Pub. Mat. UAB
Nº 26 Nº1 Març 1982

Contribución al estudio de los espacios electorales

Francesc Carreras Escobar

Rebut el 3 de juliol del 1981

Abstract.- The aim of this paper, inspired in the line followed by Shapley and Owen in Game Theory, is the study of certain structures associated with the collective choice processes, from a strictly formal point of view.

A general model of voting (decision set) is used to motivate the postulates of electoral space (Shapley's proper simple game), based upon the winner coalitions. In the first chapter the necessary definitions are given, and then the following points are discussed:

1) role of Shapley's power, as a fundamental invariant of the so-called complete spaces, whose group of automorphisms comes to be formed by all the permutations preserving the power;

2) classification of the complete simple spaces -where all the minimal winner coalitions have the same number of elements- and determination of their numerical invariants by means of the associated lattice, giving the theorems of existence and unicity in terms of those invariants;

3) concretizing electoral spaces by means of decision sets, deformation of decision sets -for example, standardization- and discussion of simple spaces by using their classification.

ÍNDICE

INTRODUCCION

El objeto de la presente Memoria [1] es el estudio de ciertas estructuras inherentes a los procesos de elección colectiva, en los cuales un conjunto de personas toma decisiones mediante una votación sujeta a reglas precisas.

Estos procesos han sido tratados por la Teoría de Juegos -con el nombre de juegos de votación- por lo que puede ser pertinente una breve descripción de las líneas de dicha teoría que han inspirado este trabajo.

El primer intento serio de ofrecer un método y un lenguaje matemáticos realmente adecuados a los problemas de las ciencias económicas y sociales es la obra de Von Neumann y Morgenstern [49], publicada en 1944 desarrollando unas ideas previas del primero de estos autores [48]. Orientado principalmente por sus interpretaciones económicas, dicho trabajo constituye el punto de partida de la Teoría de Juegos, y referencia casi obligada en este campo.

Aunque la relevancia y perfección del tratamiento dado por Von Neumann y Morgenstern a los juegos de dos jugadores inspiraron la investigación inmediatamente posterior, pronto pasó a un primer plano la teoría de los n-juegos, o juegos de n personas con n arbitrario. En primer lugar porque Von Neumann y Morgenstern se limitaron en esta cuestión a abrir el camino; y además, la variedad de valores de n en

---

(1) Tesis doctoral del autor.

las estructuras económicas y sociales reales [2] justifica por sí sola el interés en obtener resultados generales.

Von Neumann y Morgenstern propusieron las definiciones básicas para los n-juegos: forma extensiva y forma normalizada, función característica, equivalencia estratégica, simetría -mediante el grupo de permutaciones de los jugadores- y los conceptos de imputación, dominación y solución. Su tratamiento de los n-juegos consiste en analizar dos familias particulares: a) juegos descomponibles, cuyas soluciones expresan a partir de las de sus juegos componentes; y b) juegos simples (propios y fuertes, según la nomenclatura posterior de Shapley), donde la sencillez de la función característica permite sustituirla por una familia de subconjuntos, llamados coaliciones vencedoras; aquí sólo se dan las soluciones de algunas subfamilias de juegos simples, por ejemplo los juegos homogéneos de mayoría ponderada, en particular los juegos de mayoría simple [3].

---

(2) A partir de 1960, la consideración de juegos formados por un gran número de "pequeños" individuos (consumidores, votantes) ha sugerido incluso su tratamiento como un infinito continuo de jugadores, en los juegos llamados no-atómicos (Shapley, Aumann [45]).

(3) En la introducción a Contributions to the Theory of Games I, publicado en el volumen 24 de los Annals of Mathematical Studies, 1950, primer compendio de trabajos posteriores a Von Neumann-Morgenstern, se proponían como problemas abiertos para n-juegos: a) existencia de solución para todo juego; b) estudio de los n-juegos restringiendo la formación de coaliciones; c) definición de un valor formal para cada n-juego; y d) propiedades asintóticas para $n \to \infty$.

Un supuesto básico en la obra de Von Neumann-Morgenstern es el carácter casi numérico de las utilidades, que describen los posibles resultados del juego para cada jugador. Dicho carácter se expresa por una correspondencia entre utilidades y números reales, deducida de dos postulados simples: posibilidad de ordenar las utilidades y de efectuar combinaciones probabilísticas de las mismas. El utilitarismo ha sido muy discutido en la literatura económica previa (v. g. Jevons [18], Pareto [35]) y posterior (Arrow [1], Sen [42], etc.). Aquí sólo destacaremos el papel central de esta hipótesis en la obra comentada. Por una parte, al haber una total libertad de transferencia de utilidades se permite la cooperación y el regateo mediante la oferta -y en su caso realización- de pagos laterales. Por otra, al proporcionar una ordenación total de las alternativas de cada jugador permite definir el valor de un 2-juego de suma cero (mediante el teorema del Minimax) y, posteriormente, la función característica de todo n-juego.

No existe en la obra de Von Neumann-Morgenstern ninguna referencia explícita a los juegos de votación -o juegos sociopolíticos, en contraposición a los de tipo económico-. Ello se debe al papel fundamental del concepto de utilidad, que no es natural en los juegos de votación. Por otro lado, la forma en que se estudian los n-juegos, por medio de una drástica simplificación que los convierte en 2-juegos para construir la función característica, tampoco es adecuada para los juegos de votación. Parece que estos juegos, por sus características, han de tener un tratamiento propio, independiente de los juegos económicos. No está claro que en los problemas sociopolíticos pueda pensarse fructíferamente en términos "monetarios".

Después de establecer Von Neumann y Morgenstern el valor de un 2-juego, es Shapley [43] el primero que define el valor de un n-juego, como una evaluación a priori, a partir de tres axiomas que permiten probar la existencia y unicidad del valor de todo juego definido por su función característica. Se trata de la esperanza asociada a una distribución de probabilidad, y constituye una alternativa al concepto de solución de Von Neumann-Morgenstern, que ni es única en general ni existe para cada juego (Lucas [20]). La crítica principal (Selten [41]), la dependencia de la función característica, es irrelevante precisamente para juegos simples.

Shapley [44] define un n-juego simple como un par (X,F) donde X es un conjunto con n elementos y F una colección no vacía de subconjuntos de X (coaliciones vencedoras) que no contiene al vacío y es filtro de orden, es decir,

$$A \in F, \quad A \subset B \quad \text{implican} \quad B \in F.$$

Un juego simple es propio si $A \in F$ implica $X-A \notin F$, y fuerte si se satisface el recíproco, o sea si $A \notin F$ implica $X-A \in F$. La diferencia de esta definición con la primitiva es que los juegos simples de Von Neumann y Morgenstern son simples, propios y fuertes según Shapley, por ser de suma constante.

Shapley [44] y Owen [30] estudiaron independientemente el comportamiento de los juegos simples a través de la composición, dando previamente las leyes generales de dicha operación, que se realiza introduciendo un juego cociente como conexión de los juegos componentes y es una generalización de la propuesta por Von Neumann-Morgenstern.

Shapley y Shubik [46] son quizás los primeros que presentan una efectiva aplicación de la teoría a los juegos de votación, puesto que adaptan la idea de valor de un juego a ciertos esquemas de votación e introducen el concepto de poder. Se describe el poder asociado a priori a cada votante o coalición, prescindiendo de todo lo que no sea las reglas de votación, obteniendo una distribución de probabilidad finita. Su esquema es el intento más serio de evaluar las posiciones relativas en un juego de votación. Más adelante, Luce y Rogow [22] incluyeron otros datos y lo aplicaron a problemas reales. Y Riker [39] sugirió una comprobación experimental de la validez de este índice de poder.

Existen dos líneas principales para estudiar los juegos de votación: intentar asimilarlos a los juegos económicos o elaborar una teoría propia. Interesa a los científicos políticos qué coaliciones han de formarse y cuál será el pago -en sentido amplio-. Así, Downs [11] supone que los partidos buscan el máximo posible de votos para alcanzar y conservar desahogadamente las primeras posiciones; en cambio, Riker [40] considera que el objetivo es formar coaliciones vencedoras minimales para repartir la victoria entre un mínimo de individuos.

Más recientemente, los trabajos de Owen se han dirigido en esta línea de los juegos de votación. En [31] Owen modifica el poder de Shapley para obtener un índice más flexible, que puede reflejar aspectos no incluídos en las reglas formales del juego. En [32] estudia la elección presidencial de los Estados Unidos, calculando aproximadamente el poder de Shapley de cada Estado por el método de las extensiones multilineales, ideado por el propio Owen, y compara el poder de Shapley con el índice de poder de Banzhaf-Coleman, único reconocido hasta ahora por un tribunal de justicia. Su desarrollo axiomático es el objeto de un reciente estudio [34]. Anteriormente, Owen enlaza en [33] con el trabajo de Shapley y el suyo propio ya citados, sobre composición de juegos, para dar otra modificación del poder de Shapley que depende de una previa distribución de probabilidades de formación de coaliciones; este nuevo poder es compatible con la composición de juegos, en contraste con el poder de Shapley original.

Para completar las referencias previas debe mencionarse la Teoría de la elección colectiva, que por su carácter esencialmente no numérico ha influído en el presente trabajo.

Uno de los aspectos centrales de la teoría es la discusión de las propiedades de las preferencias individuales y sociales definidas sobre un conjunto de alternativas, así como hasta qué punto y por qué mecanismos la preferencia de la sociedad debe reflejar las de sus miembros. El famoso teorema de imposibilidad de Arrow [1] afirma que, en determinadas condiciones -aparentemente suaves- cuyo detalle omitimos por brevedad, no existe ninguna regla general que exprese la preferencia social en función de las preferencias individuales. La dictadura, el método de decisión por mayoría, el criterio de Pareto, el código tradicional, todos incumplen alguna de las condiciones de Arrow. Condicionada por este resultado, la teoría ha tratado de debilitar las hipótesis o introducir restricciones que impidieran llegar a la inconsistencia. También ha contrastado los sistemas usuales para determinar a qué distancia se hallaban del teorema. Diversas variaciones (liberalismo, utilitarismo, etc.) han dado lugar a teoremas paralelos o más generales de imposibilidad (por ejemplo, condiciones sólo satisfechas por oligarquías -dictaduras de grupo-).

