. Hi ha enters m i n (amb $m>1$ i $n>0$) tals que,

$P(f)=\{m, 2m, 4m, \dots , 2^{n}m\}$.

Teorema 3. Sigui $f\in C^{0}(S^{1},S^{1})$. Si $\{1, 2, 3\}\subset P(f)$ llavors $P(f)=\mathbb{N}$. Recíprocament, si $S\subset\mathbb{N}$ amb la propietat de què per alguna $f\in C^{0}(S^{1},S^{1})$, $S\subset P(f)$ implica que $P(f)=\mathbb{N}$, llavors $\{1, 2, 3\}\subset S$.

Observem que si tenim $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua, el teorema de Šarkovskii diu que si $3\in P(f)$ llavors $P(f)=\mathbb{N}$. El Teorema 3 de Block representa un resultat anàleg en el cas de les funcions contínues del cercle en el cercle.

El Teorema 2 també ha estat provat simultàniament per J. Llibre a [6] utilitzant altres tècniques.

En el nostre treball s´estudia la relació entre el grau de les funcions contínues del cercle en el cercle i els seus punts periòdics.

Donat n, enter positiu, les eines bàsiques per a determinar si f té punts n-periòdics són el Lema 2 i en especial el Lema 3. El mètode que utilitzarem en la majoria dels casos consisteix en buscar arcs de S^{1} que ens permetin aplicar aquests lemes. Les elevacions de f de punt base p, on p pot ésser qualsevol punt de S^{1} (veure capítol 1), són les que ens faciliten aquest treball.

Per les funcions f tals que grau$(f)\notin\{-1,0,1\}$, no és difícil trobar els arcs de S^1 que ens permetin aplicar el Lema 2 o el Lema 3 i obtenir $P(f)$. Altrament, si grau$(f)\in\{-1,0,1\}$ necessitem dues eines auxiliars. La primera és l'amplitud de f (veure capítol 3) que ens permet caracteritzar $P(f)$ si grau$(f)=0$. La segona, la donen les branques i subbranques de f (veure capítol 4) que les utilitzarem en el cas grau$(f)=\pm 1$. En aquest darrer cas no donem una classificació completa dels possibles $P(f)$. Els comentaris al voltant de la Proposició 24 donen idea de les dificultats que cal superar per arribar a obtenir aquesta classificació.

Pels homeomorfismes de S^1 és relativament fàcil caracteritzar totalment $P(f)$ en funció del grau.

Els resultats principals que aporta el nostre treball són els següents :

<u>Teorema A.</u> Sigui $f\in C^0(S^1,S^1)$ i suposem que grau$(f)\notin\{-1,0,1\}$.
Llavors $P(f)=\mathbb{N}$, excepte quan grau$(f)=-2$ que tenim $P(f)\supset\mathbb{N}-\{2\}$.

<u>Teorema B.</u> Sigui $f\in C^0(S^1,S^1)$ i sigui grau$(f)=0$. Llavors val Šarkovskii. Es a dir si $n\in P(f)$, per a tot m a la dreta de n en l'ordenació del Teorema de Šarkovskii tenim que $m\in P(f)$.

Sigui K arc propi tancat de de S^1. Direm que <u>K f-recobreix S^1</u> si $f(K)=S^1$.

Sigui $f\in C^{0}(S^{1},S^{1})$ i suposem que $\mathrm{grau}(f)=\pm 1$. Per a cada $p\in S^{1}$ sigui T_p el conjunt dels $q\in S^{1}$ tals que $f(p)=f(q)$. Considerem els intervals que f-recobreixen S^{1} amb extrems a T_p, ordenats per inclusió. El mínim de cada cadena serà, per definició, una branca de f amb punt base p. Aquesta definició de branca de f amb punt base p, no correspon exactament a la que farem servir en la resta del treball, que és molt més llarga i enfeinada. La donem aquí per poder enunciar fàcilment el següent teorema,

Teorema C. Sigui $f\in C^{0}(S^{1},S^{1})$ i suposem que $\mathrm{grau}(f)=\pm 1$.

(i) Si existeix $p\in S^{1}$ tal que f té més d'una branca de punt base p tenim que $P(f)=\mathbb{N}$.

(ii) Si per a tot $p\in S^{1}$ f té solament una branca $B_p=[p_1,p_2]$ de punt base p, són certes les següents proposicions:

(a) Suposem que existeixen $p\in S^{1}$ i $A=[a,b]$, arc propi tancat de S^{1}, tals que $f(A)=f(S^{1}-B_p)$, $f(p)\notin \mathrm{int}(B_p\cup A)$, $f(A)\supset B_p$, $\{f(a),f(b)\}\not\subset \mathrm{int}(B_p)$ i és certa una de les afirmacions següents:

(1) $A\cap B_p=\emptyset$

(2) $p\notin [p_1,p_2]$ i $f(p)\in [p,p_1]$

(3) p és punt fix de f i $p\neq p_2$

(4) $f^{2}(p)\notin B_p$

Llavors $P(f)=\mathbb{N}$

(b) Suposem que existeix $p\in S^{1}$, punt fix de f tal que per a tot q i E amb $q\in T_p$, E entorn de q a S^{1} i $p\notin E$ tenim que,

$p \in Fr(f(E))$. Llavors val Šarkovskii per f.

(c) Sigui p l'únic punt fix de f i suposem que existeix $q \in S^1$ tal que : $q \notin B_p$, $f(q) \in B_p$ i $f(S^1 - B_p) = [v, f(q)]$ amb $[v, f(q)]$ arc propi de S^1. Llavors existeix un enter n amb $n > 2$, tal que $P(f) = \{1, n, n+1, \ldots,\}$.

Teorema D. Sigui $f : S^1 \longrightarrow S^1$ homeomorfisme . Les següents proposicions són certes :

(i) grau$(f) = +1$ ó -1.

(ii) Si grau$(f) = +1$ i $P(f) \neq \emptyset$, existeix n, enter positiu, tal que $P(f) = \{n\}$.

(iii) Si grau$(f) = -1$ tenim que $P(f) = \{1\}$ ó $P(f) = \{1, 2\}$.

Agraeixo a en Jaume Llibre la cura i dedicació que ha tingut en dirigir-me aquest treball així com l'ànim que m'ha donat en tot moment, la qual cosa ha fet possible aconseguir aquest resultat. També agraeixo la paciència i l'ajut de la Josefina Casasayas així com les correccions ortogràfiques de la Teresa Vidal.

CAPÍTOL 1

Resultats i definicions previs

S^1 denota el cercle i $C^o(S^1,S^1)$ el conjunt de les funcions contínues de S^1 en ell mateix.

Sigui $f\in C^o(S^1,S^1)$. Per a cada enter positiu n, es defineix inductivament f^n com segueix : $f^1= f$ i $f^n = f\circ f^{n-1}$ amb f^o l'aplicació identitat a S^1.

Sigui $p\in S^1$. Diem que p és un punt fix de f si $f(p) = p$ i Fix(f) és el conjunt dels punts fixos de f. p és un punt periòdic de f si p és un punt fix de f^m per algun enter positiu m. Si p és un punt periòdic de f, el més petit enter positiu n tal que $f^n(p)=p$ l'anomenem període de p i a p punt n-periòdic. Per(f) denota el conjunt dels punts periòdics de f i P(f) el dels enters positius que són període d'algun punt de Per(f).

Siguin $p\in S^1$ i $q\in S^1$. L'arc tancat, mig obert ó obert de p fins a q girant en sentit contrari al rellotge serà denotat respectivament per $[p,q]$, $[p,q)$, $(p,q]$, (p,q) . En aquesta notació $[p,p]$ representarà a S^1.

En aquest treball s'utilitza la següent definició. Siguin R,K i L arcs propis tancats de S^1 i sigui $f\in C^o(S^1,S^1)$, diem que R f-recobreix L si per algun arc tancat $I\subset R$ tenim $f(I)=L$. Anàlogament R f-recobreix $L\cup K$ si existeix un arc propi tancat J tal que $J \supset L \cup K$ i R f-recobreix J.

Els tres lemes que segueixen són, tal com ja hem avançat a la introducció, una de les eines bàsiques de que disposem per caracteritzar $P(f)$. El Lema 3 és un anàleg al Teorema de Li i Yorke en el cas del cercle (veure [5]). Els Lemes 1,2 ja han estat provats per Block a [2] (veure Lemes 1,2,3 i 4).

<u>Lema 1.</u> Sigui $f \in C^0(S^1,S^1)$ i siguin R i L arcs propis tancats de S^1. Suposem que R f-recobreix L i I és un arc tancat tal que $I \subset L$. Llavors R f-recobreix I.

<u>Lema 2.</u> Sigui $f \in C^0(S^1,S^1)$ i siguin $M_1, M_2, \ldots, M_n$ arcs propis tancats de S^1. Suposem que M_i f-recobreix M_{i+1} per $i = 1,\ldots,n-1$ i M_n f-recobreix M_1. Llavors existeix un z, punt fix de f^n, tal que $z \in M_1$, $f(z) \in M_2$, ... , $f^{n-1}(z) \in M_n$.

<u>Lema 3.</u> Sigui $f \in C^0(S^1,S^1)$ i siguin R i L arcs propis tancats de S^1. Suposem que R f-recobreix $R \cup L$, L f-recobreix R i és certa una de les següents afirmacions :

(a) $f^2(R \cap L) \cap R = \emptyset$.

(b) $R \cap L = \{p\}$, $f(p) = q$ punt fix de f i $q \notin L$.

Llavors f té punts n-periòdics per a tot $n > 2$.

Prova: Per a tot $n>2$ prenem la successió d'arcs : $M_i = R$ $i = 1 \div n-1$, $M_n = L$. Ja que R f-recobreix $R \cup L$ i L f-recobreix R, la nostra successió compleix les hipòtesis del Lema 2. Llavors tenim $z \in M_1$, punt fix de f^n, tal que $\{z, f(z), \ldots, f^{n-2}(z)\} \subset R$ i

$f^{n-1}(z) \in L$. Així z és punt n-periòdic. En efecte, si z no és n-periòdic tenim que $f^{n-1}(z) \in R$ i per tant $f^{n-1}(z) \in L \cap R$ i això es contradeix amb (a) i (b).

Notem que $f(z) \in R$ per a tot $n > 2$ ja que $f^{n-1}(z) \in R$. Com que $f^2(f^{n-1}(z)) = f^{n+1}(z) = f(z) \in R$, es contradeix amb (a). Si (b) és cert, com que $f(f^{n-1}(z)) = z$ tenim que z és fix; llavors ja que $z = f^{n-1}(z) \in L$ arribem a contradicció.

c.v.d.

En la resta d'aquest capítol definirem i estudiarem les elevacions i el grau de les aplicacions $f: S^1 \longrightarrow S^1$ contínues. A més obtindrem un resultat sobre els punts fixos en funció del grau.

A partir d'ara pensarem en S^1 com el conjunt dels nombres complexos de mòdul 1.

Definim l'aplicació $e: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ com $e(t) = e^{2\pi i t}$. És clar que e és un homomorfisme del grup additiu $\mathbb{R}$ en el grup multiplicatiu S^1 i que Ker(e) és el conjunt dels enters.

Donada una aplicació contínua $f: X \longrightarrow S^1$ ón X és espai topològic, anomenem <u>elevació de f</u> a l'aplicació contínua $\bar{f}: X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = e \circ \bar{f}$.

El lema que segueix està provat per C.T.C. Wall a [10].

<u>Lema 4.</u> Sigui $I = [0,1]$ i $f: I \longrightarrow S^1$ contínua. Llavors existeix una elevació contínua de f, que anomenarem $\bar{f}$, $\bar{f}: I \longrightarrow \mathbb{R}$, única

excepte translacions per enters. D'aquesta manera per a cada $a_o \in \mathbb{R}$ amb $e(a_o) = f(0)$, tenim una única elevació $\bar{F}$ tal que $\bar{F}(0)=a_o$.

Sigui ara $f \in C^o(S^1,S^1)$ i sigui $p \in S^1$ amb $p=e(t_p)$ i $t_p \in [0,1)$. Podem considerar l'aplicació contínua $f\circ(e/J_p)\colon J_p \longrightarrow S^1$ on $J_p = [t_p, t_p+1]$.

Pel Lema 4 existeix una elevació contínua de $f\circ(e/J_p)$, que denotem per $\bar{F}_p$, única excepte translacions per enters. És a dir, per a cada $a_p \in \mathbb{R}$ tal que $e(a_p) = f\circ(e/J_p)(t_p)$ tenim pel Lema 4 una única elevació $\bar{F}_p$, tal que $\bar{F}_p(t_p)=a_p$ de manera que el següent diagrama commuti:

$$\begin{tikzcd} J_p \arrow[r, "\bar{F}_p"] \arrow[d, "e/J_p"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "e"] \\ S^1 \arrow[r, "f"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Llavors per a cada $f \in C^o(S^1,S^1)$ i per a cada $p \in S^1$, a tota aplicació $\bar{F}_p$ definida així l'anomenem *elevació de f de punt base p*. A l'elevació de f de punt base p tal que $\bar{F}_p(t_p) \in [0,1)$ l'anomenem *elevació normalitzada de f de punt base p, f'_p*.

Sigui $f \in C^o(S^1,S^1)$. Per a cada $p \in S^1$ és clar que $e(t_p) = e(t_p+1)=p$. Com que per a tota $\bar{F}_p$ sabem que $e\circ\bar{F}_p = f\circ(e/J_p)$, tenim $e(\bar{F}_p(t_p))= f\circ(e/J_p)(t_p) = f\circ(e/J_p)(t_p+1) = e(\bar{F}_p(t_p+1))$. És a dir $\bar{F}_p(t_p+1)-\bar{F}_p(t_p)$ és un enter i no depèn de l'elevació de punt base p que agafem ja que $\bar{F}_p$ és única excepte translacions per enters.

Llavors per a cada $f\in C^0(S^1,S^1)$ i per a cada $p\in S^1$, a l'enter $\bar{f}_p(t_p+1)-\bar{f}_p(t_p)$ l'anomenem <u>grau(f_p).</u>

Sigui $[a,b]$ un interval tancat de $\mathbb{R}$. Per definició $[a,b]+n$ amb n enter, denotarà a l'interval $[a+n,b+n]$.

