Pub. Mat. UAB
Vol. 26 Nº 1 Març 1982

TEORIA DE PESOS Y FUNCIONES DE OSCILACION MEDIA ACOTADA

José García-Cuerva Abengoza

Universidad de Salamanca
Rebut el 18 de Setembre de 1981

ABSTRACT: This is a survey about certain aspects of the theory of weights, namely: the relation between A_p weights and functions of bounded mean oscillation, and also the central role played by the class A_1.

1.- La condición de Helson-Szego y las condiciones de Muckenhoupt

La transformada de Hilbert Hf de una función f en la recta satisface la desigualdad de M. Riesz ([15])

$$(1) \qquad \int_{\mathbb{R}} |Hf(x)|^p dx \leq M_p \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \quad \text{si} \quad 1 < p < \infty .$$

Análogamente la función conjuǵada Hf de una función f en el círculo T cumple:

$$(1) \qquad \int_{T} |Hf(x)|^p dx \leq M_p \int_{T} |f(x)|^p dx \quad \text{si} \quad 1 < p < \infty .$$

Es natural preguntar para que medidas, además de la de Lebesgue, son ciertas las desigualdades (1) ó (1'). Hardy y Littlewood demostraron en 1936 (ver [8]) que (1') subsiste si se reemplaza la medida de Lebesgue dx por la medida $d\mu = |x|^{\alpha} dx$ con $-1 < \alpha < p-1$. Stein, en 1957, extendió el resultado a $\mathbb{R}^n$ $n \geq 1$ y un operador integral singular de Calderon-Zygmund en lugar de H (ver [16]). En 1960, Helso y Szegö obtuvieron en [9] el siguiente resultado notable: (1) y (1') se cumplen para $p = 2$ con $d\mu$ en lugar de dx si y sólo si $d\mu = \omega(x)dx$

(2) $$\omega(x) = e^{u(x) + (Hv)(x)} \quad , \|u\|_\infty < \infty \wedge \|v\|_\infty < \frac{\Pi}{2}$$

A pesar de su hermosura, el teorema de Helson-Szegö tiene algunos aspectos inquietantes. En primer lugar, aparece demasiado vinculado a las condiciones $n = 1$ y $p = 2$. En efecto, Helson y Szegö presentan el teorema como un resultado en teoría de la predicción y en la demostración original utilizan la aplicación conforme, el espacio de Hilbert, funciones exteriores, teorema de Beurling etc. Por otro lado la condición (2) es muy difícil de comprobar en la práctica. ¿Cómo puede saberse si $|x|^\alpha$ cumple la condición (2)?

Durante los años 60 se trató de extender el teorema de Helson-Szego a $p \neq 2$, sin conseguir nada interesante. El avance fundamental llegó en 1972, en el trabajo [14] de Muckenhoupt. En él se caracterizan los pesos $\omega(x)$ para los que el operador maximal de Hardy-Littlewood M es acotado en $L^p(\omega)$, $1 < p < \infty$. Estos son los pesos de la clase A_p definida de la siguiente forma: ω está en A_p sí y sólo si existe una constante C tal que para todo intervalo acotado $I \subset \mathbb{R}$ (o en T).

(3) $$\left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx\right)^{p-1} \leq C$$

Poco después Hunt, Muckenhoupt y Wheeden demostraron en [10] que para que H sea acotado en $L^p(\omega)$ es necesario y suficiente que $\omega \in A_p$. La clase A_p puede definirse en $\mathbb{R}^n$ sin más que sustituir intervalo por cubo en (3). Coifman y Fefferman demostraron en [3] que el teorema de Muckenhoupt se extiende a $\mathbb{R}^n$ y también que si $\omega \in A_p$ y K es un operador integral singular de Calderon-Zygmund, entonces K es acotado en $L^p(\omega)$. Las demostraciones de estos teoremas son exclusivamente de variable real y conducen a condiciones más fáciles de verificar en la práctica que (2). Para $p = 2$ se obtiene la condición A_2:

$$(4) \qquad \left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega(x)^{-1}dx\right) \leq C$$

Combinando los teoremas de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden y Helson-Szegö se obtiene que las condiciones (2) y (4) son equivalentes. Este es un hecho bien curioso y reclama una análisis más profundo.

Es fácil ver que la condición de Helson-Szegö implica la condición A_2. Todo lo que hay que hacer es demostrar que si $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$, entonces $\exp(Hv) \in A_2$.