El método de decisión por mayoría es para Buchanan y Tullock [8] un ejemplo de lo que llaman "sustitutivos más débiles" de la regla de unanimidad, que consideran el límite ideal de las reglas de elección colectiva. Según ellos, estas reglas más débiles aparecen sólo por la dificultad de alcanzar la unanimidad -es decir, sólo por un problema de efectividad, práctico, no conceptual-.

Con los antecedentes expuestos, el presente trabajo seguirá la línea iniciada por Shapley (juegos simples y concepto de poder) y continuada por Owen, aunque por el lenguaje, el método y el objeto (los mecanismos de decisión conjunta) se asome hacia la Teoría de la elección colectiva.

Nos ocuparemos de las reglas del juego, sin prefijar alternativas; no habrá por tanto referencia numérica de las mismas (utilidades) ni preferencias para ser consideradas. Ello no significa que no sea posible, por ejemplo, hablar de cooperación. Nuestro estudio describe la posición relativa que las reglas dan a cada jugador o subconjunto frente a los demás; en consecuencia, la cooperación ha de ir dirigida a mejorar esta posición, y afectará también las posiciones ajenas.

Consideraremos un modelo general de votación (conjunto decisorio, de decisión única), en cuyo seno aparece el concepto de coalición vencedora. Este término adquiere un sentido absoluto: si una coalición es vencedora lo es en todas las votaciones posibles, independientemente de cuáles sean las alternativas propuestas y sea cual sea la manera de actuar de los elementos de su complementario.

La estructura fundamental de espacio electoral (4) se obtiene

---

(4) Hemos elegido este nombre por varios motivos: destacar su importancia frente a los conjuntos decisorios, recordar su motivación, señalar el tratamiento que se les da y sugerir analogías topológicas. El criterio se ha mantenido en la elección de otros términos.

al considerar la familia de las coaliciones vencedoras, cuyas propiedades básicas vienen a coincidir con los axiomas de juego simple y propio dados por Shapley:

1) Axioma de filtro de orden: si un subconjunto contiene una coalición vencedora, él lo es también (juegos simples); y

2) Axioma de conexión o de elección única: no hay dos coaliciones vencedoras disjuntas (condición de juego propio).

En el capítulo I nos limitamos a dar las definiciones oportunas y describir los tópicos usuales: homomorfismos, subespacios -en particular subespacios densos- y cocientes [5].

El capítulo II está dedicado a demostrar que la estructura de espacio electoral es el marco adecuado para el poder de Shapley. En primer lugar se define formalmente el poder, como un concepto derivado exclusivamente de la estructura. Se analiza su variación como función y se establece su invariancia frente a los isomorfismos para cerrar una primera parte. En la segunda sección, al considerar el grupo de automorfismos del espacio se llega a probar que el poder es el invariante fundamental de dicho grupo en los espacios que llamamos completos, o dicho de otro modo, que los automorfismos son exactamente las permutaciones que conservan el poder. Este resultado expresa la excelente relación entre el poder de Shapley y la estructura de espacio electoral, sirviendo de refuerzo teórico para la validez de este índice de poder. Además,

---

[5] Se ha procurado dar al tema un aspecto y un lenguaje lo más algebraicos posible. Además, en todo el trabajo ha estado presente cierta analogía con la topología de los espacios métricos, que ha sugerido en ocasiones el camino a seguir.

la restricción de completitud no es relevante, puesto que los espacios no completos ponen de manifiesto su patología en los capítulos finales.

Se aborda en el capítulo III el problema de la clasificación. Aparte de su interés intrínseco, viene motivada por la cuestión tratada en el capítulo siguiente, la realización de espacios electorales. La clasificación sirve de guía para alcanzar sucesivamente resultados parciales y cubrir todos los casos. El interés se centra en los espacios completos, porque los no completos no son realizables, y en primera aproximación se limita el estudio a los espacios simples (donde todas las coaliciones vencedoras minimales tienen el mismo cardinal).

Para los espacios más elementales -atómicos, simétricos, y pseudosimétricos, entre los que están las dictaduras y todos los espacios de mayoría, en particular los de unanimidad- es relativamente rápido establecer sus propiedades características, determinar sus invariantes numéricos y dar los teoremas de clasificación -o unicidad salvo isomorfismos- y de existencia, en términos de tales invariantes. Para los restantes espacios simples completos es necesario utilizar el retículo asociado, que se introduce previamente en este mismo capítulo y del que se dan varias versiones isomorfas. Se efectúa una última distinción según que la familia de las coaliciones vencedoras pase a ser un ideal dual del retículo o no. Los resultados para estos dos últimos casos llegan a ser completados; la diferencia con los tipos más elementales estriba en unas demostraciones más complicadas y una notación más compleja.

Finalmente, en el capítulo IV se pretende averiguar hasta qué punto los espacios electorales tienen "realización", o interpretación en los términos usuales de votación (conjuntos decisorios), y cómo estas reglas pueden deformarse sin cambiar nada sustancial de la estructura (conjuntos decisorios equivalentes). Después de ofrecer dos simplificaciones al problema de la realización, reduciendo el estudio a los espacios densos y buscando sólo realizaciones normalizadas, se emprende la realización de espacios simples.

Siguiendo el esquema del capítulo anterior en la clasificación, se comprueba que todos los espacios atómicos, simétricos y pseudosimétricos son realizables, y que todos los no completos son irrealizables. De los restantes espacios simples completos se resuelven los que tienen ideal dual en el retículo asociado, dando condiciones necesarias y suficientes en términos de sus invariantes. Su compleja elaboración tal vez sea indicativa de las dificultades por las que de momento queda sin resolver el último caso, cuando no hay ideal dual. La comparación de los dos últimos teoremas de clasificación del capítulo III puede dar idea de la magnitud aparente de dichas dificultades.

Puesto que esta introducción contiene las referencias adecuadas acerca de la temática de la Memoria, en el texto posterior tan sólo aparecerán algunas referencias de tipo técnico.

Desearía, finalmente, mostrar mi agradecimiento al Dr. Francesc Sales por sus valiosas orientaciones, así como al Dr. J. A. Martín Rioja cuyo interés, comentarios y paciencia han sido fundamentales para mí.

Agradezco asimismo al Dr. Enric Freixa y al Prof. Guillermo Owen la buena acogida que dispensaron a este trabajo.

I

ESPACIOS ELECTORALES

I.1.- DEFINICIONES.

Un espacio electoral es la estructura subyacente a la siguiente situación real: un conjunto de personas (físicas o jurídicas) organizado para tomar decisiones. Comenzaremos por la descripción de dicha situación.

Definición I.1.1.- Un conjunto decisorio es un conjunto finito X para el que se han definido: un subconjunto V_e, cuyos elementos serán llamados miembros con veto (explícito) y que eventualmente puede ser $\emptyset$; una aplicación $v : X \longrightarrow N$, llamada reparto de votos, donde N es el conjunto de los números naturales; y un número natural d, que es la condición numérica de aprobación.

La aplicación v se extiende al conjunto de las partes $P(X)$ definiendo $v(A) = \sum_{x \in A} v(x)$ para cada $A \subset X$. Esta extensión es una valoración no negativa, creciente (en general no es estrictamente creciente) y fuertemente aditiva, con $v(\emptyset) = 0$.

Sea $T = v(X)$ el número total de votos; la única restricción que se impone a los datos es: si V_e es vacío, entonces $d > T/2$. En la Proposición I.1.1 se dará la justificación adecuada.

Expondremos ahora el funcionamiento de un conjunto decisorio desde un punto de vista formal.

En cada ocasión estará determinado el conjunto de opciones o alternativas posibles que se presentan a la consideración de X; dicho conjunto se representará por $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$.

Una votación relativa a la cuestión representada por D es una aplicación $f : X \longrightarrow D \cup \{d_o\}$, donde d_o es un elemento extraño a D que se añade como imagen de los miembros que están ausentes, se abstienen, votan en blanco o dan un voto nulo: estos cuatro casos son identificables entre sí desde una perspectiva formal.

El resultado de la votación f es la aplicación

$$r : D \cup \{d_o\} \longrightarrow N$$

dada por $r(d_i) = v(f^{-1}(d_i))$ para $i = 0,1,2,\ldots,r$.

<u>Proposición</u> I.1.1.- Si existe algún i no nulo que verifique $r(d_i) \geqslant d$, $f^{-1}(d_i) \supset V_e$, entonces dicho i es único.

<u>demostración</u>. Si $i \neq j$ está claro que $f^{-1}(d_i) \cap f^{-1}(d_j) = \emptyset$. Por tanto, si V_e no es vacío a lo sumo un i verifica las condiciones. Si V_e es vacío, la existencia de dos subíndices distintos i,j daría lugar a las siguientes desigualdades

$$T < d + d \leq r(d_i) + r(d_j) = v(f^{-1}(d_i)) + v(f^{-1}(d_j)) =$$
$$= v(f^{-1}(d_i) \cup f^{-1}(d_j)) \leq v(X) = T.$$

Si existe, se llama decisión (única) resultante de la votación f, relativa a la cuestión representada por D, al elemento d_i cuyo subíndice verifique las condiciones de la Proposición I.1.1. Si no existe tal subíndice se da como resultado d_o, lo que se interpreta como que no se ha tomado ninguna de las decisiones propuestas por D.

Se llega, finalmente, al concepto de coalición vencedora por las siguientes consideraciones.