En el Lema 5 ens proposem, donada una elevació d'una funció f de punt base q, dir com són les elevacions de f de punt base p. Al mateix temps en treurem conclusions.

<u>Lema 5.</u> Sigui $f\in C^0(S^1,S^1)$ i sigui $q\in S^1$. Les següents proposicions són certes:

(a) L'aplicació $g_q\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida per $g_q(t)=\bar{f}_p(t-n)$ + $n.\mathrm{grau}(f_q)$ si $t\in J_q+n$, és una extensió contínua de l'aplicació $\bar{f}_q\colon J_q\longrightarrow\mathbb{R}$; és a dir $g_q/J_q=\bar{f}_q$.

(b) Donada $\bar{f}_q$, elevació de f de punt base q, obtenim $\bar{f}_p$, elevació de f de punt base p, al fer $\bar{f}_p = g_q/J_p$.

(c) Per a tot $p\in S^1$ tenim que $\mathrm{grau}(f_p)=\mathrm{grau}(f_q)$.

Prova: L'apartat (a) és fàcil de provar (les figures 3 i 4 comparen $\bar{f}_q$ amb g_q/J_q-1). L'apartat (b) és immediat a partir de (a) (les figures 1 i 2 il.lustren el procés en el cas $t_p\in J_q$ i les 3,4 i 5 en l'altre cas)

$$
\begin{aligned}
(c):\ \mathrm{grau}(f_p) &= \bar{f}_p(t_p+1)-\bar{f}_p(t_p)=g_q(t_p+1)-g_q(t_p)= \\
&= \bar{f}_q(t_p+1-n-1) + (n+1)\mathrm{grau}(f_q) - \\
&\quad \bar{f}_q(t_p-n) + n.\mathrm{grau}(f_q) \qquad =
\end{aligned}
$$

$= \mathrm{grau}(f_q)$

c.v.d.

Vist això, a l'enter positiu grau(f_q), que no depèn de q, per a qualsevol $q \in S^1$ l'anomenarem grau(f).

És conegut que el grau d'una aplicació $f:S^1 \longrightarrow S^1$ contínua que aquí hem definit, coincideix amb el que s'obté a partir de l'aplicació induïda per f sobre el primer grup d'homologia de S^1 en ell mateix. Per tant tenim el següent lema (per més detalls veure [8] i [10]).

Lema 6. Siguin f i g funcions contínues de S^1 en S^1. Llavors les dues afirmacions següents són certes:

(a) $\mathrm{grau}(f.g) = \mathrm{grau}(f)+\mathrm{grau}(g)$

(b) $\mathrm{grau}(f \circ g) = \mathrm{grau}(f).\mathrm{grau}(g)$

D'altra banda notem que si $p \in S^1$ i és un punt fix, per a tot $q \in S^1$ tenim que $\bar{f}_q\ (t_p)=t_p+k$ amb k enter. Amb aquesta observació és fàcil provar el següent lema:

Lema 7. Sigui $f \in C^0(S^1,S^1)$. Llavors f té com a mínim $|1-\mathrm{grau}(f)|$ punts fixos.

De fet aquest resultat és conegut, ja que $|1-\mathrm{grau}(f)|$ és el número de Nielsen d'una aplicació contínua de S^1 en S^1 (veure [4] pàg.107). Nosaltres donem però una demostració elemental sense fer servir el número de Nielsen.

Prova: Com que $e(0)=1 \in S^1$ les elevacions definides a l'interval $J_1= [0, 1]$, les escriurem $\bar{F}_1$. Considerem les rectes $r_n(t) = t+n$ amb n enter i $t \in J_1$. És evident que $Im(r_n)= [n,n+1]$ on $Im(r_n)$ designa com és habitual la imatge de r_n.

Amb aquesta notació és clar que Fix(f) és el conjunt dels e(t) amb $t \in J_1$ i $f_1'(t) = r_n(t)$ per a cert n. Sigui $a=f_1'(0) \in [0,1)$ i anomenem k al grau(f); llavors distingirem quatre casos:

<u>cas 1</u>: $k \geq 2$ (veure la figura 6)

Tenim que $Im(f_1') \supset [a,k+a]$ i per tant $Im(f_1') \supset [n,n+1]$ amb $n = 1, \ldots , k-1$. Per continuïtat la gràfica de f_1' talla a les gràfiques de r_n per $n=1, \ldots , k-1$ com a mínim en un punt. Per tant, f té $k-1 = |1-k|$ punts fixos com a mínim.

<u>cas 2</u>: $k=1$ (veure la figura 7)

Tenim que $Im(f_1') \supset [a,a+1]$, i és clar que hi ha funcions f tals que la seva gràfica no talla a cap r_n.

<u>cas 3</u>: $k=0$ (veure la figura 8)

Tenim que $f_1'(0)=f_1'(1)=a$. Per continuïtat f_1' com a mínim talla a r_0. Per tant, f té com a mínim un punt fix.

<u>cas 4</u>: $k<0$ (veure la figura 9)

Tenim que $Im(f_1') \supset [k+a,a]$. Per continuïtat, com en el cas 1, f_1' talla a r_n com a mínim per $n=0,-1, \ldots , k$. Llavors f té $|k|+1 = |1-k|$ punts fixos com a mínim.

c.v.d.

CAPÍTOL 2

Aplicacions contínues del cercle amb grau diferent de -1,0 ó 1

Lema 8. Sigui $f \in C^{o}(S^1,S^1)$. Llavors les dues proposicions següents són certes :

(a) f^n té com a mínim $|1-\text{grau}(f)^n|$ punts fixos.

(b) Si $\text{grau}(f) \notin \{-1,0,1\}$ llavors f té infinits punts periòdics.

Prova: (a): Per (b) del Lema 6 és $\text{grau}(f^n) = (\text{grau}(f))^n$. Pel Lema 7 f^n té $|1-(\text{grau}(f))^n|$ punts fixos com a mínim. (b): Si $\text{grau}(f) \notin \{-1,0,1\}$ tenim que $|1-(\text{grau}(f))^n| \longrightarrow \infty$ quan $n \longrightarrow \infty$.

c.v.d.

Notem que aquest lema ens assegura que $\text{Per}(f)$ té infinits punts; però donat n, enter positiu, no sabem si $n \in P(f)$.

Anomenem partició de S^1 a tot conjunt finit de punts de S^1, $\{z_1, \ldots , z_n\}$ tal que $(z_i,z_{i+1}) \cap \{z_1, \ldots , z_n\} = \emptyset$ per $i=1, \ldots , n-1$.

Lema 9. Sigui $f \in C^{o}(S^1,S^1)$ i sigui $k = |\text{grau}(f)|$. Suposem $k>1$. Llavors per a tot $p \in S^1$ existeix una partició de S^1, $F_p = \{z_o, \ldots , z_{k-1}\}$, que compleix les tres propietats següents:

(a) $f(z_i) = p$ per a tot $i= 0, \ldots , k-1$.

(b) $f([z_j, z_{j+1}]) = S^1$ per a tot $j=0, \ldots , k-2$ i $f([z_{k-1}, z_o]) = S^1$.

(c) Si p és punt fix de f, llavors podem prendre $z_o=p$.

Prova: Suposem grau(f)>0. La demostració del cas grau(f) <0 és totalment anàloga. Sigui $p= e(t_p)$ amb $t_p \in [0,1)$ i sigui $q= e(t_q)$ amb $t_q \in [0,1)$ qualsevol punt de S^1. Prenem $\bar{f}_q$, l'elevació de f de punt base q, tal que $t_p-1< \bar{f}_q(t_q) \leq t_p$.

Com que grau(f)=k, per continuïtat existeixen punts t_o, ... , t_{k-1} que compleixen les següents propietats (veure figura 10):

(1) $t_o< t_1< \ldots < t_{k-1}$ i $t_j \in J_q$ per a tot j=0, ..., k-1.

(2) $\bar{f}_q(t_j)= j+t_p$ per a tot j=0, ..., k-1.

(3) $\bar{f}_q([t_j, t_{j+1}]) \supset [j+t_p, (j+1)+t_p]$ per a tot j=0, ... , k-2.

Sigui F_p el conjunt dels $z_j = e(t_j)$ per a tot j=0, ... , k-1. De (2) es dedueix (a). D'altra banda $\bar{f}_q([t_{k-1}, t_q+1]) \supset [k-1+t_p, \bar{f}_q(t_q+1)] = A$ i $\bar{f}_q([t_q, t_o]) \supset [\bar{f}_q(t_q), t_p] = B$. Ja que $\bar{f}_q(t_q+1) = \bar{f}_q(t_q)+k$ tenim que $e(A \cup B) = S^1$, és a dir $f([z_{k-1}, z_o]) =S^1$. Llavors (1) i (3) acaben de provar (b).

Si p és punt fix de f, sigui q=p. Podem prendre $\bar{f}_p$ tal que $\bar{f}_p(t_p)=t_p$. Per tant, $t_o=t_p$ i $z_o=p$.

c.v.d.

<u>Teorema A.</u> Sigui $f \in C^o(S^1,S^1)$ i suposem que grau(f)$\notin \{-1,0,1\}$. Llavors $P(f)= \mathbb{N}$, excepte quan grau(f)=-2 que tenim $P(f) \supset \mathbb{N}-\{2\}$.

Prova: Pel Lema 7 sabem que f té punts fixos, sigui p un d'aquests. Ens proposem demostrar que existeixen punts n-periòdics per a tot $n \geq 2$ ó 3. Sigui $k=\text{grau}(f)$ i considerem la partició F_p com al Lema 9. Distingirem tres casos :

<u>cas 1:</u> $|k| \geq 3$

Tenim $F_p \supset \{p, z_1, z_2\}$. Sigui $R=[p, z_1]$ i $L=[z_1, z_2]$.
Per (b) del Lema 9, R i L f-recobreixen S^1. Per continuitat, L f-recobreix R i R f-recobreix $R \cup L$. Llavors f compleix les hipòtesis de l'apartat (b) del Lema 3 i, per tant, té punts n-periòdics per a tot $n \geq 2$.

<u>cas 2:</u> $\text{grau}(f)=2$ (veure la figura 11)

En aquest cas $F_p = \{p, z_1\}$. Sigui $R=[p, z_1]$. Per (b) del Lema 9 R i $[z_1, p]$ f-recobreixen S^1. Llavors sigui A el conjunt dels $x \in [z_1, p]$ tals que $f(x)=z_1$. Es obvi que $z_1 \notin A$, per tant podem prendre $u \in A$ tal que $(z_1, u) \cap A = \emptyset$. Ja que $\text{grau}(f)>0$, per construcció tenim que $[z_1, u]$ f-recobreix R i $p \notin [z_1, u]$. Sigui $L=[z_1, u]$; per continuitat tenim que R f-recobreix $R \cup L$. Llavors (b) del Lema 3 es compleix i amb això s'acaba la demostració.

<u>cas 3:</u> $\text{grau}(f) = -2$(veure la figura 12)

Tenim que $F_p = \{p, z_1\}$. Com que, per (b) del Lema 9, $f([p, z_1]) = S^1$ i $f([z_1, p]) = S^1$, existeixen $v \in (p, z_1)$ i $u \in (z_1, p)$ tals que $f(u)=f(v)=z_1$. Notem que $z_1 \notin \{u, v\}$. Considerem ara els següents arcs de S^1:

$I_1 = [p, v]$, $I_2 = [z_1, u]$, $I_3 = [u, p]$.

Per construcció tenim que I_1 f-recobreix I_2 i I_3,

I_2 f-recobreix I_2 i I_3 i a més I_3 f-recobreix I_1.
Per a cada enter positiu $n\geq 3$, considerem la següent successió d'arcs de S^1: $M_1 = I_3$, $M_2 = I_1$, $M_k = I_2$ amb $k = 3, 4, \ldots, n$.
Llavors aquesta successió d'arcs compleix les hipòtesis del Lema 2, per tant existeix $z\in I_3$, punt fix de f^n, tal que $f(z)\in I_1$ i $\{f^2(z), f^3(z), \ldots, f^{n-1}(z)\}\subset I_2$. Es facil veure que z és punt n-periòdic de f. En efecte, suposem que $f^j(z)=z$ per a cert $j<n$. En aquestes condicions és clar que $z\in\{u, p\}$ i en tot cas arrivem a contradicció ja que $f^2(z)=p\notin I_2$. Així f té punts n-periòdics per a tot $n\geq 3$.

c.v.d.

Recordem que si f té un nombre finit de punts periòdics, $P(f)$ és de la forma $\{m, 2m, 4m.., 2^n m\}$ amb $n\geq 0$ i $m\geq 1$.

<u>Corol.lari 11.</u> Sigui $f\in C^0(S^1, S^1)$ i suposem que f té un nombre finit de punts periòdics. Llavors $\mathrm{grau}(f)\in\{-1,0,1\}$ i si $m\neq 1$ és $\mathrm{grau}(f) = 1$.

Prova: Utilitzant el Teorema A i el Lema 7.

c.v.d.

CAPITOL 3

Aplicacions contínues del cercle de grau 0.

Sigui $f \in C^0(S^1,S^1)$, M un interval tancat de $\mathbb{R}$ i p un punt de S^1. Escriurem $\underline{l(\bar{f}_p\ M)}$ per designar el real positiu $\max_{t\in M}(\bar{f}_p(t)) - \min_{t\in M}(\bar{f}_p(t))$ amb $M \subset J_p$. Com que l'elevació de f de punt base p és única excepte translació per enters, notem que $l(\bar{f}_p\ M)$ està ben definit. Sigui $Q=[u,v]$, arc tancat de S^1. Per a tot $p \in [v,u]$, $\underline{l(f,p,Q)}$ denotarà el real positiu $l(\bar{f}_p\ M)$, on M és l'únic interval tancat de $\mathbb{R}$ tal que $e(M)=Q$ amb $M \subset J_p$, i li direm <u>longitud de punt base p de f a Q.</u>

Anomenem <u>amplitud de $\bar{f}_p$, $\mathrm{Ampl}(\bar{f}_p)$</u>, a $l(\bar{f}_p, J_p)$. Escriurem $\underline{\mathrm{Ampl}(f)}$ per designar el mínim de $\mathrm{Ampl}(\bar{f}_p)$ per a tot $p \in S^1$.