Nos situamos en el círculo T. Sea I un intervalo de centro $e^{i\theta_o}$ y longitud $|I|$. Sea $z = (1-|I|/2\pi)e^{i\theta_o}$. Entonces (con P_z = núcleo de Poisson)

$$\frac{1}{|I|}\int_I e^{(Hv)(x)}dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{Hv}P_z \leq \frac{1}{\cos\|v\|_\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-}^{\pi} e^{Hv-iv}P_z dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos\|v\|_\infty} e^{(Hv)(z)}\cos v(z) \leq \frac{1}{\cos\|v\|_\infty} e^{(Hv)(z)}$$

Análogamente $\frac{1}{|I|}\int_I e^{-(Hv)(x)}dx \leq \frac{1}{\cos\|v\|_\infty} e^{-(Hv)(z)}$

de modo que se cumple (4) con $C = \frac{1}{(\cos\|v\|_\infty)^2}$

Tenemos así una demostración directa de que (2) $\Rightarrow$ (4). Sin embargo, que yo sepa, todavía no se ha logrado demostrar directamente que (4) $\Rightarrow$ (2). Sería muy interesante poder hacerlo (ver [1]).

Como vemos el problema está en estudiar de manera fina el logaritmo de un peso A_2. Veamos qué podemos decir acerca de él. En general tenemos la siguiente forma de reescribir la condición A_2.

<u>PROPOSICION 1</u> Sea $\psi: \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ medible. Entonces $e^{\psi} \in A_2$ sí y sólo si

$$5) \quad \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q e^{|\psi(x) - m_Q(\psi)|} dx < \infty$$

donde $m_Q(\psi) = \frac{1}{|Q|} \int_Q \psi(x) dx$.

<u>Demostración</u>.- Supongamos que se cumple (5). Se sobreentiende que ψ es localmente integrable, de modo que $m_Q(\psi)$ tiene sentido.

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{\psi(x)} dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{-\psi(x)} dx \right) = (\text{multiplicando por } e^{-m_Q(\psi)} . e^{m_Q(\psi)}) =$$

$$= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{\psi(x) - m_Q(\psi)} dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{m_Q(\psi) - \psi(x)} dx \right) \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{|\psi(x) - m_Q(\psi)|} dx \right)^2 =$$

$= C^2$ si C es el supremo que figura en (5). Así $e^{\psi} \in A_2$.

Recíprocamente sea $e^{\psi} \in A_2$ con constante C. Como $\psi^+ \leq e^{\psi}$, y $\psi^- \leq e^{-\psi}$, se sigue que ψ^+ y ψ^- son localmente integrables y así ψ lo es también

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{|\psi(x)-m_Q(\psi)|} dx = \frac{1}{|Q|} \int_{\{x \in Q:\psi(x) > m_Q(\psi)\}} e^{\psi(x)-m_Q(\psi)} dx +$$

$$+ \frac{1}{|Q|} \int_{\{x \in Q:\psi(x) \leq m_Q(\psi)\}} e^{m_Q(\psi)-\psi(x)} dx \leq e^{-m_Q(\psi)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{\psi(x)} dx \right) +$$

$$+ e^{m_Q(\psi)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{-\psi(x)} dx \right) \leq 2C \text{ pues } e^{m_Q(\psi)} = \exp \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \psi(x) dx \right) \leq$$

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{\psi(x)} dx, \text{ y, } e^{-m_Q(\psi)} = \exp \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \{-\psi(x)\} dx \right) \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q e^{-\psi(x)} dx$$

por la desigualdad de Jensen.

2.- El espacio B.M.O. y la versión n-dimensional de Helson-Szegö

Esta caracterización de A_2 nos lleva al espacio B.M.O. Sea ψ una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Se dice que ψ tiene oscilación media acotada si y sólo si

$$(6) \qquad \|\psi\|_* \equiv \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |\psi(x) - m_Q(\psi)|dx < \infty$$

Si en el espacio de las funciones de oscilación media acotada se identifican dos funciones cuando difieren en una constante y se utiliza $\| \quad \|_*$ como norma, se obtiene el espacio de Banach B.M.O.. En el círculo se define B.M.O. como el espacio de las funciones de oscilación media acotada con la norma

$$(7) \qquad \left|\int_T \psi(x)dx\right| + \|\psi\|_*$$

Se sigue de la proposición 1 que

$$(8) \qquad \omega \in A_2 \Rightarrow \log \omega \in B.M.O.$$

De hecho se tiene la

PROPOSICION 2 Si $\omega \in A_p$ para algún $1 < p < \infty$ entonces $\log \omega \in$ B.M.O.

Demostración.- En primer lugar $q > p \Rightarrow A_p \subset A_q$ pues

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1} = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{p-1}(p-1)} \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1}$$

por la desigualdad de Jensen.

Así, si $\omega \in A_p$ y $p \leq 2$, será $\omega \in A_2$ y, en consecuencia, $\log \omega \in$ B.M.O.

Por otro lado observamos que $\omega \in A_p \Leftrightarrow \omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$, $p' = \frac{p}{p-1}$. En efecto, basta darse cuenta de que $\frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p'-1} = 1$. Entonces si $\omega \in A_p$ con $p > 2$, será $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$, y, $p' < 2$. Así $\log(\omega^{-\frac{1}{p-1}}) = -\frac{1}{p-1} \log \omega \in$ B.M.O. de donde $\log \omega \in$ B.M.O.