Sea $A \subset X$ un subconjunto cuyos miembros están interesados en que cierta d_i sea la decisión resultante de la votación f; para que en cualquier caso -sea como sea la forma en que voten los demás elementos de X- el subconjunto A consiga su propósito, debe verificar las condiciones siguientes: $A \supset V_e$, $v(A) \geq d$.

Se dice entonces que A es una coalición vencedora.

<u>Proposición</u> I.1.2.- La familia F de las coaliciones vencedoras verifica las siguientes propiedades:

a) si $A \in F$, $A \subset B$, entonces $B \in F$

b) si $A \in F$, entonces $A \cup B \in F$ para cada $B \subset X$

c) $A \cap B$ no es vacío para ningún par $A, B \in F$

d) si $A \in F$, entonces $X-A \notin F$

e) $X \in F$, $\emptyset \notin F$

<u>demostración</u>. a) inmediata. b) equivalente a la anterior. c) por la Prop. I.1.1. d) se deduce de la anterior y la implica junto con la primera. e) por ser F no vacía y por la cuarta.

Haciendo abstracción y vista la proposición anterior, tomamos como punto de partida de este trabajo la

<u>Definición</u> I.1.2.- Sea X un conjunto finito. Un filtro electoral en X es una familia no vacía $F \subset P(X)$ que verifique

(A.1) $A \in F$, $A \subset B$ implica $B \in F$

(axioma de filtro de orden)

(A.2) $\forall A, B \in F$ se verifica $A \cap B \neq \emptyset$

(axioma de conexión)

El par (X,F) recibirá el nombre de espacio electoral.

Proposición I.1.3.- Si (X,F) es un espacio electoral se verifican:

a) si $A \in F$, $A \cup B \in F$ para cada $B \subset X$ (A.3)

b) si $A \in F$, $X-A \notin F$ (A.4)

c) $X \in F$, $\emptyset \notin F$

Además, los pares (A.3,A.4), (A.1,A.4) y (A.2,A.3) son sistemas de axiomas equivalentes al dado de filtro electoral.

demostración. Ver Proposición I.1.2.

Los minimales de F tendrán un papel fundamental en lo sucesivo; en la próxima proposición se destacan sus propiedades características.

Proposición I.1.4.- La familia F_0 de los minimales de un filtro electoral F no es vacía y verifica

(A_0.1) si $A \subset B$, es $A = B$, para cada par $A,B \in F_0$

(A_0.2) $\forall A,B \in F$ se verifica $A \cap B \neq \emptyset$

Recíprocamente, dada una familia no vacía $F_0 \subset P(X)$ que satisfaga (A_0.1) y (A_0.2), existe un único filtro electoral F en X cuya familia de minimales sea F_0. Además, $F_0 \subset F'_0$ implica $F \subset F'$.

demostración. Por ser X finito, F_0 no es vacía. (A_0.1) resulta de que $F_0 \subset F$, y (A_0.2) de la condición de minimalidad.

Dada inicialmente F_0 verificando (A_0.1) y (A_0.2) se define

$$F = \left\{A \subset X \;/\; \exists B \in F_0 \text{ con } A \supset B\right\}$$

Es inmediato que F es un filtro electoral en X, y por ser X finito resulta ser F_0 la familia de los minimales de F. Si F_0 era la familia de minimales de un filtro F, por ser X finito F coincide con el filtro construído por la fórmula anterior. Todo ello prueba que la correspondencia $F \longmapsto F_0$ es biyectiva, y es fácil ver que su inversa es creciente.

Definición I.1.3.- Se dice que F_0 es el germen o base del filtro F, y que éste está generado por F_0.

Definiciones I.1.4.- En un espacio electoral (X,F), llamaremos a cada $A \in F$ una coalición vencedora. Si $X-A \in F$, diremos que A es una coalición perdedora. Finalmente, si $A, X-A \notin F$, diremos que A es una coalición de bloqueo.

Definiciones I.1.5.- Un $x \in X$ es un elemento nulo (o sin influencia) si no pertenece a ninguna coalición vencedora minimal. $\{x\}$ es entonces una coalición perdedora, pero el recíproco es falso.

Un $x \in X$ es un dictador si $\{x\}$ es una coalición vencedora. Es sabido que en tal caso x es el único dictador, F_0 se reduce a $\{x\}$ y F a los subconjuntos que contienen x, y que los demás elementos son nulos. Recíprocamente, si todos los elementos salvo x son nulos, x es dictador.

Un $x \in X$ es un elemento con veto si $\{x\}$ es una coalición de bloqueo. Designando por V la intersección de todas las coaliciones vencedoras, que coincide con la de todas las minimales, se observa que $V = \{x\}$ si hay un dictador x, mientras que en otro caso V coincide con el conjunto de elementos con veto.

Mantendremos esta notación, así como la de N para el subconjunto de elementos nulos, que es la intersección de los complementarios de las coaliciones vencedoras minimales.

I.2.- HOMOMORFISMOS, SUBESPACIOS, COCIENTES.

Daremos aquí tres alternativas para una definición de homomorfismo entre espacios electorales. Ello da lugar a tres categorías, aunque los isomorfismos son los mismos en las tres. Discutiremos el concepto de subespacio, señalando en especial los subespacios densos. Por último, se presentará la formación del espacio cociente por una relación de equivalencia.

<u>Definiciones</u> I.2.1.- Sean (X,F), (X',F') espacios electorales, $f : X \longrightarrow X'$ una aplicación.

a) f es un morfismo si $A \in F$ implica $f(A) \in F'$, lo que con un abuso de notación abreviamos por $f(F) \subset F'$.

b) f es un antimorfismo si $A' \in F'$ implica $f^{-1}(A') \in F$, que con el mismo abuso escribiremos $f^{-1}(F') \subset F$.

c) f es bimorfismo si es a la vez morfismo y antimorfismo.

En los tres casos pondremos $f : (X,F) \longrightarrow (X',F')$

La identidad es un bimorfismo, y la composición de morfismos (resp. antimorfismos) es un morfismo (resp. antimorfismo). Quedan definidas, por tanto, tres categorías, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{-1}$, $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^{-1}$, cuyos objetos son los espacios electorales y cuyos homomorfismos son, respectivamente, los morfismos, antimorfismos y bimorfismos. Por las definiciones,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,-) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{-1}}(-,-) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{E}^{-1}}(-,-)$$

<u>Proposición</u> I.2.1.- En las tres categorías los isomorfismos son las aplicaciones biyectivas f tales que f, f^{-1} son morfismos. Además, si f es biyectiva, la condición necesaria y suficiente para que sea isomorfismo es que $f(F_o) = F'_o$.

demostración. Es una comprobación standard.

Dado un espacio electoral (X,F) y un subconjunto $Y \subset X$, escribiremos $F_Y = F \cap P(Y)$, y también $F \cap Y = \{A \cap Y \ / \ A \in F\}$.

Si $Y \notin F$, resulta $F_Y = \emptyset$. En cambio, si $Y \in F$, F_Y satisface los axiomas de filtro en Y, con base $(F_Y)_o = F_o \cap P(Y)$.

Definición I.2.2.- Un subespacio electoral de (X,F) es un par (Y,F_Y) donde $Y \in F$.

La definición formaliza la idea intuitiva de subconjunto con suficiente capacidad decisoria.

La inclusión canónica $i : Y \longrightarrow X$ es un monomorfismo en $\mathcal{E}$.

Definición I.2.3.- Un subespacio (Y,F_Y) es denso si $F_o \subset P(Y)$. Resulta entonces $(F_Y)_o = F_o$.

Proposición I.2.2.- Si $Y \in F$, son equivalentes:

i) (Y,F_Y) es denso

ii) dada $f : X \longrightarrow X'$, siendo (X',F') un espacio electoral, f es morfismo si y sólo si la restricción foi de f a Y lo es

iii) $A \cap Y \in F$ para cada $A \in F$

iv) la inclusión i es bimorfismo

v) $X - N \subset Y$

vi) $F_Y = F \cap Y$

demostración. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Dada $f : X \longrightarrow X'$, si Y es denso y foi morfismo se tiene $f(F_o) = (foi)(F_o) \subset F'$, luego f es morfismo.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Sean $X' = X$, F' el filtro generado en X por $(F_Y)_o$, $f = id : X \longrightarrow X'$. Por ser foi morfismo, f también lo es, por la hipótesis. Por tanto, para cada $A \in F$ resulta $A = f(A) \in F'$, así que

$A \supset B \in (F_Y)_o$, de donde $A \cap Y \supset B \in F$, resultando $A \cap Y \in F$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). i es morfismo, y siendo $i^{-1}(A) = A \cap Y$ la hipótesis asegura que i es antimorfismo.

(iv) $\Longrightarrow$ (v). Sea $x \notin N$. Existe algún $A \in F_o$ tal que $x \in A$. Por ser i un antimorfismo, $A \cap Y = i^{-1}(A) \in F_Y \subset F$, pero al ser A minimal resulta $A = A \cap Y$, $x \in Y$.

(v) $\Longrightarrow$ (vi). En todo caso $F_Y \subset F \cap Y$. Si $A \in F_o$, tenemos que $A \subset X\text{-}N \subset Y$, luego $A \cap Y = A \in F_Y$. Si $B \in F$, existe $A \in F_o$ con $A \subset B$, de donde $A = A \cap Y \subset B \cap Y$, y por tanto $B \cap Y \in F_Y$.

(vi) $\Longrightarrow$ (i). Sea $A \in F_o$. Tenemos $A \cap Y \in F_Y$, pero siendo A minimal y $F_Y \subset F$, debe ser $A = A \cap Y$, luego $A \in P(Y)$.