<u>Lema 12.</u> Sigui $f \in C^0(S^1,S^1)$ i suposem que grau$(f)=0$. Les següents proposicions són certes:

(a) Sigui $q \in S^1$. Per a cada $p \in S^1$ existeix $\bar{f}_p$, una certa elevació de f de punt base p, que compleix,

$$\max_{t\in J_q} f'_q(t) = \max_{t\in J_p} \bar{f}_p(t)$$

$$\min_{t\in J_q} f'_q(t) = \min_{t\in J_p} \bar{f}_p(t)$$

(b) $\mathrm{Ampl}(f) = \mathrm{Ampl}(\bar{f}_p)$ per a tot $p \in S^1$.

(c) Sigui $q \in S^1$ i $t_p \in [0,1)$ tal que $f'_q(t'_p) = \min_{t\in J_q} f'_q(t)$ amb

$t'_p \in \{t_p, t_p+1\}$ i $t'_p \in J_q$. Llavors $f'_p(t_p) = \min_{t\in J_p} f'_p(t)$

Prova: Com que grau$(f) = 0$, la g_q que hem definit en el Lema 5 compleix les següents propietats:

(1) $\max_{t\in\mathbb{R}} g_q(t) = \max_{t\in J_q} f'_q(t)$

(2) $\min_{t\in\mathbb{R}} g_q(t) = \min_{t\in J_q} f'_q(t)$

Amb això (a) és evident (veure les figures 13 i 14).

(b): De (a) es dedueix immediatament que donat $q\in S^1$ és $\mathrm{Ampl}(\bar{f}_q) = \mathrm{Ampl}(\bar{f}_p)$ per a tot $p\in S^1$.

(c): Per (a) del Lema 5 és clar que $g_q(t_p) = g_q(t'_p)$. D'ací i de la propietat (2) es dedueix immediatament (c).

c.v.d.

<u>Teorema B.</u> Sigui $f\in C^0(S^1,S^1)$ i sigui grau$(f)=0$. Llavors val Šarkovskii. Es a dir, si $n\in P(f)$ llavors per a tot m a la dreta de n l'ordenació del Teorema de Šarkovskii, tenim que $m\in P(f)$.

Aquest teorema l'hem dividit en dos casos: $\mathrm{Ampl}(f)\leqslant 1$ i $\mathrm{Ampl}(f)>1$. En el segon cas no donem la demostració, que és equivalent a la de Block, Guckenheimer, Misiurewicz i Young a [3] . En canvi incloim la demostració quan $\mathrm{Ampl}(f)\leqslant 1$,que és més senzilla que la que acabem de citar.

Prova: Pel Lema 7 sabem que f tê com a minim un punt fix. Sigui x_o un d'aquests punts fixos. Com sempre considerem $x_o=e(t_o)$

amb $t_o \in [0,1)$. Es clar que $f'_{x_o}(t_o) = t_o$. Anomenem m al $\min_{t\in J_{x_o}} f'_{x_o}(t)$.

Sigui $p=e(m)$. De l'apartat (a) del Lema 12, es té que $m = \min_{t\in J_p} \bar{f}_p(t)$ per una certa elevació de f de punt base p. Per definició $J_p = [m', m'+1]$ amb $m' \in [0,1)$ i $m' = m+n$, n enter. Sigui $M = \max_{t\in J_p} \bar{f}_p(t)$. Considerem la funció g_p restringida a $J_p - n = [m, m+1]$, definida com a l'apartat (a) del Lema 5. Ja que $g_{p/J_p-n} = \bar{f}_p(t+n)$ és obvi que $m = \min_{t\in J_p-n} g_p(t)$ i $M = \max_{t\in J_p-n} g_p(t)$. Per tant $g_p([m,m+1]) = [m, M]$. Per hipòtesi tenim que $\mathrm{Ampl}(f)<1$ i llavors per (b) del Lema 12, $\mathrm{Ampl}(\bar{f}_p) < 1$ per a tot $p \in S^1$. Llavors $m+1 > M$ i tenim $g_p([m, m+1]) \subset [m, m+1]$. Per tant val Šarkovskii per $g_{p/[m, m+1]}$.

D'altra banda, com que per (a) del Lema 5 sabem que $e(g_p(t)) = f(e(t))$ amb $t \in J_p - n$, és fàcil provar que $e(g_p^k(t)) = f^k(e(t))$ amb $t\in J_p - n$ i k enter positiu qualsevol. Llavors és clar que val Šarkovskii per f.

c.v.d.

CAPÍTOL 4

Aplicacions contínues del cercle de grau +1 ó -1.

En les aplicacions contínues del cercle de grau +1 ó -1, l'amplitud juga un paper secundari com es veurà al llarg d'aquest capítol. Ja hem dit a la introducció que per esbrinar quins són els arcs de S^1 que la seva imatge per f és tot S^1 o compleixen el Lema 2 o el Lema 3 definirem les branques i subbranques de f.

Prèviament, però, obtindrem una condició que ens relaciona les funcions contínues de S^1 en S^1 de grau +1 ó -1 amb l'amplitud. Aquesta condició també ens serà útil a l'hora de caracteritzar $P(f)$.

Sigui $f \in C^0(S^1,S^1)$. Donat $p \in S^1$ siguin $\underline{d_p} = f'_p(t_p)$ i $\underline{A_p = (l,l')}$ amb l i l' definits com segueix (veure les figures 15 i 16):
l és el màxim dels $x \in J_p$ tals que $f'_p([t_p,x]) = d_p$ i l' és el mínim dels $x \in J_p$ tals que $f'_p([x,t_p+1]) = d_p + \mathrm{grau}(f)$.

Notem que l és estrictament més petit que l' quan grau$(f) \neq 0$.

Sigui $\underline{C_p}$ el conjunt dels $x \in J_p$ tals que $f'_p(x) = k + d_p$ amb k enter (veure la figura 17).

Per a cada $p \in S^1$ definim el <u>conjunt dels punts de tall de f, $T(f,p)$</u> com segueix. Considerem les components connexes de $C_p \cap A_p$. Si una component connexa es redueix a un punt t, direm que $t\in T(f,p)$ si f'_p és creixent o decreixent en t. Altrament, si és un interval J, identificant tot aquest interval a un sol punt $\tilde{t}$, direm que $J\subset T(f,p)$ si la nova funció $\tilde{f}'_p$ definida per aquesta identificació és creixent o decreixent en $\tilde{t}$. Les figures 15 i 16 mostren exemples de $T(f,p)$.

<u>Lema 14.</u> Sigui $f\in C^0(S^1,S^1)$ i sigui grau$(f)=\pm 1$. Llavors són equivalents les següents proposicions.

(a) $\mathrm{Ampl}(f) = 1$

(b) Existeix $p\in S^1$ tal que $T(f,p) = \emptyset$

Prova: Les figures 16,32,33,34 i 35 són exemples de funcions d'amplitud 1; les 29, 30 i 31 ho són d'amplitud més gran que 1.

(a) $\Rightarrow$(b)

Per hipòtesi existeix $p\in S^1$ tal que $\mathrm{Ampl}(\bar{f}_p)=1$. Sigui $m=\min\limits_{t\in J_p} f'_p(t)$. És clar que $f'_p(J_p) = [m, m+1]$. Llavors $d_p= f'_p(t_p)$ $\in\{m, m+1\}$. En efecte, si $f'_p(t_p)\notin\{m, m+1\}$, ja que grau$(f)=\pm 1$, $f'_p(t_p+1)$ hauria de sortir de $[m, m+1]$. Per tant $f'_p(J_p)=[d_p,d_p+1]$, és a dir $T(f,p)=\emptyset$.

(b) $\Rightarrow$(a)

Per hipòtesi $f'_p(J_p) = [d_p, d_p+1]+k$ amb k enter, és a dir $\mathrm{Ampl}(f'_p)=1$. Ja que grau$(f)=\pm 1$ tenim que per a tot $p\in S^1$ és $\mathrm{Ampl}(\bar{f}_p)\geqslant 1$. Llavors $\mathrm{Ampl}(f)=1$.

c.v.d.

Proposició 15. Sigui $f\in C^0(S^1,S^1)$ i suposem que grau$(f)=\pm 1$. Si existeix $p\in S^1$, punt fix de f, tal que $T(f,p)=\emptyset$, val Šarkovskii.

Prova: Tenim $f_p'(t_p)=t_p=d_p$ i ja que $T(f,p)=\emptyset$ és clar que $f_p'(J_p)=J_p$ si grau$(f)=+1$ i $f_p'(J_p)=J_p-1$ si grau$(f)\neq -1$. Considerem $\bar{f}_p$ tal que $\bar{f}_p(J_p)=J_p$. Llavors val Šarkovskii per $\bar{f}_p$. La demostració s'acaba com en el Teorema B.

c.v.d.

Vista la informació que ens proporcionen els punts de tall, anem a fer un altre tipus de consideracions.

Per a cada $p\in S^1$ sigui T_p el conjunt dels $q\in S^1$ tals que $f(p)=f(q)$. Notem que $T_p=e(C_p)$. Per a tot $q\in T_p$ i $t_q\in C_p$ tals que $q=e(t_q)$ $alç_p q=alç_p t_q$ denota l'enter $f_p'(t_q)-d_p$.

Lema 16. Sigui $f\in C^0(S^1,S^1)$ i suposem que grau$(f)\neq 0$. Llavors per a cada $p\in S^1$ és certa una de les dues proposicions següents:

(a) Existeix una partició finita de S^1, $\{q_1,q_2, \dots , q_n\}$ que compleix les següents propietats:

(a-1) $p\in [q_n,q_1)$ i $q_i\in T_p$ per a tot $i=1\div n$.

(a-2) $alç_p q_1=\pm 1$, $alç_p q_n=$grau(f) i $alç_p q_i=alç_p q_j\pm 1$ amb $j\in\{i+1,i-1\}$

per a tot $i=2\div n-1$.

(a-3) per a tot $q\in[q_i,q_{i+1}]\cap T_p$ tenim $alç_p q=alç_p q_i$ amb $i=1\div n-1$.

(a-4) $f([q_i,q_{i+1}]) = S^1$ per a tot $i=1\div n-1$ i $f([q_n,q_1])=S^1$.

(b) Per a tot $q\in T_p$ $alç_p q=0$ ó $alç_p q=$grau(f).

Prova: Considerem el conjunt C_p i els conjunts C_p^i, per $i=0\div n$, que compleixen les següents propietats (veure la figura 18):

(1) $C_p = \bigcup_{i=0}^{n} C_p^i$ i $C_p^i \neq \emptyset$ per a tot $i=0\div n$.

(2) per a tot $x \in C_p^i$ i per a tot $y \in C_p^j$ $x<y$ si $i<j$.

(3) per a tot $x \in C_p^i$, $f_p'(x) = k_i + d_p$ amb k_i enter que no depèn de x.

(4) $k_o=0$, $k_n=\text{grau}(f)$ i $k_i = k_j \pm 1$ amb $j \in \{i-1, i+1\}$, $i=1\div n-1$.

Escriurem a_i i b_i per designar respectivament el mínim i el màxim de C_p^i. Notem que $a_o = t_p$ i $b_n = t_p + 1$. Veiem que de conjunts C_p^i n'hi ha, en efecte, un nombre finit.

Si n no fos finit, tampoc ho seria el conjunt $\bigcup_{i=1}^{n} \{a_i, b_i\}$. Per tant, aquest conjunt tindria a J_p un punt d'acumulació s. Llavors per a tot ϵ positiu existeix δ tal que, per a tot $x \in (s-\delta, s+\delta)$ tenim que $f_p'(x) \in (f_p'(s)-\epsilon\ ,\ f_p'(s)+\epsilon)$. Com que a $(s-\delta\ ,\ s+\delta)$ hi hauran punts de diferents alçades, per $\epsilon = \frac{1}{2}$ arribem a contradicció.

Sigui $q_i = e(a_i)$. És fàcil veure que al fer aquesta mateixa construcció per a cada q_j amb $j=1\div n$, com a mínim obtenim els punts de la forma a_i+k amb $a_i+k \in J_{q_j}$, $i=1\div n$ i $k \in \{-1,0,1\}$ (veure les figures 19 i 20). Notem, però, que al passar a C_{q_j} podem perdre el punt a_o. En efecte, només cal prendre una funció f tal que C_p^n tingui més d'un punt (les figures 19 i 20) també il.lustren aquest cas). Per tant no tindrem en compte q_o.

Distingirem dos casos: $n>1$ ó $n=1$. Del primer cas obtenim (a) per construcció i (b) és evident a partir del segon.

c.v.d.

Observem que si (b) és cert, podem considerar, com en el cas (a), $q_1 = e(a_1)$ que compleix $alç_p q_1 = grau(f)$.

Sigui $f \in C^o(S^1, S^1)$ i sigui $p \in S^1$. Si és cert (a) del Lema 16 els conjunts $\underline{B_p^n}$ i $\underline{B_p^i}$, amb $i=1\div n-1$, denoten respectivament els arcs de S^1 $[q_n, q_1]$ i $[q_i, q_{i+1}]$.

A cada B_p^i l'anomenem <u>branca de f de punt base p</u> i diem que <u>f té n branques de punt base p.</u> Si és cert (b) del Lema 16 al conjunt $[q_1, q_1]$ l'anomenem <u>branca de f de punt base p</u> i diem que <u>f té una branca de punt base p.</u>

Notem que si per a tot $p \in S^1$, f té una branca de punt base p, aquesta definició ens dona la mateixa informació que el grau. En aquest cas ens caldrà filar prim, per això més endavant definirem les subbranques de f.

Prèviament veiem el següent resultat.

<u>Lema 17.</u> Sigui $f \in C^o(S^1, S^1)$ i suposem que $grau(f) = \pm 1$. Llavors per a tot $p \in S^1$, f té un nombre senar de branques.

Prova: En la notació introduïda a la demostració del Lema 16 tenim que $b_n = t_p + 1$ i $alç_p b_n = grau(f)$. Si n fos parell llavors b_n tindria alçada parell i, per tant, diferent de $grau(f)$.

c.v.d.

Aquest resultat ens permet agafar els intervals adeqüats en la següent proposició.

Proposició 18. Sigui $f\in C^{o}(S^1,S^1)$. Suposem que grau$(f)=\pm 1$ i existeix $p\in S^1$ tal que f té més d'una branca de punt base p. Llavors $P(f)=\mathbb{N}$.