El espacio B.M.O. ocupa un lugar importante en el Análisis gracias, sobre todo, a los resultados siguientes

<u>TEOREMA 1</u> (John-Nirenberg [11]) Existen $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, que dependen sólo de la dimensión n, tales que para toda $\psi \in$ B.M.O., $\forall Q$ y $\forall \zeta > 0$

$$(9) \qquad \frac{1}{|Q|} |\{x \quad Q: |\psi(x) - m_Q(\psi)| > \zeta\}| \leq C_1 \exp\{-\frac{C_2}{\|\psi\|_*} \cdot \zeta\}$$

<u>TEOREMA 2</u> (Fefferman-Stein [6]) B.M.O. es el dual del espacio de Hardy H^1. Esto equivale a decir que la norma

$$(10) \quad \|\psi\|' = \inf \{\sum_{j=0}^{n} \|\psi_j\|_\infty : \psi = \psi_0 + \sum_{j=1}^{n} R_j \psi_j, \psi_j \in L^\infty\}$$

(donde las R_j son las transformadas de Riesz), es equivalente a $\|\psi\|_*$.

Combinando la proposición 2 con el teorema de Fefferman-Stein vemos que si $\omega \in A_2$, entonces $\log \omega = \omega_0 + \sum_{j=1}^{n} R_j \psi_j$ con $\psi_j \in L^\infty$. Para llegar a tener una extensión de la mitad del teorema de Helson-Szegö habría que determinar una constante B_1 dependiente de la dimensión de manera que pudiera tomarse $\sum_{j=1}^{n} \|\psi_j\|_\infty < B_1$. Esto ha sido hecho por Garnett y Jones en [7]. Mas adelante volveremos sobre este resultado.

La otra mitad del teorema de Helson-Szegö se extiende a $\mathbb{R}^n$ utilizando el teorema de John-Nirenberg. En efecto, si $\psi \in$ B.M.O., vamos a ver que $\exp(\varepsilon\psi) \in A_2$ para ε pequeño. Utilizamos la caracterización (5) de la clase A_2

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{\varepsilon|\psi(x) - m_Q(\psi)|} dx \leq \int_0^\infty \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} C_1\, e^{-\frac{C_2}{\|\psi\|_*}\zeta} d\zeta =$$

$$= C_1\varepsilon \int_0^\infty e^{-\left(\frac{C_2}{\|\psi\|_*} - \varepsilon\right)\zeta} d\zeta = \frac{C_1\varepsilon}{(C_2/\|\psi\|_*) - \varepsilon} < \infty, \quad \text{si } \varepsilon < \frac{C_2}{\|\psi\|_*}$$

En particular se sigue que si $\|\psi\|_* < C_2$, entonces $e^\psi \in A_2$. Utilizando el teorema de Fefferman-Stein, esto puede expresarse diciendo que existe B_2 tal que si $\psi = \psi_0 + \sum_{j=1}^n R_j\psi_j$ con $\psi_j \in L^\infty$ para todo $j = 0,1,\ldots,n$ y $\sum_{j=1}^n \|\psi_j\|_\infty < B_2$ entonces $e^\psi \in A_2$ (observamos que el tamaño de ψ_0 no importa, ya que e^{ψ_0} está acotada lejos de 0 y de ∞). Tenemos así la extensión de una parte del teorema de Helson-Szegö.

Podemos escribir:

PROPOSICION 3

(11) $\{\alpha \log \omega : \alpha \geq 0,\ \omega \in A_2\} =$ B.M.O.

Demostración.- Se sigue de la proposición 2 que $\alpha \log \omega \in$ B.M.O. $\forall \alpha \geq 0 \wedge \forall \omega \in A_2$. Recíprocamente, si $\psi \in$ B.M.O. y $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, sabemos que $e^{\varepsilon\psi} \in A_2$. Así poniendo $\omega = e^{\varepsilon\psi}$ resulta $\psi = \frac{1}{\varepsilon}\log\omega$

En general se tiene:

PROPOSICION 4 Si $1 < p < \infty$

$\{\alpha \log \omega : \alpha \geq 0,\ \omega \in A_p\} =$ B.M.O.

Demostración.- Si $p \geq 2$, la demostración es la misma que la anterior. Si $p < 2$, utilizamos la siguiente observación: sea $\omega \in A_q$, $1 < q < \infty$ y sea $0 < t < 1$; entonces $\omega^t \in A_{tq+1-t}$ ya que

$$C^t \geq \left(\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{-\frac{1}{q-1}}dx\right)^{q-1}\right)^t \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^t dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{-\frac{t}{t(q-1)}}dx\right)^{t(q-1)}, \text{ y } t(q-1) = tq+1-t-1.$$

Como $tq+1-t = p$ equivale a $t = \frac{p-1}{q-1}$ la observación que acabamos de demostrar puede reformularse diciendo que si $\omega \in A_q$ y $1 < p < q$, entonces $\omega^{\frac{p-1}{q-1}} \in A_p$. En particular si $\omega \in A_2$, $\omega^{p-1} \in A_p$.