Proposición I.2.3.- Los subespacios densos de (X,F) forman un álgebra de Boole isomorfa a $P(N)$.

demostración. La unión de subespacios es un subespacio, por ser F filtro de orden. Si uno de los dos es denso, la unión también. Por otra parte, la intersección de subespacios densos es un subespacio denso. Por tanto, los subespacios densos forman un subretículo $R \subset P(X)$ cuyo máximo es (X,F) y cuyo mínimo es $(X\text{-}N, F_{X-N})$.

Definiendo $f : R \longrightarrow P(N)$ por la ecuación $f(Y) = Y \cap N$, f es un isomorfismo de retículos, utilizando la condición (v) de la Proposición I.2.2.

Siendo $P(N)$ un álgebra de Boole, el paso al complementario se traslada a R como sigue: si $Y \in R$, es $Y = (X\text{-}N) \cup N'$, con $N' \subset N$; su complementario en R es $Y'_R = (X\text{-}N) \cup (N\text{-}N') = X\text{-}N'$. De este modo R se convierte en un álgebra de Boole isomorfa a $P(N)$ -aunque no subálgebra de $P(X)$-.

Lema I.2.1.- Sea F un filtro en X, $f : X \longrightarrow X'$ exhaustiva. Entonces $f(F)$ es un filtro en X', y $f : (X,F) \longrightarrow (X',f(F))$ es un bimorfismo.

demostración. Si $A,B \in F$, $A \cap B \neq \emptyset$ implica $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$. Si $B' \supset f(A)$, $A \in F$, entonces $f^{-1}(B') \supset A$, $f^{-1}(B') \in F$, y por ser f exhaustiva $B' = f(f^{-1}(B')) \in f(F)$. Por tanto, $f(F)$ es filtro.

Es evidente que f es morfismo. Y es antimorfismo porque para cada $A \in F$ tenemos $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

Sea (X,F) un espacio electoral, R una relación de equivalencia en X.

Se designa el conjunto cociente por $\overline{X} = X/R$, y la aplicación de paso al cociente por $\pi : X \longrightarrow \overline{X}$.

Por el Lema I.2.1, la familia $\overline{F} = \pi(F)$ es un filtro en $\overline{X}$.

Definición I.2.4.- El espacio electoral $(\overline{X},\overline{F})$ es el espacio cociente de (X,F) por la relación de equivalencia R.

La definición formaliza la idea intuitiva de formación de pactos.

El paso al cociente $\pi : (X,F) \longrightarrow (\overline{X},\overline{F})$ es un bimorfismo.

Ejemplo. Sea (X,F) un espacio electoral, $Y \subset X$. Llamaremos espacio cociente por la alianza Y al espacio X/Y obtenido como cociente por la relación de equivalencia R_Y definida en X por

$$x \; R_Y \; y \quad \text{si y sólo si} \quad x=y \quad \text{ó} \quad x,y \in Y$$

Designaremos el paso al cociente por π_Y, con $\overline{y} = \pi_Y(Y)$. Por ser π_Y un bimorfismo, el tipo de la coalición $\{\overline{y}\}$ coincide con el de Y. Así, si Y es vencedora X/Y es una dictadura de $\overline{y}$. Si Y es de bloqueo, $\overline{y}$ tiene veto.

Sea ahora (X,F) un espacio electoral, y sean $Y,Z \subset X$. Designemos por X/YZ el cociente doble $(X/Y)/\overline{Z}$, donde $\overline{Z} = \pi_Y(Z)$, y por π_{YZ} el bimorfismo exhaustivo desde X.

<u>Proposición</u> I.2.4.- a) Hay un isomorfismo $f : X/YZ \xrightarrow{\sim} X/ZY$ tal que $\pi_{ZY} = f \circ \pi_{YZ}$.

b) Si $Y \cap Z$ no es vacío, entonces $X/YZ \xrightarrow{\sim} X/Y \cup Z$; si $Y \cap Z = \emptyset$, entonces $X/Y \cup Z$ es el cociente de X/YZ por la identificación de $y = \pi_{YZ}(Y)$ con $z = \pi_{ZY}(Z)$.

<u>demostración</u>. Como resultado previo, si tenemos la situación

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_Y} & X/Y \\ {\scriptstyle \varepsilon}\downarrow & & \\ X' & & \end{array}$$

donde ε es un bimorfismo exhaustivo constante en Y, es fácil ver que existe un único bimorfismo exhaustivo $f : X/Y \longrightarrow X'$ tal que $f \circ \pi_Y = \varepsilon$, dado por $f([x]) = \varepsilon(x)$.

a) Aplicando esta propiedad, π_{ZY} factoriza por un bimorfismo exhaustivo f_1, que a su vez factoriza por otro $f : X/YZ \longrightarrow X/ZY$. Este último resulta biyectivo y verifica $f \circ \pi_{YZ} = f_1 \circ \pi_Y = \pi_{ZY}$.

b) Una nueva aplicación del resultado previo permite factorizar $\pi_{Y \cup Z}$, primero a X/Y y luego a X/YZ, dando un bimorfismo exhaustivo $g : X/YZ \longrightarrow X/Y \cup Z$.

Si $Y \cap Z$ no es vacío, g es biyectivo.

Si $Y \cap Z = \emptyset$, g no es inyectivo sólo porque $g(y) = g(z)$, con $y \neq z$. Por tanto, aplicando de nuevo el resultado previo se obtiene un isomorfismo $[X/YZ]/\{y,z\} \xrightarrow{\sim} X/Y \cup Z$.

Este enunciado se generaliza inmediatamente, probando que el cociente múltiple $X/Y_1Y_2\ldots Y_r$ de X por las alianzas $Y_1,Y_2,\ldots,Y_r$ no depende del orden de éstas por (a), y que se pueden suponer disjuntos cada par Y_i,Y_j, o de lo contrario se sustituyen ambos por $Y_i \cup Y_j$.

Notas. Dos observaciones acerca de la categoría $\mathcal{E}^{-1}$.

1ª) $F \cap Y$ es filtro en Y si y sólo si $A \cap B \cap Y$ no es vacío para ningún par $A,B \in F_o$. Por ejemplo si $Y \cap V$ no es vacío.

Si $F \cap Y$ es filtro en Y, $i : Y \longrightarrow X$ es monomorfismo en la categoría $\mathcal{E}^{-1}$. i es bimorfismo si y sólo si Y es denso.

En cierta manera, los pares $(Y,F\cap Y)$, cuando $F \cap Y$ es filtro, podrían ser considerados los subespacios de (X,F) en $\mathcal{E}^{-1}$.

2ª) Sean (X,F), (X',F') espacios electorales con $X \cap X' = \emptyset$. La familia $F \otimes F' = \{A \cup A' \;/\; A \in F,\ A' \in F'\}$ es un filtro en $X \cup X'$, cuya base es $(F \otimes F')_o = F_o \otimes F'_o$. $(X \cup X', F \otimes F')$ es el producto de Shapley o unión disjunta de los espacios electorales dados. Se cumple: $V_{F\otimes F'} = V_F \cup V_{F'}$, $N_{F\otimes F'} = N_F \cup N_{F'}$. Si (X,F) es una dictadura de x, en el producto de Shapley x se reduce a elemento con veto.

El producto de Shapley es precisamente el coproducto en la categoría $\mathcal{E}^{-1}$. En efecto, si i,i' son las inclusiones respectivas en el producto de Shapley, dados dos antimorfismos $(X,F) \xrightarrow{f} (X'',F'')$, $(X',F') \xrightarrow{f'} (X'',F'')$, existe una única $g : (X \cup X', F \otimes F') \longrightarrow (X'',F'')$ que cierra el diagrama por los dos lados, dada por

$$g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in X$$

$$g(x') = f'(x') \quad \text{si} \quad x' \in X',$$

y es antimorfismo porque $g^{-1}(A'') = f^{-1}(A'') \cup (f')^{-1}(A'') \quad \forall A'' \in F''$.

II

PODER DE SHAPLEY

Shapley propuso [46] un método para la evaluación a priori del "poder" de cada elemento dentro de un conjunto que toma decisiones, al adaptar la idea de valor de un juego que el propio autor había desarrollado para juegos "económicos". La conveniencia de tal análisis aparece al considerar que, generalmente, el número de votos controlados por cada elemento no indica fielmente su "poder" en el conjunto.

La idea de Shapley se basa exclusivamente en la consideración de las coaliciones vencedoras, por lo que la estructura de espacio electoral parece el marco adecuado para el estudio del poder, cuya definición derivaremos de nuestros axiomas básicos.

En la primera parte se establecerán algunos resultados acerca de la variación del poder. Relacionaremos sus valores extremos o pseudoextremos con las características de ciertos elementos. Asimismo, estableceremos su invariancia frente a isomorfismos y frente a la restricción a subespacios densos.

En la segunda sección pondremos de relieve la relación entre el poder y la estructura de espacio electoral, viendo que aquél es el invariante fundamental del grupo de automorfismos.

En los espacios llamados completos, los automorfismos son exactamente las permutaciones que conservan el poder. La completitud es una condición de regularidad que aquí no puede suprimirse y que en los capítulos posteriores tiene un papel destacado.

II.1.- VALORES DEL PODER.

Sea (X,F) un espacio electoral, con $n = \mathrm{card}(X)$.

Consideraremos el conjunto S de las $n!$ ordenaciones totales de X, esto es, aplicaciones biyectivas $\sigma : [1,n] \longrightarrow X$, con $[1,n] = \{1,2,\ldots,n\}$.

Dada $\sigma \in S$, representada por sus imágenes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in X$, se llama pivote de σ al elemento σ_i dado por

$$i = \min \{i \in [1,n] \;/\; \sigma([1,i]) \in F\}.$$

De esta definición resulta que para cada $j < i$, $\sigma([1,j]) \notin F$, y que existe $C \in F_o$ tal que $C \subset \sigma([1,i])$ y $\sigma_i \in C$.