Prova: Pel Lema 17, f té com a mínim tres branques de punt base p. Reordenem les branques de manera que $f^2(p)\in[q_n,q_1) \subset B_p^n$. Sigui $R=B_p^1$ i $L=B_p^2$. Ja que B_p^1 i B_p^2 f-recobreixen S^1, per continuitat, L f-recobreix R i R f-recobreix $R\cup L$. D'altra banda $R\cap L=\{q_2\}$ i com que $f(q_2)=f(p)$ tenim que $f^2(q_2)\notin R$. El Lema 3 prova que f té punts n-periòdics per a tot $n\geq 2$. A més, per continuïtat, f'_p talla a alguna de les rectes $r_n(t)+t_p$ amb $t\in J_p$, $r_n(t)=t+n$, com ja hem definit en la demostració del Lema 7, i $n\in\{-1,0,1\}$. Per tant f té punts fixos.

c.v.d.

Lema 19. Sigui $f\in C^{o}(S^1,S^1)$ i sigui grau$(f)=\pm 1$. Suposem que per a tot $p\in S^1$ f té solament una branca $[q_1,q_1]$ de punt base p. Llavors per a cada $p\in S^1$ existeixen punts z_o, s_1 i s_2, que eventualment poden coincidir, tals que:

(a) $f([z_o,q_1])=S^1$, $f(z_o)=f(p)$ i $l(f,z_o,[z_o,q_1])=1$;

(b) $f([x,q_1])\neq S^1$ per a tot $x\in(z_o,q_1]$.

(c) $f([s_1,s_2]) = f([q_1,z_o])$.

(d) $p\in[q_1,z_o]$ i $f(p)\in f([s_1,s_2])$.

(e) $alç_{z_o}(a_1') = alç_{z_o}(t_p') = alç_{z_o}(b'+1) = grau(f)$ amb $e(a_1') = q_1$,

$J_{z_o} = [b', b'+1]$ i $b' < a_1' \leq t_p' \leq b'+1$.

(f) Si $z_o \neq q_1$ llavors $z_o \notin [s_1, s_2]$.

(g) Si existeix $p \in S^1$ tal que $l(f, z_o, [s_1, s_2]) \geq 1$ llavors

$[z_o, q_1] \cap [s_1, s_2] = \emptyset$.

Prova: Treballem en la notació introduïda a la demostració del Lema 16, Tenim $C_p = C_p^o \cup C_p^1$. Sigui $z_o = e(b_o)$. Per construcció $f_p'(b_o) = d_p$ i $f_p'(a_1) = d_p + grau(f)$. Llavors $f([z_o, q_1']) = S^1$ i ja que $a_1 = \text{mín}\ C_p^1$ i $b_o = \text{màx}\ C_p^o$ tenim (b) (veure la figura 21). L'apartat (a) és cert per construcció.

Considerem M_p i m_p definits com segueix (veure la figura 22): $x \in M_p$ si $x \in Q$ i $f_{z_o}'(x) = \underset{t \in Q}{\text{màx}}\ f_{z_o}'(t)$; $x \in m_p$ si $x \in Q$ i $f_{z_o}'(x) = \underset{t \in Q}{\text{mín}}\ f_{z_o}'(t)$, amb $Q \subset J_{z_o}$ i tal que $e(Q) = [q_1, z_o]$.

Siguin c_1 i c_2 el mínim i el màxim respectivament del conjunt $\{\text{mín}(M_p), \text{mín}(m_p)\}$ i sigui $s_i = e(c_i)$ (veure la figura 23). Llavors (c) i (d) són certs per construcció.

(e): per construcció tenim que $a_o = t_p$, $b_1 = t_p + 1$, $f_p'(b_o) = f_p'(a_o) = d_p$ i $f_p'(a_1) = f_p'(b_1) = d_p + grau(f)$. És clar que $b_o < a_1 \leq b_1 \leq b_o + 1$. Sigui k un cert enter tal que $J_{z_o} = [b', b'+1]$ amb $b' = b_o - n$. Considerem $a_1' = a_1 - k$ i $t_p' = t_p + 1 - k$. Llavors per (b) del Lema 5 tenim $f_{z_o}'(a_1') = f_{z_o}'(t_p') = f_{z_o}'(b'+1) = grau\ (f)$.

(f): Ja que $z_o \neq q_1$, en la notació de l'apartat anterior, tenim $a_1' < b'+1$. Si $b'+1 \in M_p$ ó m_p del darrer apartat es dedueix que a_1' també hi pertany. Llavors $b'+1$ no pot ser el mínim i $z_o \notin \{s_1, s_2\}$.

(g): De les hipòtesis i de (c) tenim que $z_o \neq q_1$. Per tant de l'apartat anterior deduim que $z_o \neq s_2$. A més $s_1 \neq q_1$.

Si $s_1 = q_1$, $[c_1, c_2] = [a_1', c_2]$ amb a_1'com a l'apartat anterior. Ja que $l(f, z_o, [s_1, s_2]) \geq 1$ en $[a_1', c_2]$ hi ha un punt x tal que $f'_{z_o}(x) = f'_{z_o}(a_1') \pm 1$. Llavors f té més d'una branca de punt base z_o, que es contradeix amb la hipòtesi.

c.v.d.

Notem que $[s_1, s_2]$ sempre existeix encara que es pot reduir a un punt. Considerem, per exemple, $f \in C^o(S^1, S^1)$ tal que $z_o = q_1$ ó tal que $f([q_1, z_o]) =$ constant $= f(p)$. En ambdós casos $M_p = m_p = Q$ i $[s_1, s_2] = \{q_1\}$.

Anomenem <u>subbranca principal de f de punt base p, R_p^1,</u> a l'arc de S^1 $[z_o, q_1]$ i <u>subbranca secundària de f de punt base p, R_p^2,</u> a l'arc de S^1 $[s_1, s_2]$. La <u>longitud de f a R_p^i,</u> que escriurem <u>$L(R_p^i)$,</u> amb i=1 ó 2 serà el real positiu $l(f, z_o, R_p^i)$.

<u>Proposició 20.</u> Sigui $f \in C^o(S^1, S^1)$. Suposem que grau(f)=±1 i que per a tot $q \in S^1$ f té solament una branca. Suposem també que existeix $p \in S^1$ tal que $f(p) \notin \mathrm{int}(R_p^1 \cup R_p^2)$, $f(R_p^2) \supset R_p^1$, el conjunt

$\{f(s_1),\ f(s_2)\}\not\subset \mathrm{int}(R_p^1)$ i és certa una de les següents afirmacions:

(a) $R_p^1 \cap R_p^2 = \emptyset$

(b) $p\notin|q_1,\ z_o|$ i $f(p)\in[p,\ z_o]$

(c) p és fix de f i $p \neq q_1$

(d) $f^2(p)\notin R_p^1$

Llavors $P(f) = \mathbb{N}$.

Notem que si $L(R_p^2)\geq 1$, per (g) del Lema 19 es verifica (a).

Prova: Ja és conegut que quan grau(f)= -1 f té punts fixos. En aquestes hipòtesis, a més, es compleix que f també té punts fixos quan grau(f)=1. En efecte si $f(p)\notin \mathrm{int}(R_p^1\cup R_p^2)$, en particular $f(p)\notin \mathrm{int}(R_p^1)$ i llavors en la notació del Lema 19 tenim que $b'+1>d_p\geq a_1'$(notem que $f(p)\in[q_1,z_o]$). Llavors per continuitat f té un punt fix a R_p^1 (veure la figura 24). Per tant ens proposem provar que f té punts n-periòdics per a tot $n\geq 2$.

En primer lloc tenim que $q_1\neq s_2$ i $s_1\neq s_2$. Si $q_1=s_2$ ó $s_1=s_2$ és clar que, en la notació introduida en la demostració del Lema 19, $M_p = m_p$. Es a dir f'_{z_o} és constant a Q, que es contradeix.

Com que $q_1 \neq s_2$ és clar que $p \neq s_2$. Suposem que $p\in|s_1,\ s_2|$ ès obvi que existeix t_p' tal que $e(t_p') = p$ i $t_p'\in\{\min(M_p),\min(m_p)\}$. Llavors $t_p'\in Q$ i, en la notació introduïda en (e) del Lema 19, tenim que $a_1'<t_p'$. Per (e) del Lema 19 $f'_{z_o}(a_1') = f'_{z_o}(t_p')$ i, ja que t_p' és mínim, tenim $a_1' = t_p'$. Llavors $p=s_1=q_1$.

Per hipòtesis $f(p)\notin \mathrm{int}(R_p^1 \cup R_p^2)$ i per construcció R_p^1 f-recobreix S^1 (és a dir R_p^1 f-recobreix $[f(p), f(p)]$). Llavors és clar que R_p^1 f-recobreix $R_p^1 \cup R_p^2$. D'altra banda tenim que $f(R_p^2) \supset R_p^1$ i $\{f(s_1), f(s_2)\} \not\subset \mathrm{int}(R_p^1)$; això garanteix que R_p^2 f-recobreix R_p^1.

Notem que és possible que R_p^2 f-recobreixi R_p^1 i en canvi $\{f(s_1), f(s_2)\} \subset \mathrm{int}(R_p^1)$ (veure la figura 24), però per construcció f tindrà més d'una branca de punt base z_o.

Si (a) és cert prenent $R=R_p^1$ i $L=R_p^2$ l'apartat (a) del Lema 3 acaba la demostració.

Ja que $f(R_p^2) \supset R_p^1$ tenim que $z_o \neq q_1$ i per (f) del Lema 19 $z_o \neq s_2$. Per tant si $R_p^1 \cap R_p^2 \neq \emptyset$ tenim que $R_p^1 \cap R_p^2 = \{q_1\}$ i $q_1 = s_1$. Per (a) del Lema 19 i ja que $q_1 \in T_p$ tenim que $f(q_1) = f(z_o)$. Ja que c_1 i c_2 són màxim i mínim a Q i $c_1 = a_1'$, per (c) del Lema 19, tenim que $f(R_p^2) = f([q_1, s_2]) = f([q_1, z_o]) = f([s_2, z_o])$ (veure les figures 25 i 26). De (d) del Lema 19, $p \in [q_1, z_o]$. Llavors si (b) és cert distingirem dos casos:

<u>cas 1:</u> $p \in R_p^2$.

Ja que $f(p) = f(q_1)$ i $p \neq s_2$ tenim que $f([q_1, s_2]) = f([p, s_2])$ (veure la figura 25). Com que $[q_1, s_2] = R_p^2$ és clar que $[p, s_2]$ f-recobreix R_p^1. Per hipòtesi $p \neq q_1$ i com que $z_o \neq s_2$ tenim que $R_p^1 \cap [p, s_2] = \emptyset$. Prenent $R=R_p^1$ i $L=[p, s_2]$ pel Lema 1 R f-recobreix $R \cup L$. Llavors l'apartat (a) del Lema 3 acaba la demostració.

<u>cas 2:</u> $p \notin R_p^2$.

De (a) del Lema 19 $f(p)=f(z_o)$ i com que $p \neq s_2$ tenim que $f([s_2, z_o])=f([s_2, p])$, (veure la figura 26). Com que $f(R_p^2)= f([s_2, z_o])$ i R_p^2 f-recobreix R_p^1 és clar que $[s_2, p]$ f-recobreix R_p^1. D'altra banda per hipòtesis $f(p) \notin [s_2, p)$ i per tant, amb un raonament anàleg a l'anterior tenim que R_p^1 f-recobreix $R_p^1 \cup [s_2, p]$. Prenent $R=R_p^1$ i $L=[s_2, p]$, com que $p \neq z_o$ i $s_2 \neq q_1$, la part (a) del Lema 3 acaba la demostració.

Si (c) és cert tenim que $p \notin R_p^2$. En efecte, si $p \in R_p^2$ com que $f(p)=p$ i $f(p) \notin \mathrm{int}(R_p^1 \cup R_p^2)$ tenim que $p \in [s_1, s_2]$ i per tant $p=s_1$. D'altra banda hem vist que $q_1=s_1$, que ens porta a contradicció amb la hipòtesi.

Notem però que si $p \in R_p^2$ tenim $T(f,p) = \emptyset$ i per ser p fix val Šarkovskii tal com hem vist a la Proposició 15.

Per construcció tenim que $f(q_1)=f(p)=p$ i ja hem vist que $z_o \neq s_2$. Prenent $R=R_p^1$ i $L=R_p^2$, ja que $p \notin R_p^2$, l'apartat (b) del Lema 3 acaba la demostració.

Si (d) és cert, com que per construcció $f(p)=f(q_1)$, tenim $f^2(q_1) \notin R_p^1$. Prenent $R=R_p^1$ i $L=R_p^2$ l'apartat (a) del Lema 3 acaba la demostració.

c.v.d.

Sigui $f \in C^o(S^1, S^1)$ tal que per a tot $q \in S^1$ f té solament una branca. En la notació introduïda a la demostració del Lema 19, sigui $\underline{c_p} \in [c_1, c_2]$ amb $c_p \in M_p$ i sigui $\underline{s_p}=e(c_p)$.

<u>Proposició 21.</u> Sigui $f\in C^o(S^1,S^1)$. Suposem que grau(f)=± 1 i que per a tot $q\in S^1$ f té una sola branca. Sigui $p\in S^1$ l'únic punt fix de f. Són certes les tres proposicions següents:

(a) Si $T(f,p) = \emptyset$ val Šarkovskii.

(b) Si $T(f,p) \neq \emptyset$ i $f(s_p)\notin R_p^1$ tenim $P(f)= \mathbb{N}$.

(c) Si $T(f,p) \neq \emptyset$ i $f(s_p)\in R_p^1$ existeix un enter n amb $n\geq 2$, tal que $P(f)=\{1,\ n,\ n+1,\ \ldots,\}$.

El Lema 7 ens diu que una funció així ha de ser necessàriament de grau +1.

Prova:

(a): és la Proposició 15.

Si considerem les subbranques de punt base p, ja que p és l'unic punt fix tenim $z_o=p$. En efecte si $b_o\neq a_o=t_p$ hi haurien més punts fixos (veure la figura 27). Llavors $R_p^1=[p,\ q_1]$.