Si $\psi \in$ B.M.O. será $e^{\varepsilon\psi} \in A_2$ para ε pequeño y $e^{(p-1)\varepsilon\psi} \in A_p$ $1 < p < 2$. Así poniendo $\omega = e^{(p-1)\varepsilon\psi} \in A_p$, es $\psi = \frac{1}{(p-1)\varepsilon}\log \omega$.

Como decíamos antes, Garnett y Jones demostraron en [7] que existe una constante $C(n)$ que depende sólo de la dimensión, tal que si $e^{\psi} \in A_2$, entonces $\psi = u + v$ con $u \in L^{\infty}$ y $\|v\|_* \leq C(n)$. Combinando este resultado con el que resulta de aplicar John-Nirenberg y Fefferman-Stein obtenemos:

TEOREMA 3 Existen constantes $B_1(n)$, $B_2(n)$ tales que si $\psi = \psi_o + \sum_{j=1}^{n} R_j\psi_j$ con $\psi_o \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \wedge \sum_{j=1}^{n}\|\psi_j\|_{\infty} < B_1(n)$ entonces $e^{\psi} \in A_2$ y recíprocamente si $e^{\psi} \in A_2$ entonces $\psi = \psi_o + \sum_{j=1}^{n} R_j\psi_j$ con $\psi_o \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \wedge \sum_{j=1}^{n}\|\psi_j\|_{\infty} < B_2(n)$. Un aspecto frustrante es que no se obtiene $B_1 = B_2$ y que para $n = 1$ no resulta $B_2 = \frac{\pi}{2}$.

Parece que el teorema 3 en la mejor extensión del teorema de Helson-Szegö a varias dimensiones.

He aquí una forma interesante del teorema de Garnett-Jones:

TEOREMA 4 Para $\psi \in$ B.M.O. llamamos $A(\psi) = \sup \{A > 0 : e^{A\psi} \in A_2\}$. Entonces

$$(13) \qquad \inf_{g \in L^\infty} \|\psi - g\|_* \sim \frac{1}{A(\psi)} .$$

Demostración.- Sea $0 < A < A(\psi)$. Entonces

$e^{A\psi} \in A_2$, de donde $A\psi = u + v$ con $u \in L^\infty \wedge \|v\|_* < C(n)$. Así $\inf_{g \in L^\infty} \|\psi - g\|_* \leq \frac{C(n)}{A}$

y, en definitiva, $\inf_{g \in L^\infty} \|\psi - g\|_* \leq \frac{C(n)}{A(\psi)}$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\psi = u + v$ con $u \in L^\infty \wedge \|v\|_* < \inf_{g \quad L^\infty} \|\psi - g\|_* + \varepsilon$

Se sigue que

$$\exp\left(\frac{C_2}{\inf_{g \in L^\infty} \|\psi - g\|_* + \varepsilon} \psi \right) \in A_2, \text{ de donde } \frac{C_2}{\inf_{g \in L^\infty} \|\psi - g\|_* + \varepsilon} \leq A(\psi)$$

Así $\inf_{g \in L^\infty} \|\psi - g\|_* \geq \frac{C_2}{A(\psi)}$.

3.- La clase A_1 de pesos y el cono B.L.O.

Vamos a considerar ahora una clase de pesos que, según veremos, es la fundamental: la clase A_1. Cuando $p \downarrow 1$, $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1}$ tiende a

$\sup_Q . \text{es.} (\omega^{-1}) = \frac{1}{\inf_Q . \text{es.} \omega}$ donde sup. es. e inf. es. designan al supremo esencial y al ínfimo esencial. A partir de ahora suprimiremos la palabra esencial para abreviar. Consideremos la condición A_1:

$$(14) \qquad m_Q(\omega) \leq C \inf_Q \omega, \text{ que equivale a}$$

(15) $(M\omega)(x) \leq C\omega(x)$ en c.t.x.

Muckenhoupt demostró que $\omega \in A_1$ si y sólo si M es de tipo débil (1,1) respecto a ω. Es claro que $\omega \in A_1 \Rightarrow \omega \in A_p\ \forall\ 1 < p < \infty$. Sin embargo

$\{\alpha \log \omega : \alpha \geq 0,\ \omega \in A_1\} \underset{\neq}{\subset}$ B.M.O.

Si $\omega \in A_1$, sabemos que $m_Q(\omega) \leq C \inf\limits_{C} \omega$.

Se sigue que $m_Q(\log \omega) \leq \log m_Q(\omega) \leq \log C + \log \inf\limits_{Q} \omega = \log C + \inf\limits_{Q} \log \omega$

y si $\alpha \geq 0$ $m_Q(\alpha \log \omega) \leq \alpha \log C + \inf\limits_{Q} \alpha \log \omega$.

Diremos que una función ψ real y localmente integrable tiene oscilación inferior acotada ($\psi \in$ B.L.O.) si y sólo si existe una constante C tal que para todo Q (16) $m_Q(\psi) - \inf\limits_{Q} \psi \leq C$.