<u>Definición</u> II.1.1.- La función de poder de Shapley en (X,F) es la aplicación $p : X \longrightarrow R$ definida por

$$p(x) = \frac{\mathrm{card}\ S(x)}{n!}$$

para cada $x \in X$, siendo $S(x) = \{\sigma \in S \;/\; x = \mathrm{piv}(\sigma)\}$.

Es inmediato que p es una función a valores racionales entre 0 y 1, y por ser los $S(x)$ variando x una partición de S, resulta que $\sum_{x \in X} p(x) = 1$. Un resultado conocido que después completaremos es:

<u>Proposición</u> II.1.1.- a) x es nulo si y sólo si $p(x) = 0$

b) x es dictador si y sólo si $p(x) = 1$

c) si x tiene veto, $\frac{1}{n} \leq p(x) \leq 1 - \frac{1}{n}$

<u>demostración</u>. a) Un x nulo nunca es pivote, luego $p(x) = 0$. Si x no es nulo, sea $C \in F_o$ tal que $x \in C$; si $i = \mathrm{card}(C)$, x es pivote al menos en $(i-1)!(n-i)!$ ordenaciones de X, por lo que $p(x) > 0$.

b) Resulta del apartado a) y de lo dicho en las Definiciones I.1.5.

c) Si x tiene veto, toda ordenación σ tal que $\sigma_n = x$ tiene x por pivote, por tanto $p(x) \geq (n-1)!/n! = 1/n$; la otra desigualdad resulta de la Proposición II.1.2.

<u>Lema</u> II.1.1.- a) El valor mínimo $m(n)$ de la función

$$f_n(i) = \frac{(n-i)!(i-1)!}{n!}$$

definida para $i = 1,2,\dots,n$, se alcanza para $i = E(\frac{n+1}{2})$.

Si $n=2k$, entonces $i=k$, siendo $f_n(k) = m(n) = f_n(k+1)$;

si $n=2k+1$, entonces $i=k+1$, pero solamente $f_n(k+1) = m(n)$.

b) Para cada n, $m(n+1) \leq \frac{1}{2} m(n)$, $m(n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, por lo que $\lim_{n\to\infty} m(n) = 0$.

<u>demostración</u>. a) La función es simétrica: $f_n(i) = f_n(n-(i-1))$ para $i = 1,2,\dots,n$.

De $1 \leq i < k$ resultan $n > 2k > 2i$, $n-i > i$; multiplicando ésta última por $(n-i-1)!(i-1)!$ queda $(n-i)!(i-1)! > (n-i-1)!i!$, que nos lleva a $f_n(i) > f_n(i+1)$, de donde $f_n(1) > f_n(2) > \dots > f_n(k)$.

La simetría de la función completa el razonamiento si $n=2k$. Y para $n=2k+1$, si $i=k$ resulta $n=2k+1 > 2k$, de forma que $f_n(k) > f_n(k+1)$.

b) Según el apartado anterior,

$$m(2k) = \frac{k!(k-1)!}{(2k)!}, \quad m(2k+1) = \frac{k!k!}{(2k+1)!}, \quad \text{por tanto}$$

si $n=2k$, $\frac{m(n+1)}{m(n)} = \frac{k}{2k+1} < 1/2$, si $n=2k+1$, $\frac{m(n+1)}{m(n)} = \frac{k+1}{2k+2} = 1/2$,

de manera que $m(n+1) \leq \frac{1}{2} m(n)$, y reiterando esta desigualdad queda $m(n) \leq 1/2^{n-1}$. Siendo, además, $m(n)$ no negativo, resulta $\lim_{n\to\infty} m(n) = 0$.

Proposición II.1.2.- En un espacio electoral de n elementos,

a) el máximo poder no dictatorial posible es $1 - \frac{1}{n}$;

b) el mínimo poder no nulo posible es $m(n)$.

demostración. En ambos casos el problema está en hallar filtros adecuados, para que un elemento $x \in X$ alcance el poder citado.

a) En este caso x debe pertenecer al mayor número posible de coaliciones de la base F_o sin ser dictador, y dichas coaliciones deben contener el mínimo número posible de elementos.

Sea $X = \{x, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$; consideremos el filtro F cuya base sea $F_o = \{\{x, x_2\}, \{x, x_3\}, \ldots, \{x, x_n\}\}$. Las ordenaciones σ tales que $\sigma_1 = x$ no pueden tener por pivote x en ningún filtro si x no es dictador. Las restantes ordenaciones tienen por pivote x para el filtro propuesto. Por tanto, x alcanza con él poder no dictatorial máximo, y es

$$p(x) = \frac{n! - (n-1)!}{n!} = 1 - \frac{1}{n}$$

b) En este caso, por ser x no nulo, existe alguna coalición vencedora minimal C tal que $x \in C$. Siendo $i = card(C)$ tenemos

$$p(x) \geq \frac{(i-1)!(n-i)!}{n!}$$

Si se consigue que x no pertenezca a ninguna otra coalición de la base y que no sea pivote en lugares $j > i$, quedará exactamente

$$p(x) = \frac{(i-1)!(n-i)!}{n!}$$

Sea $X = \{x, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$; sea $C = \{x, x_2, \ldots, x_i\}$, $C_j = \{x_2, \ldots, x_i, x_j\}$ para cada $j = i+1, i+2, \ldots, n$. Finalmente, sea F el filtro cuya base es $F_o = \{C, C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots, C_n\}$. En el espacio electoral (X, F) el poder de x es el indicado anteriormente, y tomando $i = E(\frac{n+1}{2})$ resulta del Lema II.1.1 que $p(x) = m(n)$, mínimo poder no nulo posible.

Proposición II.1.3.- Sea (X,F) un espacio electoral. Cuando el subconjunto V de las Definiciones I.1.5 no es vacío, el poder alcanza su valor máximo en cada $x \in V$, y solamente en estos elementos.

demostración. Se supone el espacio no dictatorial, o sería obvia la afirmación.

1º. Si $x \in V$, entonces $p(y) \leq p(x)$ para cada $y \in X$.

En efecto: si $t_{xy} : X \longrightarrow X$ es la trasposición de x por y, la aplicación $\sigma \longmapsto \sigma' = t_{xy} \circ \sigma$ es una permutación de S. Si $\sigma \in S(y)$ resulta $\sigma' \in S(x)$, por lo tanto $p(y) \leq p(x)$.

2º. Si $x \in V$, $y \notin V$, entonces $p(y) < p(x)$.

En efecto: existe $C \in F_o$ tal que $y \notin C$; si $i = \mathrm{card}(C)$, para cada σ que verifique las condiciones $\sigma_i = x$, $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i\} = C$, resulta $\sigma \in S(x)$ pero $t_{xy} \circ \sigma \notin S(y)$, por lo que, siendo $1 < i < n$, tenemos

$$p(x) \geqslant \frac{(i-1)!(n-i)!}{n!} + p(y) > p(y).$$

3º. Si $x \in V$, entonces $y \in V$ si y sólo si $p(y) = p(x)$.

En efecto: si $y \in V$, el argumento del punto 1º nos da $p(x) \leq p(y)$. Y si $y \notin V$, el punto 2º demuestra que $p(y) \neq p(x)$.

Proposición II.1.4.- a) Los isomorfismos conservan el poder.

b) La restricción de la función de poder a un subespacio denso es la función de poder de dicho subespacio.

demostración. a) Sea $f : (X,F) \longrightarrow (X',F')$ un isomorfismo, y sean S,S' los conjuntos de ordenaciones de X,X' respectivamente. La aplicación $\sigma \longmapsto \sigma' = f \circ \sigma$ de S en S' es una biyección. Sea $x \in X$. Por ser f un bimorfismo, $\sigma' \in S(f(x))$ cuando $\sigma \in S(x)$, luego $p(x) \leq p(f(x))$. Aplicando el argumento a f^{-1} resulta la desigualdad contraria, por lo que $p(x) = p(f(x))$.

b) Sea (X,F) un espacio electoral, Y un subespacio denso. Si p_X, p_Y designan las funciones de poder respectivas en X, Y, probaremos que $p_X(y) = p_Y(y)$ para cada $y \in Y$. Sea $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_h\}$ y también $X-Y = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subset N$, por ser Y denso. Cada ordenación σ de Y determina un subconjunto S_σ de ordenaciones de X obtenidas intercalando de todas las formas posibles en σ los elementos de $X-Y$; el pivote de todas las ordenaciones de S_σ es el pivote de σ, y cada S_σ contiene exactamente $C^k_{h+k} \cdot P_k = (h+k)!/h!$ ordenaciones. Variando σ los S_σ constituyen una partición del conjunto de las ordenaciones de X, por tanto, si $y \in Y$

$$p_X(y) = \frac{1}{(h+k)!} \cdot \frac{(h+k)!}{h!} \cdot p_Y(y) \; . \; h! = p_Y(y).$$

<u>Nota</u>. El poder de bloqueo, sugerido por Shapley, puede obtenerse así: dada $\sigma \in S$, el pivote de bloqueo de σ es el elemento $\sigma_i \in X$ definido por $i = \min \{i \in [1,n] / \sigma([i+1,n]) \notin F\}$. El poder de bloqueo de cada $x \in X$ se define por la fórmula

$$p_B(x) = \frac{\text{card } S_B(x)}{n!}$$

siendo $S_B(x) = \{\sigma \in S / x = \text{pivote de bloqueo de } \sigma\}$. Una demostración de que $p = p_B$, igualdad enunciada por Shapley, sería la siguiente: Sea $s : [1,n] \longrightarrow [1,n]$ la simetría definida por $s(i) = n-i+1$. La aplicación $\sigma \longmapsto \sigma' = \sigma \circ s$ es una permutación de S; el pivote de σ es el pivote de bloqueo de σ', mientras que el pivote de bloqueo de σ es el pivote de σ', por tanto, $p = p_B$.

II.2.- INVARIANCIA DEL PODER A TRAVES DE LOS AUTOMORFISMOS.