(b): Per construcció $f(R_p^2)$ és un arc de S^1 de la forma $[u,f(s_p)]$. Per (d) del Lema 19, $p=f(p)\in f(R_p^2)$ és a dir $[p,f(s_p)]\in f(R_p^2)$. Ja que $f(s_p)\notin R_p^1$ és clar que R_p^2 f-recobreix R_p^1. D'altra banda $f(p)=p\notin \mathrm{int}(R_p^1\cup R_p^2)$ i per tant R_p^1 f-recobreix $R_p^1\cup R_p^2$ ja que, per construcció, R_p^1 f-recobreix $[p,p]$. Per (f) del Lema 19 $p\neq s_2$, per tant $p\notin R_p^2$ i, per construcció, $f(q_1)=f(p)=p$. Llavors prenent $R=R_p^1$ i $L=R_p^2$ el Lema 3 acaba la demostració ja que $R_p^1\cap R_p^2=\emptyset$ ó $R_p^1\cap R_p^2=\{q_1\}$.

(c): Tenim que $f(s_p) \neq p$. En efecte, si $f(s_p)=p$ llavors

$f'_p(c_p)=t_p+k$ amb k enter; ja que f és de grau +1, $f'_p(t_p+1)=t_p+1$ i ja que $c_p \in M_p$ és clar que $k\geq 1$. D'altra banda si $k>1$ tindríem més d'una branca de punt base p. Si $k=1$ tenim $f'_p(J_p)=[m,\ t_p+1]$ amb $m=\min_{t\in J_p} f'_p(t)$. Notem que si $m<t_p$, per continuïtat, p no és l'únic punt fix (veure la figura 27). Per tant $f'_p(J_p)=J_p$ i $T(f,p)=\emptyset$ que es contradeix.

Ja que $R^1_p=[p,q_1]$ i $f(s_p)\in R^1_p$ és clar que $f(s_p)\in(p,q_1]$. Sigui m el més petit enter positiu tal que: $f^{m-1}(s_p)\in(p,q_1]$ i $f^m(s_p)\in(q_1,p]$. Prenem els següents arcs a S^1 (veure la figura 28):

$A_1=[p,f(s_p)]$, $A_i=[f^{i-1}(s_p),\ f^i(s_p)]$ amb $i=2,\ \dots,\ n$.

$B=[q_1,s_p]$ i $C=[s_p,p]$

Per construcció $f(q_1)=f(p)=p$ i llavors $f(B)=f(C)\supset A_1$. D'altra banda és clar que $f(A_1)\supset A_1\cup A_2$ i $f(A_i)\supset A_{i+1}$ amb $i=2$, ..., m-1. Distingirem dos casos (el segon està il.lustrat per la figura 28):

<u>cas 1:</u> $f^m(s_p)\in C$.

És clar que $A_m\supset B$ i per tant $f(A_m)\supset A_1$. Per a cada enter n, amb $n>m$, considerem la següent successió d'arcs del cercle: $M_i=A_{i+1}$ amb $i=1,\ \dots\ ,\ m-1$ i $M_i=A_1$ amb $i=m,\ \dots\ ,\ n$. Pel Lema 2 existeix $v\in A_2$, punt fix de f^n, tal que $f^i(v)\in M_{i+1}$; a més v és punt n-periòdic ja que $f^{n-1}(v)\neq v$. Tenim $\{f^{m-1}(v),\ \dots\ ,\ f^{n-1}(v)\}\subset A_1$ i $A_1\cap A_2=\{f(s_p)\}$. Si $f^{n-1}(v)=v$ és clar que $f^{n-1}(v)=f(s_p)=v$. Ja que $v=f^n(v)$ tenim $f(s_p)=f^2(s_p)$ i p no és l'únic punt fix de

f, que es contradeix. Per tant f té punts n-periòdics per a tot $n \geq m$.

<u>cas 2:</u> $f^m(s_p) \in (q_1, s_p)$.

Per construcció $A_m \supset [f^{m-1}(s_p), p]$ i $f(q_1)=f(p)=p$. Llavors $f(A_m) \supset [f^m(s_p), p] \supset C$.

Per a cada enter n, amb $n \geq m+1$ considerem la següent successió d'arcs de S^1:

$M_i = A_{i+1}$ amb $i=1, \ldots, m-1$, $M_m = C$, $M_i = A_1$ amb $i=m+1, \ldots, n$.

La demostració acaba com en el cas anterior.

c.v.d.

El següent teorema és el resum dels resultats obtinguts per $\mathrm{grau}(f)=\pm 1$.

<u>Teorema C.</u> Sigui $f \in C^0(S^1, S^1)$ i suposem que $\mathrm{grau}(f)=\pm 1$.

(i) Si existeix $p \in S^1$ tal que f té més d'una branca de punt base p tenim que $P(f) = \mathbb{N}$.

(ii) Suposem que per a tot $p \in S^1$ f té una sola branca de punt base p, i sigui $R_p^1 = [p_1, p_2]$ la subbranca principal, llavors són certes les següents proposicions:

(a) Suposem que existeixen $p \in S^1$ i $A = [a,b]$, arc propi tancat de S^1, tals que $f(A) = f(S^1 - R_p^1)$, $f(p) \notin \mathrm{int}(R_p^1 \cup A)$, $f(A) \supset R_p^1$, $\{f(a), f(b)\} \not\subset \mathrm{int}(R_p^1)$ i és certa una de les següents afirmacions:

(1) $A \cap R_p^1 = \emptyset$

(2) $p \notin [p_1, p_2]$ i $f(p) \in [p, p_1]$

(3) p és punt fix de f i $p \neq p_2$

(4) $f^2(p) \notin R_p^1$

Llavors $P(f) = \mathbb{N}$

(b) Suposem que existeix $p \in S^1$, punt fix de f tal que per a tot q i E amb $q \in T_p$, E entorn de q a S^1 i $p \notin E$ tenim que $p \in Fr(f(E))$. Llavors val Šarkovskii.

(c) Sigui p l'únic punt fix de f i suposem que existeix $q \in S^1$ tal que: $q \notin R_p^1$, $f(q) \in R_p^1$ i $f(S^1 - R_p^1) = [v, f(q)]$ amb $[v, f(q)]$ arc propi de S^1. Llavors existeix un enter n amb $n \geq 2$, tal que $P(f) = \{1, n, n+1, \ldots\}$.

Prova:

(i) és la Proposició 18

(ii, (a)) prenent $A = R_p^2$ és la Proposició 20 utilitzant (c) del Lema 19.

(ii, (b)) per hipòtesis és clar que $T(f,p) = \emptyset$. La Proposició 15 acaba la demostració.

(ii, (c)) ja que $f(S^1 - R_p^1) = [v, f(q)]$ i $q \notin R_p^1$ tenim que $q = s_p \neq q_1$. D'altra banda per (d) del Lema 19 $p = f(p) \in f([s_1, s_2])$ i per (c) del mateix lema $f([s_1, s_2]) = [v, f(q)]$. Llavors $f(q) \neq p$. En efecte si $f(q) = p$ tenim $f(s_p) = p$. Per construcció és clar que $f(q_1) = p$. En la notació introduïda a l'apartat (e) del Lema 19 tenim $alç(a_1') = alç(c_p)$ i $a_1' \leq c_p$. Com que $q_1 \neq s_p$ tenim $a_1' < c_p$ i arrivem a contradicció perque en aquest cas c_p no seria el mínim de M_p.

En aquestes condicions és fàcil veure que $T(f,p) \neq \emptyset$.

Ja que $f(q)\in R_p^1$ som a les hipòtesis de (c) de la Proposició 21. Això acaba la demostració.

c.v.d.

Al començament del capítol, hem avançat que l'amplitud juga un paper secundari. Observem que f pot tenir una sola branca i ser d'amplitud més gran que 1 (veure la figura 31) o tenir més d'una branca i ser d'amplitud 1 (veure la figura 16). El següent lema mostra que les funcions per les quals hem caracteritzat P(f) en el Teorema C poden ser de qualsevol amplitud. En l'enunciat d'aquest lema utilitzarem la següent definició.

Sigui $f\in C^o(S^1, S^1)$ i B_p^i una branca de f de punt base p. Direm que <u>f té pendent positiva a B_p^i</u> si $alç_p a_{i+1}-1 = alç_p a_i$ quan $i=1\div n-1$ i $alç_p a_1-1 = alç_p a_o$ quan $i= n$. Anàlogament direm que <u>f té pendent negativa a B_p^i</u> si $alç_p a_{i+1} = alç_p a_i-1$ quan $i=1\div n-1$ i $alç_p a_1 = alç_p a_o-1$ quan $i= n$. La figura 29 il.lustra aquesta definició, f té pendent negativa a B_p^2 i positiva a B_p^1.

<u>Lema 23.</u> Sigui $f\in C^o(S^1, S^1)$. Suposem que grau(f)=±1 i per a tot $p\in S^1$ és certa una de les tres afirmacions següents.

(a) f té més d'una branca de punt base p i com a mínim dues d'aquestes branques compleixen $l(f,p,B_p^i) > 1$.

(b) f té més d'una branca de punt base p, $l(f,p,B_p^k) > 1$ per un únic k i f té pendent diferent a B_p^{k-1} i B_p^k.

(c) f té solament una branca de punt base p, $L(R_p^2) > 1$ i

$l(f, z_o, [z_o, s_1])>1$.

Llavors $Ampl(f)>1$.

Les figures 29 i 30 són un exemple d'aquest lema. Les figures 32,33,34 i 35 mostren que si falla alguna hipòtesi ja és possible trobar un $p\in S^1$ que no tingui punts de tall. Notem també que el recíproc no és cert ja que hi ha funcions d'amplitud més gran que 1 que no compleixen les hipòtesis (veure la figura 31). A més aquest lema deixa clar que les funcions per les quals hem caracteritzat $P(f)$ poden ser tant d'amplitud 1 com més gran que 1.

Prova: Sigui $p\in S^1$ tal que (b) és cert. Per construcció tenim $B_p^k = e([a_k, a_{k+1}])$ amb $C_p^k \subset [a_k, a_{k+1}]$, en la notació introduïda a la demostració del Lema 16. Podem suposar sense restricció (com a la figura 29) que la pendent de B_p^k és negativa.

Sigui $t_s \in [a_k, b_k]$ tal que $f_p'(t_s) = \max_{t\in[a_k, b_k]} f_p'(t)$. Ja que $l(f,p,B_p^k)>1$ i la pendent de f a B_p^k és negativa tenim $f_p'(t_s) > f_p'(a_k)$. Per hipòtesi la pendent de B_p^{k-1} és positiva. Llavors $l(f_p', [a_{k-1}, t_s])>1$ i $l(f_p', [t_s, a_{k+1}])>1$.

Si (c) és cert, per (d) del Lema 19 tenim $R_p^1 \cap R_p^2 = \emptyset$.

En qualsevol dels tres casos, tenim dos intervals tancats a J_p tals que la longitud de f_p' en aquests intervals és estrictament més gran que 1. Lavors l'antiimatge de d_p té com a mínim dues components connexes a J_p. Per construcció com a mínim una d'aquestes components connexes és a A_p i llavors $T(f,p) \neq \emptyset$ per a tot $p \in S^1$. Pel Lema 14 tenim $Ampl(f) > 1$.

c.v.d.

Ja hem vist a la introducció que $P(f) \supset \{1, 2, 3\}$ equival a dir $P(f) = \mathbb{N}$. El Teorema C mostra les dificultats amb les funcions de grau± 1. D'entrada ens diu com trobar funcions de grau ± 1 amb $P(f) = \mathbb{N}$ (Proposicions 18 i 20), $P(f) = \{1, 3, 4, \ldots\}$ (Proposició 21) i a més sabem que hi ha funcions que $1 \notin P(f)$. D'altra banda (com en el cas de les funcions de grau 0) ens assegura l'existència de funcions que compleixen Šarkovskii (Proposicions 15 i 21). Això fa possible l'existència de funcions de grau± 1 amb $P(f) = \{1, 2, 4, 5, \ldots\}$ (veure [9]).

A més de la dificultat que implica aquesta varietat de possibilitats, hi ha alguns resultats coneguts que encara no han aparegut en aquest estudi a partir del grau. Això fa esperar que la complicació augmenti notablement. Observem per exemple que encara no hem caracteritzat les funcions amb un nombre finit de punts periòdics; únicament sabem, pel Corol.lari 11, que són de grau 1, -1 ó 0. La següent proposició,la demostració de la qual es pot trobar en el llibre d'Arnold i Avez (veure [1]), mostra dues altres possibilitats.

Proposició 24. Sigui $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ i $\varphi : S^1 \longrightarrow S^1$ automorfisme tal que $\varphi(x) = x+\omega \pmod{1}$ amb $\omega \in \mathbb{R}$.

Llavors són certes les dues proposicions següents.

(a) $\omega = s/q$ racional $\Leftrightarrow$ p és q-periòdic per a tot $p \in S^1$.

(b) ω és irracional $\Leftrightarrow$ les òrbites de φ són denses a S^1 i per tant $P(f) = \emptyset$.

CAPÍTOL 5

Homeomorfismes del cercle

La dificultat que hem trobat en el capítol 4 desapareix quan considerem homeomorfismes en lloc d'aplicacions contínues del cercle. En aquest cas podem caracteritzar completament $P(f)$.

Lema 25. Sigui $f: J \longrightarrow J$ homeomorfisme amb $J = [x, x']$, $x' \doteq x+1$. Llavors les següents proposicions són certes:

(a) f és monòtona creixent o decreixent.

(b) Si f creix tenim $P(f) = \{1\}$.

(c) Si f decreix tenim $P(f) = \{1,2\}$.

Prova: La part (a) és fàcil de provar per injectivitat i continuïtat. (b): Ja que f és bijectiva i creixent és clar que $x, x' \in Fix(f)$ i $P(f) \supset \{1\}$. Anem a veure que $P(f) = \{1\}$. Prenem $Fix(f)$ amb els seus elements ordenats, $\{x_o, \ldots, x_n\}$. És clar que $x_o = x$ i $x_n = x'$. Sigui $J_i = (x_i, x_{i+1})$. Tenim que $J_i \cap Fix(f) = \emptyset$ per a tot $i = 0, \ldots, n-1$. És a dir, per a tot $x \in J_i$, $x < f(x)$ ó $x > f(x)$. Per tant $f^n(x) < f^{n+1}(x)$ ó $f^{n+1}(x) < f^n(x)$ per a tot n enter positiu. Llavors és obvi que $Per(f) = Fix(f)$.