Hemos visto que $\{\alpha \log \omega : \alpha \geq 0,\ \omega \in A_1\} \subset$ B.L.O.

Observemos que B.L.O. es estable respecto a la suma y el producto por números no negativos pero que si $\psi \in$ B.L.O., $-\psi \notin$ B.L.O. a menos que ψ sea acotada, ($m_q(\psi) - \inf\limits_{Q} \psi \leq C_1$, $m_Q(-\psi) - \inf\limits_{Q}(-\psi) \leq C_2 \Rightarrow m_Q(\psi) - C_1 \leq \inf\limits_{Q} \psi \leq$ $\leq \sup\limits_{Q} \psi \leq C_2 + m_Q(\psi) \Rightarrow \sup\limits_{Q} \psi - \inf\limits_{Q} \psi \leq C_2 + C_1 \Rightarrow \sup \psi - \inf \psi \leq C_2 + C_1$).

<u>PROPOSICION 5</u> B.L.O. $\subset$ B.M.O.

<u>Demostración</u>.- Si $\psi \in$ B.L.O. será $m_Q(\psi) - \inf\limits_{Q} \psi \leq C$. Entonces

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |m_Q(\psi) - \psi(x)|\,dx = \frac{1}{|Q|}\int_Q (m_Q(\psi) - \psi(x))^+\,dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q (m_Q(\psi) - \psi(x))^-\,dx =$$

$$= \frac{2}{|Q|}\int_Q (m_Q(\psi) - \psi(x))^+\,dx \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q (m_Q(\psi) - \inf_Q \psi) \leq 2C.$$

Desde luego basta observar que en B.L.O. hay funciones no acotadas (veremos luego que $\log \frac{1}{|x|} \in$ B.L.O.) para concluir que B.L.O. $\underset{\neq}{\subset}$ B.M.O.

B.L.O. es, sencillamente, un cono convexo de B.M.O. El nombre B.L.O. se debe a Coifman y Rochberg, que estudiaron las funciones de oscilación inferior acotada en [4]. De hecho se tiene

<u>PROPOSICION 6</u> $\{\alpha \log \omega \colon \alpha \geq 0,\ \omega \in A_1\} = $ B.L.O.

<u>Demostración</u>.- Sea $\psi \in$ B.L.O. $\subset$ B.M.O.

Para $\varepsilon > 0$ pequeño será

$$C \geq \frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varepsilon|\psi(x)-m_Q(\psi)|}dx \geq \frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varepsilon(\psi(x)-m_Q(\psi))}dx \Rightarrow m_Q(e^{\varepsilon\psi}) \leq Ce^{\varepsilon m_Q(\psi)}$$

$\leq C\, e^{\varepsilon(c+\inf_Q \psi)} \leq (\text{const}) \inf_Q (e^{\varepsilon\psi}) \Rightarrow e^{\varepsilon\psi} \in A_1$, en esta cadena de desigualdades hemos usado el hecho de que $m_Q(\psi) \leq C + \inf_Q \psi$.

Si se pone $\omega = e^{\varepsilon\psi} \in A_1$ será $\psi = \frac{1}{\varepsilon}\log \omega$.

Existe una relación estrecha entre pesos A_1 y funciones maximales. En primer lugar se tiene el siguiente resultado de Coifman, que completa un resultado previo de A. Córdoba C. Fefferman ([5]).

<u>PROPOSICION 7</u> Sea μ una medida de Borel positiva y regular en $\mathbb{R}^n$ tal que $(M\mu)(x) < \infty$ en c.t. $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $0 < \gamma < 1$. Entonces $(M\mu)^\gamma \in A_1$ con una constante que sólo depende de la dimensión.

<u>Demostración</u>.- Hay que ver que $\forall$ Q cubo

(16) $m_Q((M\mu)^\gamma) \leq C((M\mu)(x))^\gamma$ en c.t. $x \in Q$.

Sea $\tilde{Q}$ el cubo del mismo centro que Q y de lado tres veces mayor. Ponemos $\mu = \mu_1 + \mu_2$ con $\mu_1 = \chi_{\tilde{Q}}\, \mu$. Será $M\mu \leq M\mu_1 + M\mu_2$, de donde $(M\mu)^\gamma \leq (M\mu_1)^\gamma + (M\mu_2)^\gamma$, y, $m_Q((M\mu)^\gamma) \leq m_Q((M\mu_1)^\gamma) + m_Q((M\mu_2)^\gamma)$. El tipo débil (1,1) del operador

M, en la formulación de Kolmogorov conduce a

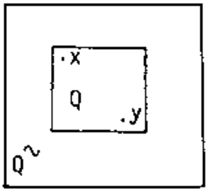
$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (M\mu_1)^\gamma dx\right)^{1/\gamma} \leq C \frac{1}{|Q|} \|\mu_1\| = C \frac{\mu(\widetilde{Q})}{|Q|} = C3^n \frac{\mu(\widetilde{Q})}{|Q|} \leq (\text{const})\ M\mu(x),$$