Los automorfismos de un espacio electoral conservan el poder, como caso particular de la Proposición II.1.4.a), pero hay un recíproco parcial de interés cuando el espacio es completo. El grupo de automorfismos queda entonces perfectamente descrito, evidenciándose la relación entre el poder y los axiomas de espacio electoral. Añadimos dos contraejemplos de que la completitud no puede suprimirse.

<u>Definición</u> II.2.1.- Sea (X,F) un espacio electoral. Un automorfismo de (X,F) es un isomorfismo $f : (X,F) \longrightarrow (X,F)$.

Es inmediato comprobar que con la operación de composición los automorfismos de (X,F) forman un grupo $\mathrm{Aut}(X,F)$, subgrupo del grupo simétrico $S(X)$.

El grupo $\mathrm{Aut}(X,F)$ no determina al filtro F. Por ejemplo, si un espacio simétrico es aquél en que $\mathrm{Aut}(X,F) = S(X)$, es fácil ver que hay espacios simétricos no isomorfos entre sí con igual soporte X. Todo espacio simétrico es simple, es decir, existe un cardinal común a todas sus coaliciones vencedoras minimales. El estudio y la clasificación de los espacios simples, en particular de los simétricos, es el objeto del capítulo siguiente.

<u>Proposición</u> II.2.1.- El índice $[S(X):\mathrm{Aut}(X,F)]$ es el número de filtros en X isomorfos a F.

<u>demostración</u>. A cada $f \in S(X)$ se le asocia $f(F)$, que por el Lema I.2.1 es un filtro en X isomorfo a F. La aplicación $f \longmapsto f(F)$ es evidentemente exhaustiva entre $S(X)$ y el conjunto de filtros en X isomorfos a F. Además, $f(F) = g(F)$ equivale a $g^{-1} \circ f \in \mathrm{Aut}(X,F)$, es decir,

a que $g \equiv f$ mód. $Aut(X,F)$, por lo que existe una biyección entre el cociente $S(X)/Aut(X,F)$ y el conjunto de filtros en X isomorfos a F.

Definición II.2.2.- La relación de simetría en X es

$$x \; R \; y \quad \text{si y sólo si} \quad t_{xy} \in Aut(X,F),$$

siendo t_{xy} la trasposición de x por y (convenimos que $t_{xx} = id$).

Es inmediato comprobar que R es una relación de equivalencia, ya que $t_{xx} = id$, $t_{yx} = t_{xy}$, y, si x,y,z son dos a dos distintos, $t_{xz} = t_{yz} \circ t_{xy} \circ t_{yz}$.

Las clases de equivalencia de R serán las clases de simetría.

Puesto que $Aut(X,F)$ es un grupo que opera en X, consideraremos las órbitas de X respecto a dicho grupo. Para cada $x \in X$ su órbita es

$$O_x = \left\{ y \in X \;/\; \exists f \in Aut(X,F),\; y = f(x) \right\}.$$

Las órbitas constituyen una partición de X, siendo cada una invariante por cada automorfismo. El grupo se llama transitivo cuando existe una única órbita, $O = X$.

Por la definición dada antes, es inmediato que cada órbita es reunión de clases de simetría. En particular, tanto N como V son a la vez órbitas y clases de simetría.

Dos elementos $x,y \in X$ son equivalentes si xRy, es decir, si t_{xy} es un automorfismo. En cambio, x,y son relativamente equivalentes si $y \in O_x$, es decir, si existe algún automorfismo f (no necesariamente la trasposición t_{xy}) tal que $y = f(x)$. También son intercambiables, pero con una transformación simultánea del resto (o parte) del espacio.

Proposición II.2.2.- El poder es invariante por automorfismos, es decir, es una función constante en cada órbita.

demostración. Caso particular de la Proposición II.1.4.a).

Corolario. Si $Aut(X,F)$ es transitivo, en particular si (X,F) es simétrico, se verifica:

a) p es constante en X

b) $N = \emptyset$

c) o bien $V = X$, $F = \{X\}$ y el espacio queda determinado, o si no $V = \emptyset$ y todas las clases de simetría tienen el mismo cardinal (son unipuntuales si n es primo).

demostración. a) Por ser el grupo transitivo existe una única órbita $O = X$, donde p es constante por la proposición anterior.

b) Y por ser N una posible órbita si no es vacío, al haber una sola debe ser $N = \emptyset$.

c) Si V no es vacío, por ser una órbita es $V = X$, de donde el filtro es $F = \{X\}$. En otro caso, con $V = \emptyset$, veremos que dos clases de simetría tienen el mismo cardinal.

Sean C,C' dos clases distintas, y sean $x \in C$, $x' \in C'$. Por la transitividad existe $f \in Aut(X,F)$ tal que $x' = f(x)$. Bastará ver que $f(C) \subset C'$, puesto que el mismo argumento para f^{-1} nos daría $C' \subset f(C)$. Si $y \in C$, la igualdad $t_{x'y'} = f \circ t_{xy} \circ f^{-1}$, siendo $y' = f(y)$, lleva a que $x'Ry'$.

Por descontado, si n es primo, como no puede haber una sola clase de simetría con n elementos porque sería $V = X$, ha de haber n clases de simetría todas unipuntuales.

Utilizaremos en la próxima definición las siguientes notaciones: para cada $x \in X$,

$$F_x = \{A \in F \;/\; x \in A\}, \qquad (F_o)_x = \{A \in F_o \;/\; x \in A\}.$$

Definición II.2.3.- La relación de sustitución en X es

$$x \; S \; y \quad \text{si y sólo si} \quad t_{xy}(F_x) \subset F_y.$$

Se verifican inmediatamente las propiedades reflexiva y transitiva de S, preorden en X que relacionaremos en seguida con R.

Si (X,F) es simple, xSy implica $t_{xy}(F_o)_x \subset (F_o)_y$, mientras que el recíproco es válido en cualquier espacio.

Proposición II.2.3.- xRy si y sólo si xSy, ySx, es decir, R es la relación de equivalencia asociada al preorden S.

demostración. Basta observar que xRy, o sea, $t_{xy} \in Aut(X,F)$, significa exactamente que $t_{xy}(F_x) = F_y$.

Resulta de ello que en el conjunto cociente $\overline{X} = X/R$ queda inducida por S una relación de orden $\leq$, de la que, si no es vacía, la clase N (respectivamente V) es el mínimo (resp. máximo).

Utilizaremos un resultado general de la teoría de grupos que se expone a continuación (Hall [13]).

Si $G \subset S(X)$ están definidas las clases de simetría de X respecto a G por el proceso seguido en la Definición II.2.2. Se verifica que cada órbita es reunión de clases de simetría de G. Por otra parte, si $U \subset X$, el grupo $S(U)$ puede considerarse subgrupo de $S(X)$ mediante un monomorfismo, y si $U,V \subset X$ son disjuntos, también el producto directo $S(U) \times S(V)$ se inyecta en $S(X)$.

El próximo lema, puramente técnico, combinado con el siguiente, que establece una fuerte conexión entre S y el poder, permitirán llegar al resultado principal de esta sección.

Lema II.2.1.- Si $G \subset S(X)$ son equivalentes:

i) G está generado por (sus) trasposiciones

ii) cada órbita de G coincide con una clase de simetría de G

iii) existen subconjuntos $U_1, U_2, \ldots, U_r$ de X, dos a dos disjuntos, tales que $G = S(U_1) \times S(U_2) \times \ldots \times S(U_r)$.

demostración. i) $\Longrightarrow$ ii) Sean x,y de una misma órbita. Existe $f \in G$ tal que $y = f(x)$. Por hipótesis es $f = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_i$, producto de trasposiciones de G, de donde resulta $x \mathrel{R} t_i(x)$, $t_i(x) \mathrel{R} t_{i-1}t_i(x)$, $\ldots$, $t_2t_3\ldots t_i(x) \mathrel{R} t_1t_2t_3\ldots t_i(x) = y$. Por transitividad, es xRy, por lo que son de la misma clase.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Sean $U_1, U_2, \ldots, U_r$ las órbitas de G, que por hipótesis son también sus clases de simetría. Por lo primero y las consideraciones previas al lema, es $G \subset S(U_1) \times S(U_2) \times \ldots \times S(U_r)$. Por lo segundo y aquellas consideraciones vale la inclusión recíproca, y resulta la igualdad.

iii) $\Longrightarrow$ i) Es inmediato que G, por ser producto de grupos simétricos, está generado por sus trasposiciones.

Lema II.2.2.- Si xSy, $y\not{S}x$, entonces $p(x) < p(y)$.

demostración. La aplicación $\sigma \longmapsto t_{xy} \circ \sigma$ es una permutación del conjunto de ordenaciones de X.

Por ser xSy, si x es pivote de σ, y es el pivote de $t_{xy} \circ \sigma$, por tanto $p(x) \leq p(y)$.

Por ser $y\not{S}x$, existe $A \in (F_o)_y$ tal que $t_{xy}(A) \notin F$, por lo que $A \in F_o$, $y \in A$, $x \notin A$. De ello resulta, llamando $i = \mathrm{card}(A)$, que hay $(i-1)!(n-i)!$ ordenaciones cuyo pivote es y, la antiimagen de las cuales no tiene pivote x, de donde, siendo $1 < i < n$, resulta

$$p(y) \geq p(x) + \frac{(i-1)!(n-i)!}{n!} > p(x)$$

Proposición II.2.4.- Los automorfismos de un espacio (X,F) en donde S es total son exactamente las permutaciones de X que conservan el poder, es decir,

$$\mathrm{Aut}(X,F) = \{f \in S(X) \;/\; p(f(x)) = p(x), \quad \forall x \in X\}.$$

Además, si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son las clases de simetría de (X,F),

$$\mathrm{Aut}(X,F) = S(X_1) \times S(X_2) \times \ldots \times S(X_k).$$

demostración. Puesto que el poder es invariante por los automorfismos según la Proposición II.2.2, bastará probar que toda permutación de X que conserve el poder es un automorfismo de (X,F). Sea f una tal permutación. Para cada $x \in X$, sea $y = f(x)$. Suponiendo $y \not R x$, por ser S total tendríamos ySx o bien xSy, excluyéndose mutuamente. Por el lema anterior llegaríamos a contradicción con que f conserve el poder. Por tanto, para cada $x \in X$ resulta $xRf(x)$, de donde f transforma cada clase de simetría en sí misma y, por ello, $f \in \mathrm{Aut}(X,F)$.