(c): Ja que f és bijectiva i decreixent és evident que $f(x) = x'$ i $f(x') = x$; és a dir, x i x' són punts 2-periòdics de f. D'altra banda, per continuïtat f talla a $r_o(t)+x$ amb $r_o(t)$ definit com a la demostració del Lema 7. Llavors f té punts fixos. Així $P(f) \supset \{1,2\}$.

Volem veure que $P(f) = \{1,2\}$. Com que f decreix, tenim que f^2 creix i per (b) $P(f^2) = \{1\}$. Suposem que $P(f) \neq \{1,2\}$; és a dir, que existeix un enter positiu n, $n>2$, tal que $n \in P(f)$. Sigui z un dels punts n-periòdics de f. Si n és parell és obvi que z és punt $n/2$ - periòdic de f^2 amb $n/2 \neq 1$. Si n és senar tenim que z és punt n-periòdic de f^2 amb $n \neq 1$. Això es contradeix amb que $P(f^2) = \{1\}$.

c.v.d.

<u>Lema 26.</u> Sigui $f: S^1 \longrightarrow S^1$ homeomorfisme. Llavors per a tot $p \in S^1$ existeix H_p, interval tancat de $\mathbb{R}$, tal que $f'_p: J_p \longrightarrow H_p$ és homeomorfisme. A més $H_p = [d_p, d_p+1]$ ó $[d_p-1, d_p]$.

Prova: Ja que f és bijectiva ho és f'_p. Com que f'_p és contínua és creixent ó decreixent. Llavors $f'_p(J_p) = [d_p, d_p+1]$ si és creixent i $f'_p(J_p) = [d_p-1, d_p]$ si és decreixent. Sigui H_p aquest interval. Ja que $f'_p: J_p \longrightarrow H_p$ és bijectiva, $f_p'^{-1}: H_p \longrightarrow J_p$ també ho és. Sigui g l'elevació de f^{-1} a H_p. El següent raonament prova que $g = f_p'^{-1}$: $q = f^{-1}(f(q)) = f^{-1}(f(e(t_q))) = f^{-1}(e(f'_p(t_q)) = e(g(f'_p(t_q)))$ amb $t_q \in J_p$. Ja que f^{-1} és contínua i $f_p'^{-1}$ és elevació de f^{-1} tenim que $f_p'^{-1}$ és contínua i f'_p homeomorfisme.

c.v.d.

<u>Teorema D.</u> Sigui $f: S^1 \longrightarrow S^1$ homeomorfisme. Les següents proposicions són certes.

(i) $\text{grau}(f) = +1$ ó -1.

(ii) Si grau$(f)=+1$ i $P(f) \neq \emptyset$ existeix n, enter positiu, tal que $P(f)=\{n\}$.

(iii) Si grau$(f)=-1$ tenim que $P(f)=\{1\}$ ó $P(f)=\{1,2\}$.

Prova: Ja que $e(0)=1$, pel Lema 26 $f_1': J_1 \longrightarrow H_1$ és homeomorfisme creixent o decreixent. És clar que si és creixent tenim grau$(f)=+1$ i grau$(f)=-1$ si és decreixent.

(ii): Si $P(f) \neq \emptyset$ sigui n el mínim de $P(f)$. És obvi que f^n és homeomorfisme i té un punt fix com a mínim. Sigui p un d'aquests punts fixos. Tenim que $f_p^{n\prime}(J_p)=J_p$ i $f_p^{n\prime}$ és homeomorfisme pel Lema 26. Del Lema 25 es dedueix que $P(f_p^{n\prime})=\{1\}$. És a dir, $P(f^n)=\{1\}$ i $P(f)\supset\{n\}$. Anem a veure que $P(f)=\{n\}$. Sigui $m\in P(f)$ amb $m\neq n$. Ja que n és el mínim tenim $m>n$. Si $q\in S^1$ és m-periòdic de f és clar que $q\in \mathrm{Fix}(f^{nm})$. Per tant $q\in \mathrm{Per}(f^n)$ però $q\notin \mathrm{Fix}(f^n)$ i això es contradiu amb que $P(f^n)=\{1\}$.

(iii): Pel Lema 7 f té dos punts fixos com a mínim. Sigui p un d'ells. Pel Lema 26 $f_p'(J_p)=H_p$ i és homeomorfisme. Ja que $H_p=[d_p-1,\ d_p]$ i p és fix, si $\bar{f}_p=f_p'+1$ tenim que $\bar{f}_p(J_p)=J_p$. Del Lema 25 es dedueix que $P(\bar{f}_p)=\{1,2\}$. A la demostració del Lema 25 teniem que $\mathrm{Per}(\bar{f}_p^{\,2})\supset[t_p,\ t_p+1]$. Ja que t_p és un punt fix de f, si $\mathrm{Per}(\bar{f}_p^{\,2})=\{t_p,\ t_p+1\}$ és obvi que $P(f)=\{1\}$. Llavors tenim que $P(f)\supset\{1\}$ ó $P(f)\supset\{1,2\}$. Suposem ara que existeix un enter positiu n, $n>2$, tal que $n\in P(f)$. D'altra banda, ja que f és de grau -1, f^2 és de grau $+1$ i $P(f^2)=\{1\}$. Si q és un punt

n-periòdic de f és clar que $q \in Fix(f^{2n})$. Per tant $q \in Per(f^2)$ però $q \notin Fix(f^2)$, que es contradiu amb que $P(f^2) = \{1\}$.

c.v.d.

APÈNDIX

Un exemple

La caracterització dels períodes d'una funció contínua de S^1 en S^1 que hem aconseguit és suficient per resoldre, des d'un punt de vista global el següent problema.

Com són els punts periòdics d'una funció continua de S^1 en S^1 tal que la gràfica de la seva elevació és una recta ?.

Proposició 28. Sigui $f\in C^0(S^1,S^1)$ i suposem que f_p' és una recta per a cert $p\in S^1$. Llavors són certes les següents proposicions:

(i) Si $|\text{grau}(f)|\geq 2$, $P(f) = \mathbb{N}$ excepte quan $\text{grau}(f) = -2$ que $P(f) = \mathbb{N}-\{2\}$.

(ii) Si $\text{grau}(f) =+1$, $P(f)=\emptyset$ ó $P(f)= \{n\}$ i $\text{Per}(f)=S^1$, amb $n\geq 1$.

(iii)Si $\text{grau}(f) =-1$, $P(f)= \{1,2\}$ i $\text{Per}(f)=S^1$.

(iv) Si $\text{grau}(f) = 0$, $P(f)= \{1\}$ i $\text{Per}(f)$ té un únic punt.

Prova: (i) és immediat pel Teorema A .

(ii): és immediat pel Teorema D i la Proposició 24.

(iii):pel Teorema D sabem que $P(f)=\{1\}$ ó $P(f)= \{1,2\}$. Ja que $\text{grau}(f)= -1$, és clar que $f_p'(t) = d_p-t$ amb $d_p=f_p'(t_p)$ com ja hem definit en la pagina 21. Tenim que $f_p'^{2}(t)=t$ per a tot $t\in J_p$.

(iv): ja que $\text{grau}(f)=0$ i f_p' és una recta és obvi que $f_p'(t)=$ ctant per a tot $t\in J_p$. Llavors $\text{Per}(f)=\text{Fix}(f)$ i solament té un punt.

c.v.d.

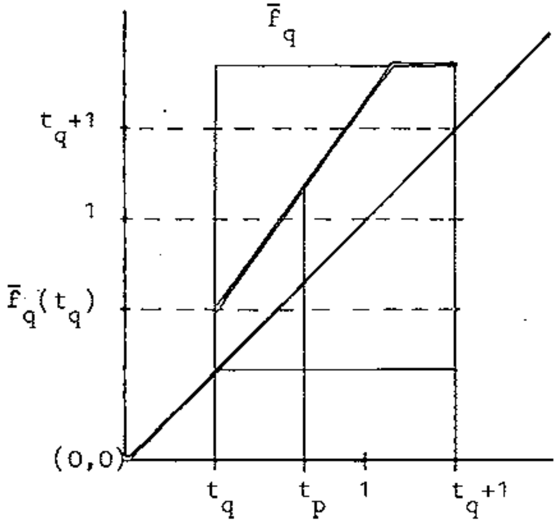

Figura 1.

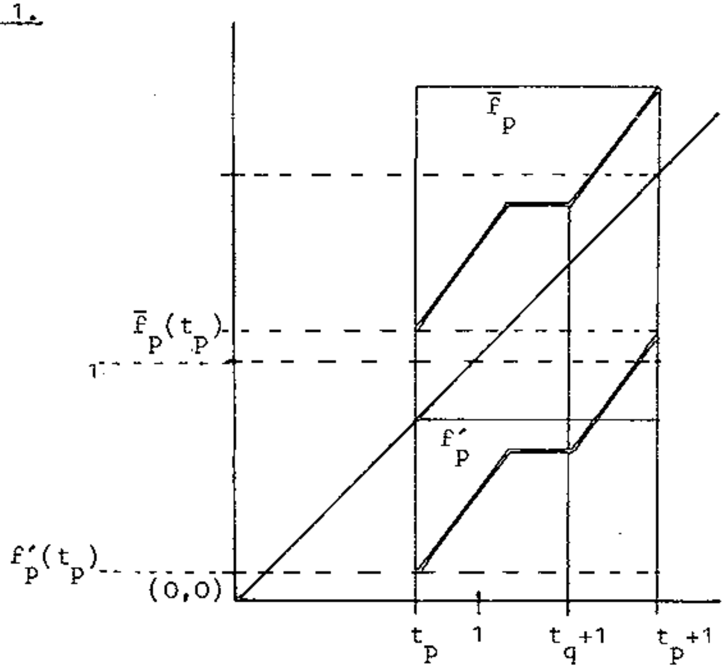

Figura 2.

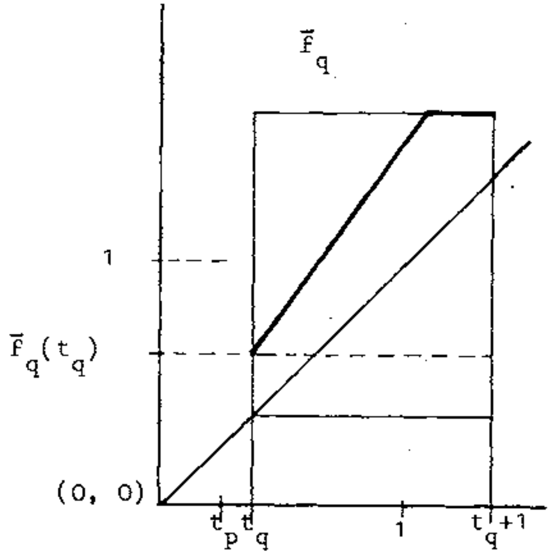

Figura 3.

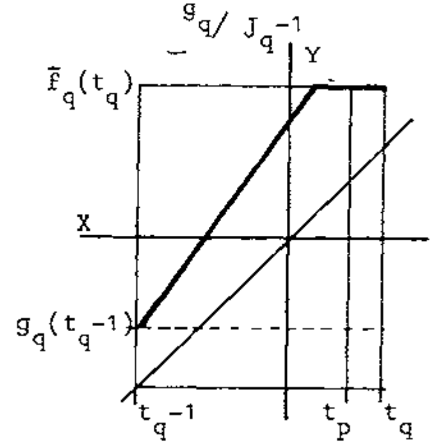

Figura 4.

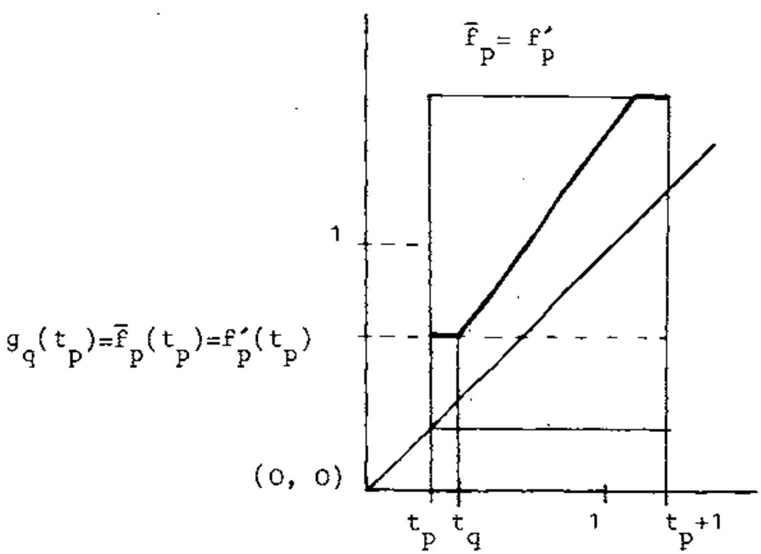

Figura 5.

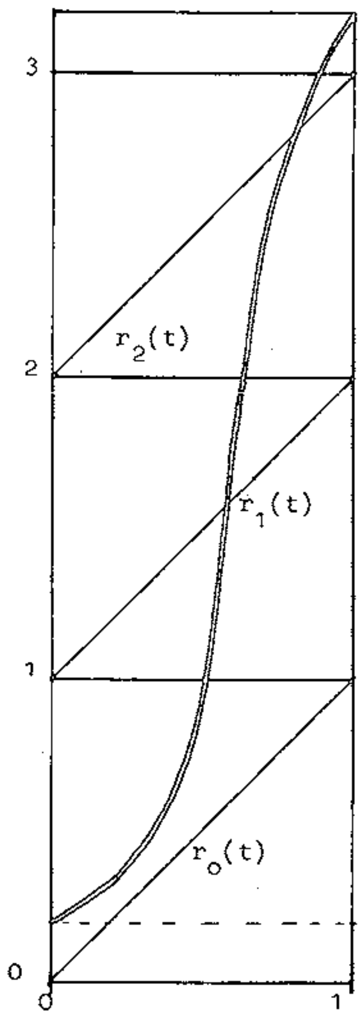

Figura 6.