$\forall\ x \in Q.$

Así

(17) $m_Q((M\mu_1)^\gamma) \leq (\text{const})\ (M\mu(x))^\gamma\ ,\quad \forall\ x \in Q.$

Por otro lado si $x,y \in Q$ será



$$(M\mu_2)(x) = \sup\left\{ \frac{\mu_2(Q_1)}{|Q_1|} : Q_1 \ni x,\ l(Q_1) \geq l(Q)\right\}$$

pero para estos cubos $\widetilde{Q}_1 \ni y$, de donde

$$\frac{\mu_2(Q_1)}{|Q_1|} \leq 3^n \frac{\mu_2(\widetilde{Q}_1)}{|\widetilde{Q}_1|} \leq 3^n M\mu_2(y)$$

Así $M\mu_2(x) \sim M\mu_2(y)$. Por tanto

(18) $m_Q((M\mu_2)^\gamma) \leq (\text{const})(M\mu_2(x))^\gamma \leq (\text{const})(M\mu(x))^\gamma$

Sumando (17) y (18) obtenemos (16).

COROLARIO Para μ como en la proposición anterior, $\log(M\mu) \in$ B.L.O. y puede tomarse para ella en la condición B.L.O. una constante que depende sólo de la dimensión. Se sigue que $\|\log(M\mu)\|_* \leq C(n)$, constante geométrica. Como ejemplo $\log \frac{1}{|x|} \in$ B.L.O. y $\|\log \frac{1}{|x|}\|_* \leq C(n)$.

Demostración.- Sabemos que $(M\mu)^{1/2} \in A_1$ con constante A_1 que sólo depende de la dimensión, de modo que $\log((M\mu)^{1/2}) = 1/2\ \log(M\mu) \in$ B.L.O. con constante que sólo depende de la dimensión. Lo mismo vale, desde luego, para

$\log(M\mu)$. Como $\| \ \|_* \leq 2$ (constante B.L.O.), se tiene $\|\log(M\mu)_*\| \leq C(n)$.

En particular si tomamos $\mu = \delta$ será $M\mu \sim \dfrac{1}{|x|^n}$ (concretamente $M\delta(x) = \dfrac{1}{|x|_\infty^n}$).

así que $\log \dfrac{1}{|x|} \in$ B.L.O.

La relación entre pesos A_1 y funciones maximales es aún más estrecha. Vamos a ver que, esencialmente, todos los pesos A_1 son del tipo considerado en la proposición 7. Más aún, pueden tomarse funciones localmente integrables en lugar de medidas. En efecto, tenemos la

<u>PROPOSICION 8</u> Sea $\omega \in A_1$. Entonces existen: f localmente integrable ≥ 0, $0 < \gamma < 1$, y h, no negativa, acotada lejos de 0 y de ∞, tales que

(19) $\quad \omega(x) = h(x)\ ((Mf)(x))^\gamma$

<u>Demostración</u>.- La clave está en lo que es quizá el resultado más profundo de la teoría de pesos de Muckenhoupt:

Todo peso ω satisface una desigualdad de Hölder al revés, es decir, existen $\varepsilon > 0$ y $C > 0$ tales que para todo cubo Q

(20) $$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx.$$

Si aplicamos este resultado a $\omega \in A_1$ tendremos

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C\, m_Q(\omega) \leq (\text{const})\omega(x),\ x \in Q$$

de donde $M(\omega^{1+\varepsilon})^{1/1+\varepsilon} \leq (\text{const})\omega$ y así, si llamamos

$$h = \frac{\omega}{M(\omega^{1+\varepsilon})^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}, \quad \text{tendremos} \quad \frac{1}{(\text{const})} \leq h \leq 1 \quad \text{y}$$

$\omega = hM(\omega^{1+\varepsilon})^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$ que es (19) con $f = \omega^{1+\varepsilon}$ y $\gamma = \frac{1}{1+\varepsilon}$

COROLARIO $\psi \in$ B.L.O. si y sólo si existen f localmente integrables ≥ 0, α constante ≥ 0 y g función acotada, tales que

(21) $\psi = \alpha \log(Mf) + g$

Demostración.- Desde luego toda función de la forma expresada en (21) está en B.L.O. Recíprocamente, si $\psi \in$ B.L.O. será

$\psi = \beta \log \omega$ con $\beta \geq 0$ y $\omega \in A_1$. Pero $\omega(x) = h(x)\ (Mf(x))^{\gamma}$ con $h \geq 0$ y acotada lejos de 0 y de ∞, $0 < \gamma < 1$, y, f localmente integrable ≥ 0. Entonces

$$\psi = \beta\{\gamma' \log(Mf) + \log h\} = \alpha \log(Mf) + g$$

si ponemos $\beta\gamma = \alpha$, y, $g = \log h$.