En segundo lugar, puesto que el producto directo de los grupos simétricos de las clases de simetría está contenido en $\mathrm{Aut}(X,F)$, y se acaba de ver que cada $f \in \mathrm{Aut}(X,F)$ descompone en producto de permutaciones de dichas clases, queda probada la coincidencia de los grupos.

Corolario 1. Si (X,F) es un espacio electoral con S total,

a) cada órbita de $\mathrm{Aut}(X,F)$ es una clase de simetría, y no hay pares de elementos equivalentes sólo relativamente

b) $p(x) = p(y)$ si y sólo si $x R y$

c) los valores $p_1, p_2, \ldots, p_k$ del poder sobre las órbitas de $\mathrm{Aut}(X,F)$ son todos distintos (lo que generaliza la Proposición II.1.3)

d) el número de filtros en X isomorfos a F es el número combinatorio $C^{n}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, donde $n_i = \mathrm{card}(X_i)$, $i = 1,2,\ldots,k$.

demostración. a) Por la proposición anterior y el Lema II.2.1.

b) $p(x) = p(y)$ implica que x,y son de la misma órbita, o sea de la misma clase; el recíproco viene de la Proposición II.2.2.

c) Resulta de combinar los puntos a) y b).

d) Resulta de la Proposición II.2.1 viendo que $\mathrm{Aut}(X,F)$ es el producto directo de los grupos simétricos de sus clases de simetría.

Corolario 2. Supuesta S total, si p es constante o el grupo transitivo el espacio es simétrico.

demostración. Por los puntos a),c) del corolario anterior.

Ejemplo 1. Sea $X = \{a,b,c,d,e,f\}$, F el filtro cuyo germen es $F_0 = \{\{a,b\},\ \{a,c,d\},\ \{b,e,d\},\ \{a,c,e,f\}\}$. En el espacio (X,F) la relación S no es total, sino que viene dada por el diagrama

$$\begin{tikzcd} f \arrow[rr] \arrow[dr] & & c \arrow[r] \arrow[dr] & a \\ & e \arrow[r] & d \arrow[r] \arrow[ur] & b \end{tikzcd}$$

El grupo es $\mathrm{Aut}(X,F) = \{id\}$, de forma que coinciden las órbitas con las clases, todas unipuntuales. Sin embargo, $p(c) = 0'1 = p(e)$, sin ser equivalentes: t_{ce} conserva el poder sin ser automorfismo.

Ejemplo 2. Sea $X = \{1,2,\ldots,n\}$, $n \geqslant 5$, $q = E(n/2)+1$, F el filtro de germen $F_0 = \{\{1,\ldots,q\},\ \{2,\ldots,q+1\},\ \ldots,\ \{n,1,\ldots,q-1\}\}$.

Este es un espacio simple no simétrico, con $\mathrm{Aut}(X,F) = D_{2n}$, grupo diédrico de las isometrías de un polígono regular de n lados, por contener el "giro" $(1,2,\ldots,n)$ y la simetría $s(i) = n-i+1$. No hay trasposiciones. Por ser transitivo hay una sola órbita, pero n clases de simetría unipuntuales.

El poder es constante, a pesar de lo anterior. Naturalmente, S no es total: se verifica solamente xSx para cada $x \in X$.

III

ESPACIOS COMPLETOS

En la última sección del capítulo II se ha establecido que el poder es el invariante fundamental del grupo de automorfismos para una clase de espacios electorales: aquéllos donde el preorden de sustitución S es total.

Estos espacios, que llamaremos completos, constituyen el objeto del presente capítulo. En él, mediante la generalización de las relaciones de simetría y sustitución a los subconjuntos, construiremos un cociente ordenado que para dichos espacios resultará ser un retículo distributivo, del que daremos dos versiones numéricas -el de los índices y el de los modelos- destinadas a ser los instrumentos esenciales para abordar el tema de la clasificación de los espacios simples completos.

La clasificación de espacios, aparte de su interés intrínseco, viene motivada por una cuestión importante que planteamos en el último capítulo, la realización de espacios electorales por medio de conjuntos decisorios. Dada la generalidad de aquéllos, una primera aproximación consiste en investigar los espacios simples. Y puesto que la cuestión queda inmediatamente zanjada para los espacios no completos el punto interesante es justamente el de la completitud.

Así, la primera sección se dedicará a la generalización de R y S, y la segunda al proceso de asociar a cada espacio completo el citado retículo, estudiando sus propiedades. En la tercera sección clasificaremos los espacios simples completos, progresando desde los elementales a los más complejos, es decir, con mayor número de invariantes.

III.1.- SIMETRIA Y SUSTITUCION.

Sea (X,F) un espacio electoral. En el capítulo II se han definido la simetría R y la sustitución S, verificándose que R es la relación de equivalencia asociada al preorden S.

Extenderemos ahora R y S a $P(X)$ conservando la conexión entre ambas relaciones. Y la relación de simetría se caracterizará numéricamente mediante los índices, que permiten después estudiar el retículo asociado a cada espacio donde S sea total (espacios completos).

<u>Definición</u> III.1.1.- La relación de simetría r en $P(X)$ es la relación de equivalencia engendrada por la relación siguiente:

$$A \perp B \text{ si y sólo si } \exists xRy \ / \ t_{xy}(A) = B;$$

es decir, A r B si y sólo si $A \perp C_1 \perp \dots \perp C_h = B$, h arbitrario.

r es de equivalencia por ser $\perp$ reflexiva y simétrica, y es una extensión de R a $P(X)$ identificando X con sus subconjuntos unitarios.

Si A r B, $A \in F$ (resp. $A \in F_o$) implica $B \in F$ (resp. $B \in F_o$).

<u>Definición</u> III.1.2.- La relación de sustitución s en $P(X)$ es la relación de preorden engendrada por la relación siguiente:

$$A \rightarrow B \text{ si y sólo si } A = \emptyset \text{ o } \exists xSy \ / \ x \in A, \ t_{xy}(A) \subset B;$$

es decir, A s B si y sólo si $A \rightarrow C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_h = B$, h arbitrario.

s es un preorden por ser $\rightarrow$ reflexiva, y extiende S a $P(X)$.

Si A s B, $A \in F$ implica $B \in F$.

Tanto $A \subset B$ como $A \perp B$ implican $A \rightarrow B$. Además, si A s B, los $C_1,\dots,C_{h-1}$ pueden elegirse con igual cardinal que A. Para ello basta ver que si $A \rightarrow B$ existe $B' \subset B$ tal que $A \rightarrow B'$, $\text{card}(A) = \text{card}(B')$. Y, en efecto, si $A = \emptyset$ basta tomar $B' = \emptyset$; si no, existiendo xSy tal que $x \in A$, $t_{xy}(A) \subset B$, se pone $B' = t_{xy}(A)$.

Sea p la función de poder de Shapley en X, y $g : X \longrightarrow N$ dada por $g(x) = p(x) + \varepsilon$, siendo $\varepsilon > 0$ constante. Esta función satisface: $g(x) > 0$ para cada $x \in X$; $g(x) = g(y)$ si xRy; y según el Lema II.2.2, $g(x) < g(y)$ si xSy pero $y \not S x$. (En general, si S es un preorden en un X finito y R la equivalencia asociada, siempre existen tales funciones g).

Extendiendo g a P(X) por $g(A) = \sum_{x \in A} g(x)$ para cada $A \subset X$, queda $g(A) = g(B)$ si $A\ r\ B$, $g(A) < g(B)$ si $A \subsetneq B$, y $g(A) \leq g(B)$ si $A\ s\ B$.

<u>Proposición</u> III.1.1.- r es la relación de equivalencia asociada al preorden s, es decir, $A\ r\ B$ si y sólo si $A\ s\ B$, $B\ s\ A$.

<u>demostración</u>. Veamos que $A \rightarrow B$ pero $A \not\perp B$ implica $g(A) < g(B)$. Sea xSy, $x \in A$, $t_{xy}(A) \subset B$. Si $y \in A$, entonces $A \subset B$, $A \neq B$, de donde $g(A) < g(B)$. Si $y \notin A$ pero $y \not S x$, es $g(A) < g(t_{xy}(A)) \leq g(B)$. Y si $y \notin A$ pero ySx, resulta $t_{xy}(A) \neq B$, y $g(A) = g(t_{xy}(A)) < g(B)$.

Sea $A\ r\ B$: la cadena $A \perp C_1 \perp \ldots \perp C_h = B$ puede escribirse $A \rightarrow C_1 \rightarrow \ldots \rightarrow C_h = B \rightarrow C_{h-1} \rightarrow \ldots \rightarrow C_1 \rightarrow A$, luego $A\ s\ B$, $B\ s\ A$.

Recíprocamente, si $A\ s\ B$, $B\ s\ A$, empalmamos las dos cadenas: $A \rightarrow C_1 \rightarrow \ldots \rightarrow C_h = B \rightarrow D_1 \rightarrow \ldots \rightarrow D_k = A$; si alguna $\rightarrow$ no fuese $\perp$ obtendríamos $g(A) < g(A)$, de modo que $A\ r\ B$.

(También hemos probado que $A \perp B$ si y sólo si $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$).

La ordenación inducida por s en el cociente $\overline{P(X)} = P(X)/r$ se designará por $\leq$, como hicimos con la dada por S en $\overline{X} = X/R$.