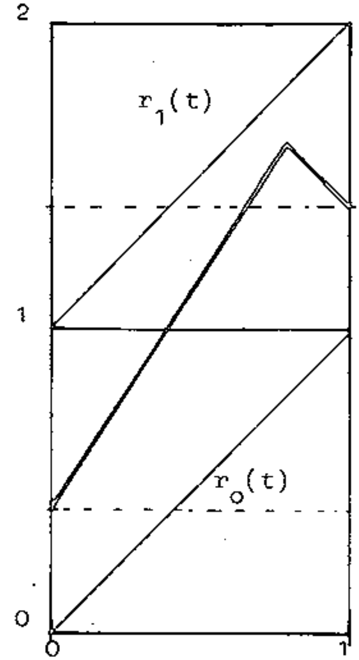

Figura 7.

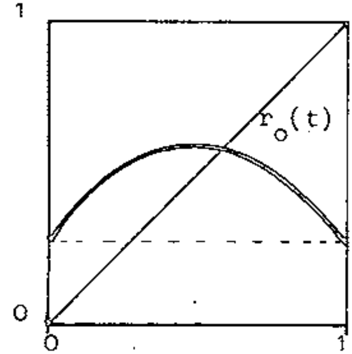

Figura 8.

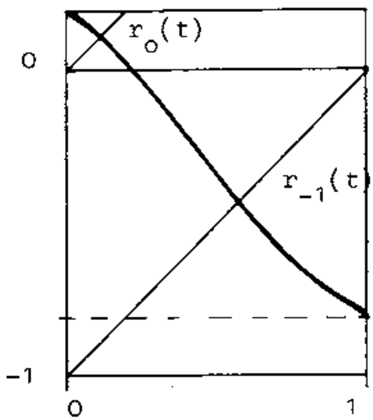

Figura 9.

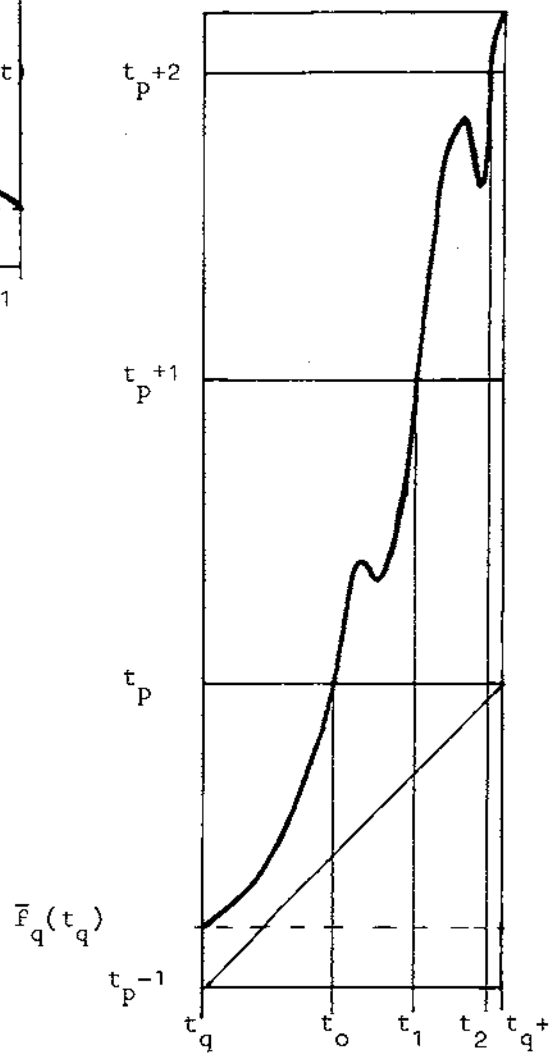

Figura 10.

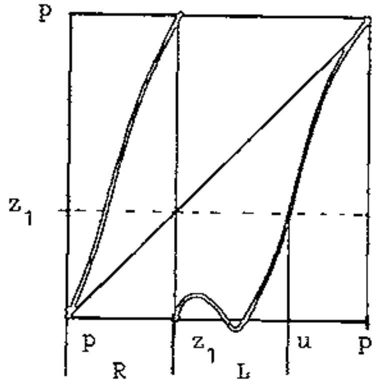

Figura 11.

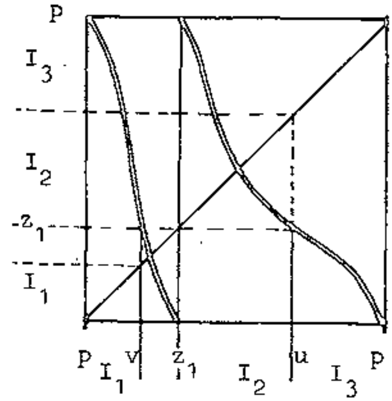

Figura 12.

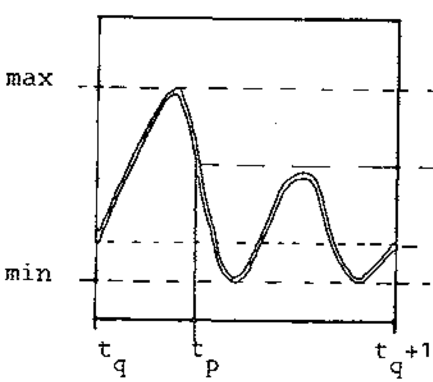

Figura 13.

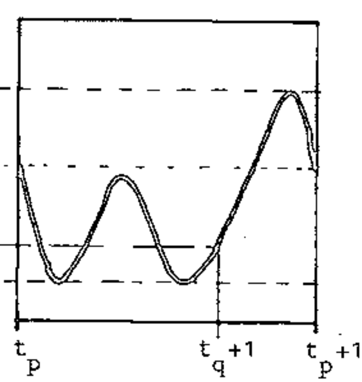

Figura 14.

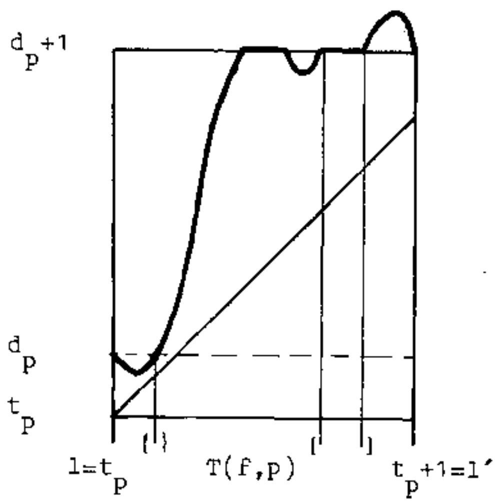

Figura 15.

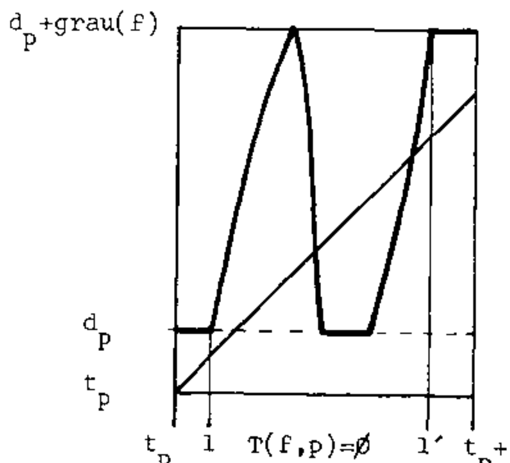

Figura 16.

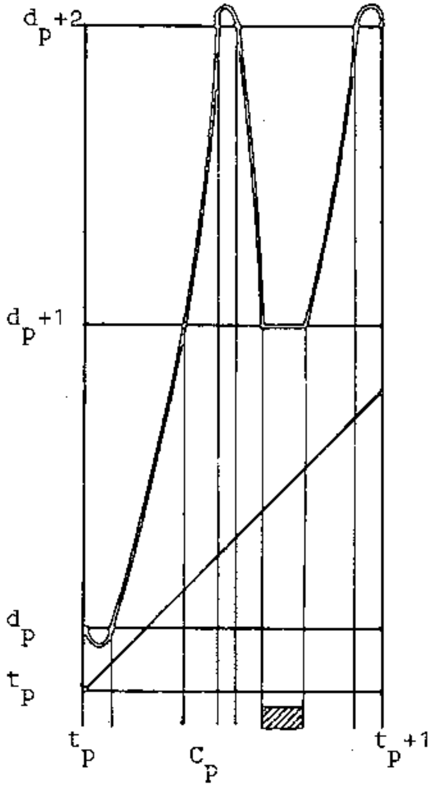

Figura 17.

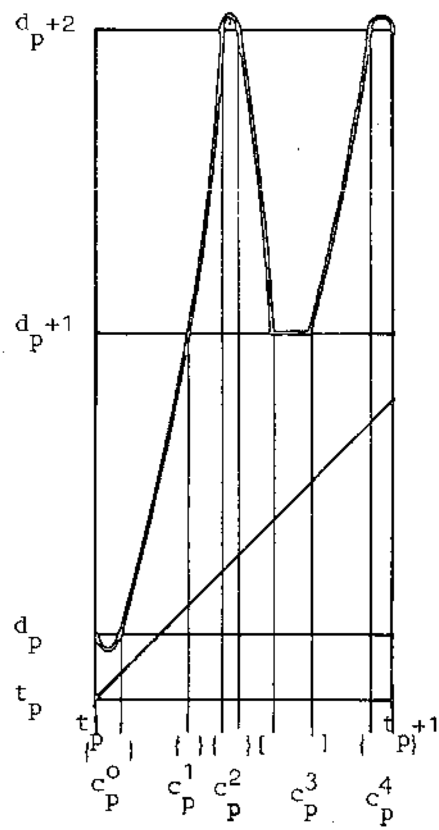

Figura 18.

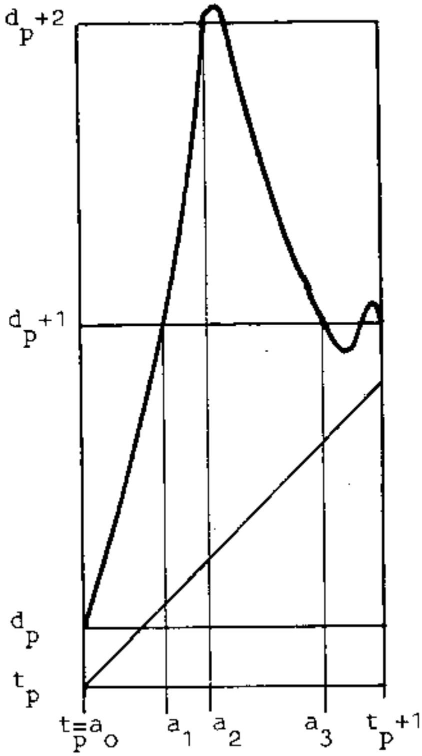

Figura 19.

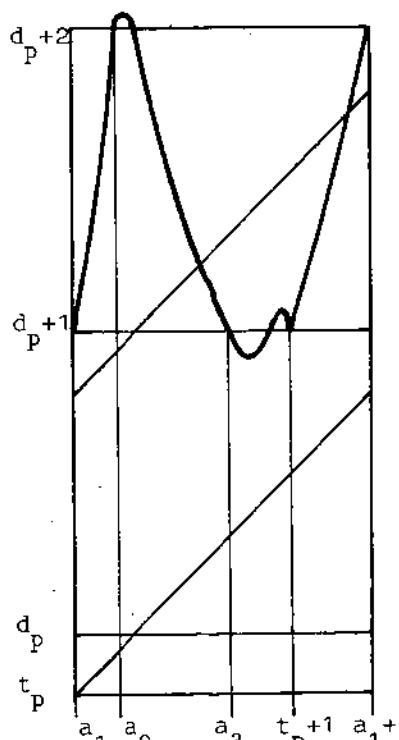

Figura 20.

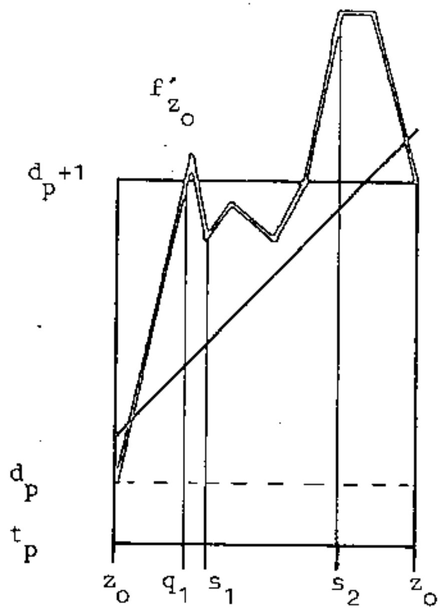

Figura 23.

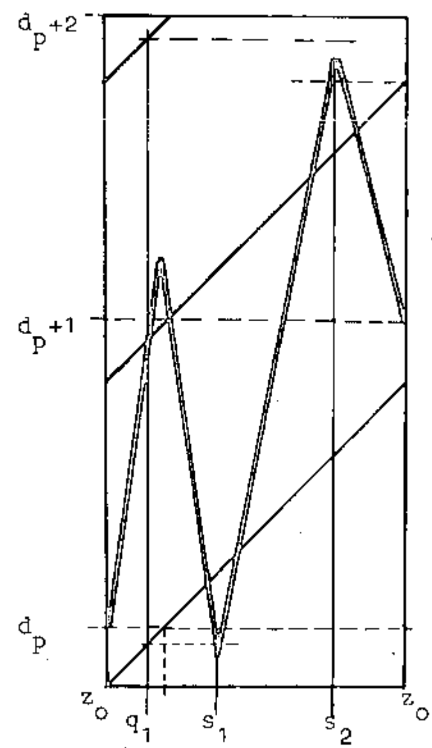

Figura 24.

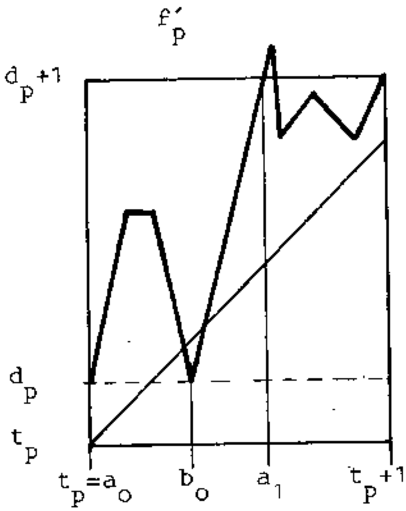

Figura 21.