4.- Representación de B.M.O. y factorización de pesos

Vamos a ser capaces de obtener una representación analítica de B.M.O. del mismo tipo que la obtenida para B.L.O. Esta representación va a ser obtenida a partir de (21) mirando más finamente a la relación entre B.M.O. y B.L.O. El instrumento fundamental para este análisis va a ser el siguiente resultado de L. Carleson (ver [2]).

TEOREMA 5 Sea ψ una función de Lipschitz no negativa con soporte en la bola unidad de $\mathbb{R}^n$ y con $\int \psi = 1$. Existen constantes C_1 y C_2 tales que si $\varepsilon(y)$ es una función medible y b_1 y b_2 son funciones acotadas, entonces

(22) $$f(x) = b_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon(y)^n} \psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon(y)}\right) b_2(y)dy$$

está en B.M.O. y $\|f\|_* \le C_1(\|b_1\|_\infty + \|b_2\|_\infty)$. Recíprocamente, si f está en B.M.O., entonces f puede escribirse en la forma (22) con $\|b_1\|_\infty + \|b_2\|_\infty \le$ $\le C_2\|f\|_*$. Con la ayuda de este teorema obtenemos el siguiente resultado debido a Coifman y Rochberg ([4]).

<u>TEOREMA 6</u> Si $f \in$ B.M.O., existen g, $h \in$ B.L.O. tales que $f = g-h$.

<u>Demostración</u>.- Utilizando (22) y escribiendo b_2 como diferencia entre sus partes positivas y negativa, todo se reduce a ver que, con ε y ψ como arriba y $0 \le b(x) \le k$, la función

$$(23) \qquad g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon(y)^n} \psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon(y)} \right) b(y)dy$$

está en B.L.O. Sea Q un cubo. Escribimos $b = b_1 + b_2$ con $b_1 = b.\ \chi_{\tilde{Q}}$. Llamando g_i $i = 1,2$ a la función obtenida en (23) poniendo b_i en lugar de b, tendremos $g = g_1 + g_2$

$$m_Q(g_1) = \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon(y)^n} \psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon(y)} \right) b_1(y)dy \right) dx \le$$

$$\le \frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon(y)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon(y)} \right) dx\ b_1(y)dy = \frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} b_1(y)dy \le k \frac{|\tilde{Q}|}{|Q|} = 3^n k$$

Sean $x, x' \in Q$. Entonces

$$|g_2(x) - g_2(x')| = \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus \tilde{Q}} \frac{1}{\varepsilon(y)^n} \left(\psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon(y)} \right) - \psi\left(\frac{x'-y}{\varepsilon(y)} \right) \right) b_2(y)dy \right.$$

Para $y \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{Q}$, $|x-y| \sim |x'-y|$, de forma que las condiciones $|x-y| < \varepsilon(y)$, y, $|x'-y| < \varepsilon(y)$ son comparables. Se sigue que el integrado es 0 a menos que sea $\varepsilon(y) > \alpha|x-y|$ para alguna constante geométrica α. Si L es la constante de Lipschitz para ψ y d es el diametro de Q se tendrá

$$|g_2(x) - g_2(x')| \leq L \int\limits_{(\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{Q}) \cap \{\varepsilon(y) > \alpha|x-y|\}} \frac{1}{\varepsilon(y)^n} \frac{|x-x'|}{\varepsilon(y)} b_2(y)dy \leq$$

$$\leq L\alpha^{-n-1}kd \int\limits_{|x-y|>cd} \frac{dy}{|x-y|^{n+1}} \leq (\text{const})k.$$

donde (const) depende sólo de ψ y de la dimensión. Combinando las dos estimaciones obtenemos $m_Q(g) - \inf_Q g \leq m_Q(g_1) + m_Q(g_2) - \inf_Q g_2 \leq (\text{const})\, k +$ $+ \frac{1}{|Q|} \int_Q (g_2 - \inf_Q g_2)dx \leq (\text{const})k.$

<u>COROLARIO 1</u> Existe una constante C que depende sólo de la dimensión tal que si α y β son constantes ≥ 0, g y h son funciones localmente integrables ≥ 0 y b es una función acotada, entonces

(24) $f(x) = \alpha \log Mg(x) - \beta \log Mh(x) + b(x)$ está en B.M.O. con

$$\|f\|_* \leq C(\alpha + \beta + \|b\|_\infty)$$

Reciprocamente cualquier $f \in$ B.M.O. puede escribirse en la forma (24) con

$$\alpha + \beta + \|b\|_\infty \leq C\,\|f\|_*$$

Es esta una curiosa caracterización de B.M.O., consecuencia de todo lo que antecede.

En cuanto a la estructura de los pesos tenemos este otro

<u>COROLARIO 2</u> Si $\omega \in A_p$ con $1 < p < \infty$, existen números α, $\beta \geq 0$ y pesos ω_1, $\omega_2 \in A_1$ tales que

(25) $\omega(x) = (\omega_1(x))^{\alpha}(\omega_2(x))^{-\beta}$

Demostración.- $\omega \in A_p \Rightarrow \log \omega \in$ B.M.O. $\Rightarrow \log \omega = g-h$ con $g,h \in$ B.L.O. Pero entonces $g = \alpha \log \omega_1$ y $h = \beta \log \omega_2$ con $\alpha,\beta \geq 0$ y $\omega_1, \omega_2 \in A_1$. Así $\omega = e^{g-h} = \omega_1^{\alpha} \cdot \omega_2^{-\beta}$.