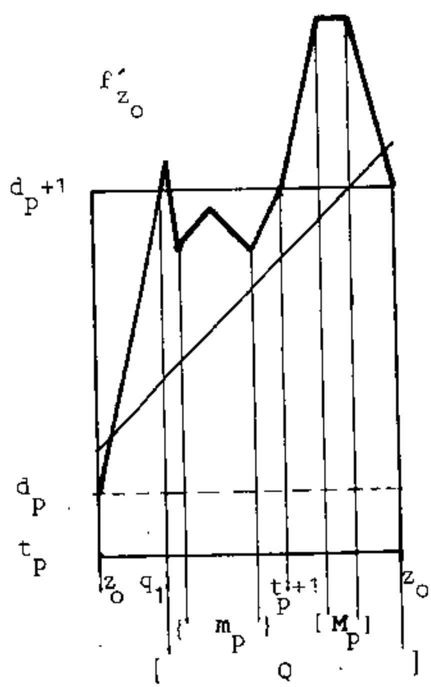

Figura 22.

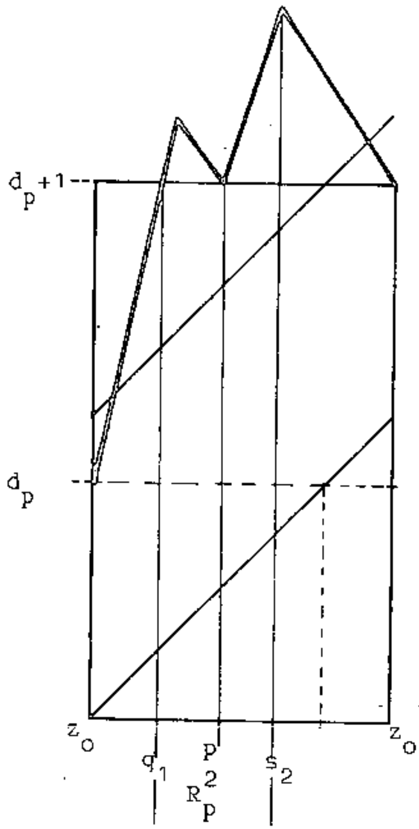

Figura 25.

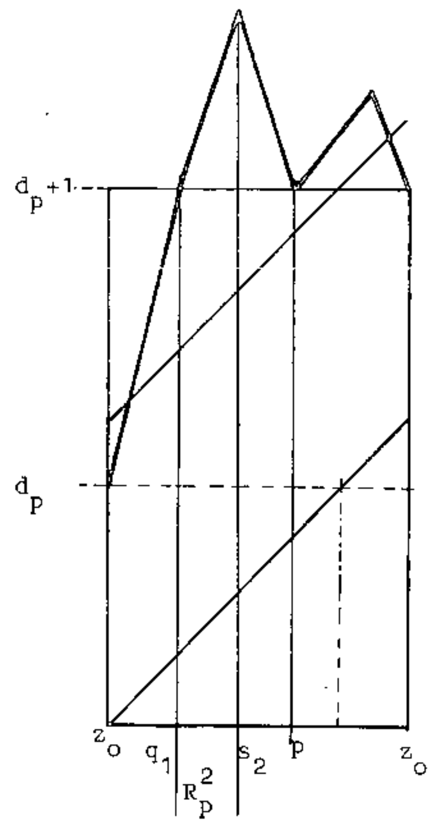

Figura 26.

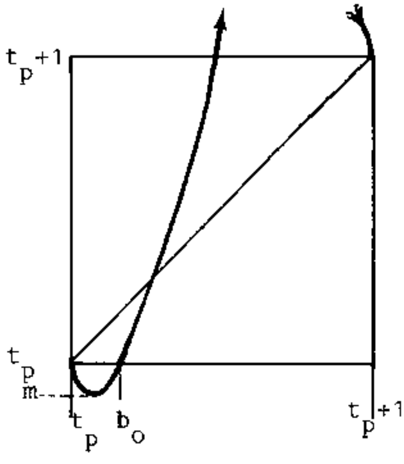

Figura 27.

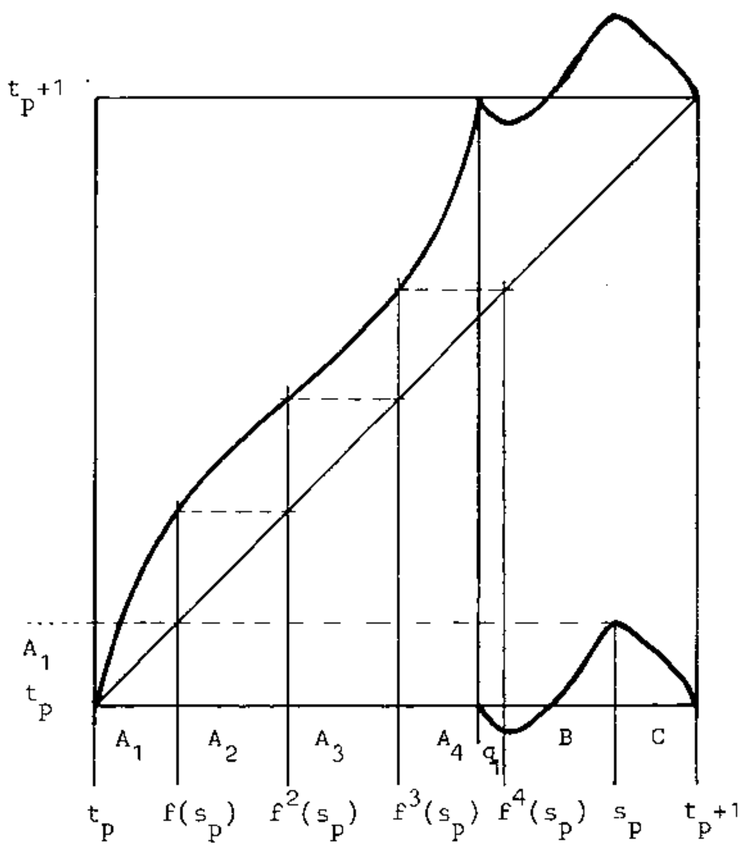

Figura 28.

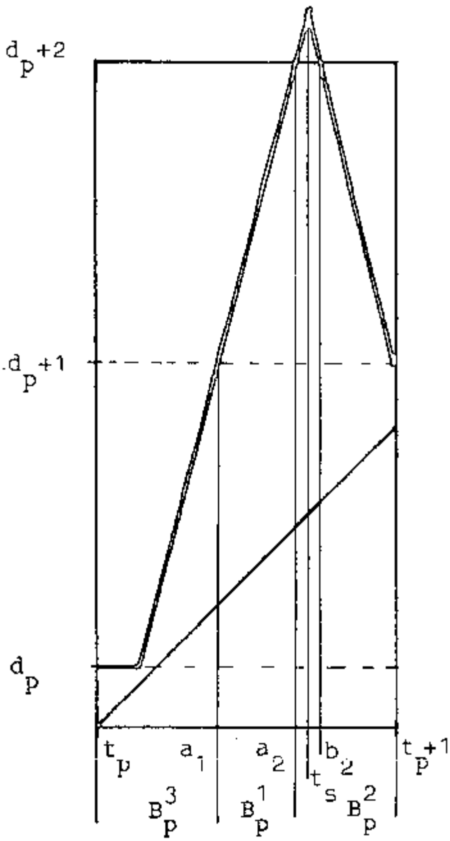

Figura 29.

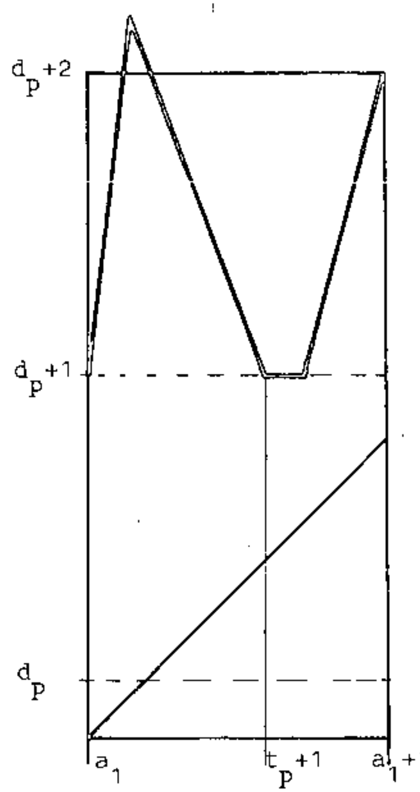

Figura 30.

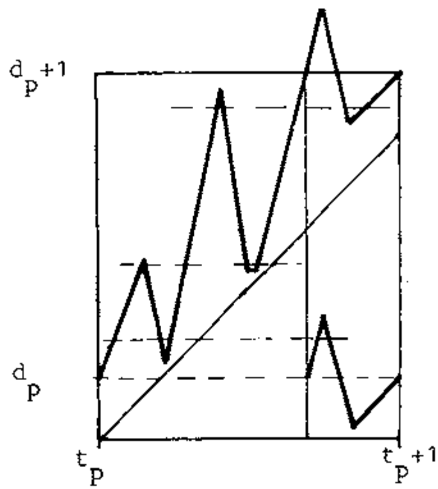

Figura 31.

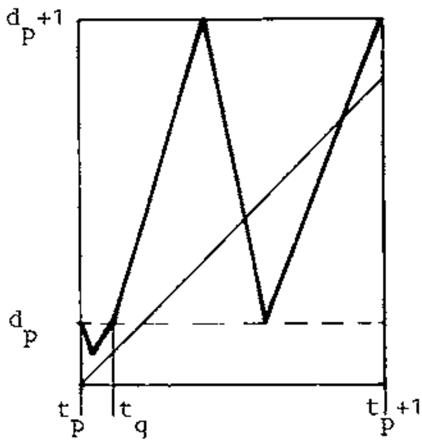

Figura 32.

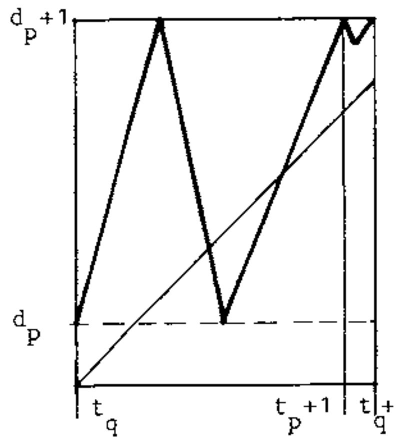

Figura 33.

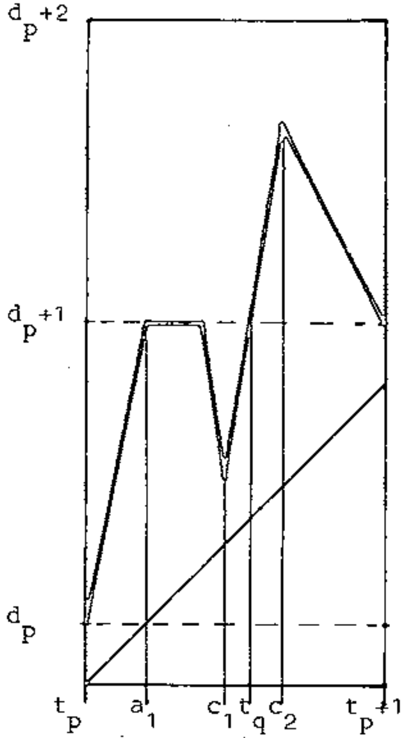

Figura 34.

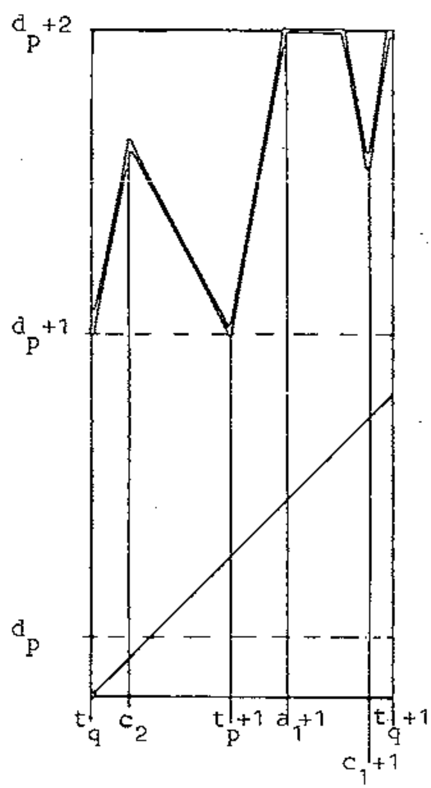

Figura 35.

REFERÈNCIES

(1): Arnold V.I. et Avez A.: Problemes ergodiques de la mécanique classique. Gauthier - Villars, Paris, 1967.

(2): Block, L.: 'Periodic orbits of continuous mappings of the circle', Trans. Amer. Math. Soc., 2-60 (1980), 553-562.

(3): Block, L., Guckenheimer, J., Misiurewicz, M., Young, L.S.: 'Periodic points and topological entropy of one dimensional maps', Proc. of the Conf. on the Global Theory of Dynamical Systems held at Northwestern University in June, 1979, Lectures Notes in Mathematics, 819 (1980), 18-34.

(4): Brown, R.: The Lefschetz fixed point theorem, Scott Foresman and Comp., Illinois, 1971.

(5): Li, T.Y. and Yorke, J.A.: 'Period three implies chaos', Amer.Math. Monthly, 82 (1975), 985-992.

(6): Llibre, J.: 'Continuous maps of the circle with finitely many periodic points', preprint.

(7): Simó,C.: 'Aplicacions contínues de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$', Publicacions de la sessió de Mat. U.A.B., 12 (1979), 93-117.

(8): Spanier, E.H.: Algebraic Topology, Mc. Graw-Hill, 1966.

(9): Stefan, P.: 'A theorem of Sarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line', Comm. Math. Phys., 54 (1977), 237-248.

(10): Wall, C.T.C.: A geometric introduction to topology, Addison-Wesley, 1972.