Sería interesante encontrar una demostración elemental del teorema 6, que no se base en el resultado profundo de Carleson. Respecto al corolario 2, Coifman y Rochberg apuntan en su trabajo [4] el interés que tiene precisar α y β. Muckenhoupt conjeturó que pueden tomarse $\alpha = 1$ y $\beta = p-1$. Que para $\omega_1, \omega_2 \in A_1$

$\omega = \omega_1 \cdot \omega_2^{1-p} \in A_p$, es elemental:

$$m_Q(\omega)(m_Q(\omega^{-\frac{1}{p-1}}))^{p-1} = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega_1(x)(\omega_2(x))^{1-p}dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\omega_1(x))^{\frac{1}{p-1}}\omega_2(x)dx\right)^{p-1}$$

$$\leq C_2 m_Q(\omega_2))^{1-p} m_Q(\omega_1)(C_1 m_Q(\omega_1))^{-1} m_Q(\omega_2)^{p-1} = C_2^{1-p}\, C_1^{-1}$$

El recíproco es un resultado profundo y difícil obtenido finalmente por P. Jones en [12] (ver también [13]).

TEOREMA 7 $\omega \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ sí y sólo si

(26) $\omega = \omega_1 \cdot \omega_2^{1-p}$ con $\omega_1, \omega_2 \in A_1$

La demostración se basa en la descomposición de Claredon-Zygmund y tiene el mismo aspecto que la del teorema de Garnett-Jones. No puede sorprendernos que a partir del teorema 7 resulte fácil ver el teorema de Garnett-Jones.

Veámoslo: Sea $\psi \in$ B.M.O. y $0 < A < A(\psi)$. Entonces

$e^{A\psi} \in A_2 \Rightarrow e^{A\psi} = \omega_1 . \omega_2^{-1}$ con $\omega_1, \omega_2 \in A_1$. Puedo escribir $\omega_1 = h_1 (Mf_1)^{\gamma}$,

$\omega_2 = h_2 (Mf_2)^{\gamma}$ con h_1, h_2 acotadas lejos de 0 e ∞, f_1, f_2 localmente integrables no negativas y $0 < \gamma < 1$ próximos a 1. Así

$A\psi = \gamma \log(Mf_1) - \gamma \log(Mf_2) + \log h_1 - \log h_2$ de donde $\inf_{g \in L^\infty} \|\psi - g\|_* \leq \frac{(\text{const})}{A}$.

REFERENCIAS

1.- BAERNSTEIN,A. "Univalence and bounded mean oscilation", Mich. Math.Jnal. 23, (1976) 217-223.

2.- CARLESON,L. "Two remarkes on H^1 and B.M.O.", Advances in Math. 22,(1976) 269-277.

3.- COIFMAN,R. y FEFFERMAN,C. "Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals", Studia Math.51, (1974), 241-250.

4.- COIFMAN,R. y ROCHBERG,R. "Another characterization of B.M.O." Proceeding of the Amer. Math. Soc., 79, (1980) 249-254.

5.- CORDOBA,A. y FEFFERMAN,C. "Weighted norm inequalities for singular integrals", Studia Math. 57, (1976) 97-101.

6.- FEFFERMAN,C. y STEIN,E.M. "H^p spaces of several variables", Acta Math., 129, (1972) 137-193.

7.- GARNETT,J. y JONES,P.W. "The distance in B.M.O. to L ", Annals of Math. 108, (1978) 373-393.

8.- HARDY,G. y LITTLEWOOD,J. "Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series", Duke Math. J. Vol.2 (1936), 354-382.

9.- HELSON,H. y SZEGO,G. "A problem in prediction theory", Ann. Math. Pura. App. 51, (1960) 107-138.

10.- HUNT,R. MUCKENHOUPT,B. y WHEEDEN,R. "Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform", Trans. Amer. Math. Soc. 176, (1973) 227-

11.- JOHN,F. y NIRENBERG,L. "On functions of bounded mean oscilation", Comm. Pure. Appl. Math. 14, (1961) 415-426.

12.- JONES,P.W. "Structure of A_p weights", Asociación Mat. Española, 1,(1982) 177-191.

13.- JONES,P.W. "Factorization of A_p weights", Annals of Math., 11, (1980) 511-530.

14.- MUCKENHOUPT,B. "Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function" Trans. Amer. Math. Soc., 165, (1972) 207-226

15.- RIESZ,M. "Sur les fonctions conjugees", Math. Zeit., 27, (1927) 218-244.

16.- STEIN,E.M. "Note on singular integrals". Proceedings of the Amer. Math. Soc., Vol.8 (1957), 250-254.