Puesto que $A\ r\ B$ supone que $card(A) = card(B)$, hablaremos libremente de $card(\overline{A})$ para toda clase $\overline{A} \in \overline{P(X)}$.

Tomando $P_j(X) = \{A \in P(X)\ /\ card(A) = j\}$, $j = 0,1,\ldots,n$, los cocientes $\overline{P_j(X)} = P_j(X)/r$ constituyen una partición de $\overline{P(X)}$.

<u>Proposición</u> III.1.2.- Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ las clases de simetría de (X,F), $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sus cardinales. Se verifica:

1º. A r B si y sólo si $\mathrm{card}(A \cap X_i) = \mathrm{card}(B \cap X_i)$, $i=1,\ldots,k$;

2º. para cada $\overline{A} \in \overline{P(X)}$, los números $\alpha_i = \mathrm{card}(A \cap X_i)$ no dependen del representante A, y cumplen $0 \leq \alpha_i \leq n_i$, $i=1,\ldots,k$;

3º. recíprocamente, dados $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ así acotados, existe una única $\overline{A}$ a la que corresponden, con $\mathrm{card}\,\overline{A} = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$;

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ se llamarán los índices de $\overline{A}$).

<u>demostración</u>. 1º. ($\Longrightarrow$). Basta probarlo si $A \perp B$. Sean xRy con $t_{xy}(A) = B$. Si $x,y \in A$, o bien si $x,y \notin A$, es $A = B$ y la tesis es obvia. Supongamos $x \in A$, $y \notin A$. Entonces existe algún X_i con $x \in X_i$; por tanto $y \in X_i$, de donde $\mathrm{card}(A \cap X_j) = \mathrm{card}(B \cap X_j)$ para cada $j=1,\ldots,k$.

($\Longleftarrow$). Demostración por inducción sobre $s = \frac{1}{2}\,\mathrm{card}(A+B)$, pues $\mathrm{card}(A+B)$ es par al ser $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ por la hipótesis.

Si $s = 0$, es $A = B$.

Si $s \geq 1$, sea $x \in A-B$; si $x \in X_i$, por hipótesis existe $y \notin A$, $y \in B \cap X_i$. Tomando $A' = t_{xy}(A)$, resulta A r A' y $\frac{1}{2}\,\mathrm{card}(A'+B) = s-1$, por lo que A' r B, y A r B.

2º. Resulta inmediatamente del punto anterior.

3º. Basta elegir α_1 elementos en X_1, α_2 en X_2, ..., α_k en X_k, lo cual es posible por las acotaciones; así se construye un $A \subset X$ tal que $\overline{A}$ tiene estos índices, y dicho $\overline{A}$ es único por el punto 1º.

III.2.- RETICULO ASOCIADO A UN ESPACIO COMPLETO.

La Prop. III.1.2 establece una correspondencia biyectiva $\overline{A} \longmapsto (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$, que asocia cada clase de $\overline{P(X)}$ con la colección ordenada de sus índices. Ello sugiere un camino para estudiar la estructura $(\overline{P(X)}, \leq)$, transformándola en modelos isomorfos de tipo numérico vectorial.

Restringiendo el estudio a los espacios (X,F) donde S es total (espacios completos), probaremos que $(\overline{P(X)}, \leq)$ es un retículo distributivo, no complementado si $\mathrm{card}(X) \geq 2$, isomorfo a un subretículo de la divisibilidad de N. Daremos dos retículos isomorfos con él, el de los índices, que sirve de puente, y el de los modelos de coaliciones, que es el más manejable y puede construirse, además, directamente a partir de $\overline{X}$.

El retículo será útil para la clasificación y el estudio de la realización de espacios electorales.

Definición III.2.1.- Un espacio electoral (X,F) es completo si S es un preorden total.

Ello equivale a que $(\overline{X}, \leq)$ sea una cadena, que en lo sucesivo se representará por $X_1 < X_2 < \ldots < X_k$. Así, si no es vacío N es X_1. Análogamente, si existe V es X_k.

Pasaremos ahora a la construcción del futuro "retículo de los índices".

Se considera el producto N^k dotado de la ordenación usual por componentes: $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $\alpha_i \leq \beta_i$, $i=1,\ldots,k$.

Se definen los "restos parciales", para cada $\alpha \in N^k$,

$$\Sigma_i(\alpha) = \alpha_i+\ldots+\alpha_k \ , \quad \text{para } i=1,\ldots,k,$$

y se considera la aplicación $\Sigma : N^k \longrightarrow N^k$ definida por los k restos:

$$\Sigma(\alpha) = (\Sigma_1(\alpha), \ldots, \Sigma_k(\alpha)).$$

Es inmediato comprobar que Σ es una aplicación inyectiva que conserva el orden: $\alpha \leq \beta$ implica $\Sigma(\alpha) \leq \Sigma(\beta)$.

Sea s la relación binaria definida en N^k por

$$\alpha \text{ s } \beta \text{ si y sólo si } \Sigma(\alpha) \leq \Sigma(\beta);$$

por ser Σ inyectiva, s es una relación de orden (compara los restos).

Finalmente, dados $n_1, n_2, \ldots, n_k$ números naturales no nulos, sean n su suma, $\bar{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Pondremos

$$\Lambda = \Lambda(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \left\{\alpha \in N^k \,/\, \alpha \leq \bar{n}\right\},$$

$$\text{y } \Lambda_j = \left\{\alpha \in \Lambda \,/\, d(\alpha) = j\right\}, \quad \text{para } j=0,1,\ldots,n,$$

siendo $d : N^k \longrightarrow N$ la función dada por $d(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = \Sigma_1(\alpha)$.

<u>Proposición</u> III.2.1.- Sea (X,F) un espacio electoral completo, $n_1, \ldots, n_k$ los cardinales de sus clases de simetría, $\Lambda = \Lambda(n_1, \ldots, n_k)$.

Existe un isomorfismo de orden $\varphi : (\overline{P(X)}, \leq) \longrightarrow (\Lambda, s)$, que transforma cada $\overline{P_j(X)}$ en Λ_j.

<u>demostración</u>. 1º Sea $\theta : P(X) \longrightarrow \Lambda$ dada por la fórmula $\theta(A) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, donde $\alpha_i = \text{card}(A \cap X_i)$, $i=1,\ldots,k$.

Por el teorema de los índices (Prop. III.1.2) θ factoriza y da una aplicación biyectiva $\varphi : \overline{P(X)} \longrightarrow \Lambda$, que asigna a cada $\bar{A}$ la colección ordenada de sus índices. Es obvio que $\varphi(\overline{P_j(X)}) = \Lambda_j$.

2º Sean $A,B \in P(X)$, $\alpha = \varphi(\bar{A})$, $\beta = \varphi(\bar{B})$. Si $A \subset B$, resulta $\alpha \leq \beta$, por tanto α s β. Si $A \rightarrow B$, sean xSy, $x \in A$, $t_{xy}(A) \subset B$. Sean $x \in X_i$, $y \in X_j$, $i \leq j$ por ser S total: si $i = j$, es A r $t_{xy}(A) \subset B$, de donde $\bar{A} = \overline{t_{xy}(A)}$ y este caso se reduce al $A \subset B$; si $i < j$, tendremos $\alpha_h \leq \beta_h$ si $h \neq i,j$, $\alpha_i = \beta_i + 1$, $\alpha_j = \beta_j - 1$, de donde α s β.

Estas consideraciones demuestran que φ es morfismo de orden.

3º Finalmente, veamos que φ^{-1} también es morfismo de orden. Sean α s β, $\alpha = \varphi(\overline{A})$, $\beta = \varphi(\overline{B})$. Construiremos un vector γ auxiliar. Puesto que $\beta_1+\ldots+\beta_k \geq d(\alpha)$, sea h máximo subíndice que satisfaga $\beta_h+\ldots+\beta_k \geq d(\alpha)$, y γ_h definido por $\gamma_h+\beta_{h+1}+\ldots+\beta_k = d(\alpha)$. Ha de ser $0 < \gamma_h \leq \beta_h$. Definimos $\gamma = (0,0,\ldots,\gamma_h,\beta_{h+1},\ldots,\beta_k)$. Sea $\overline{C} = \varphi^{-1}(\gamma)$. Es fácil ver que $\gamma \leq \beta$, α s γ, $d(\alpha) = d(\gamma)$.

Terminaremos la demostración viendo que A s C y que C s B.

A s C: por inducción sobre $u = \sum\limits_{i \,/\, \gamma_i-\alpha_i \geq 0} \gamma_i-\alpha_i$

caso $u = 0$: por ser α s γ, es $\alpha = \gamma$.

caso $u > 0$: existe un i máximo tal que $\gamma_i-\alpha_i > 0$, por lo que $\alpha_{i+1}=\gamma_{i+1}, \ldots, \alpha_k=\gamma_k$; por ser $d(\gamma) = d(\alpha)$ existe un h máximo tal que $h < i$, $\alpha_h > \gamma_h$, de donde $\alpha_{h+1}\leq\gamma_{h+1}, \ldots, \alpha_{i-1}\leq\gamma_{i-1}$. Por las condiciones expresadas existen $x \in A\cap X_h$, $z \in C\cap X_i$, con xSz, por ser S total, $h<i$. Sea $A' = t_{xz}(A)$, y pongamos $\alpha' = \varphi(\overline{A'})$. Resulta $d(\alpha') = d(\alpha) = d(\gamma)$, y además $\alpha'_t = \alpha_t$ si $t \neq i,h$, $\alpha'_i = \alpha_i+1$, $\alpha'_h = \alpha_h-1$, de donde α' s γ. Como ahora es $u' = u-1$, por inducción es A' s C, que con $A \rightarrow A'$ da A s C.

C s B: por inducción sobre $v = card(C-B)$; veremos que existe $C' \subset B$ tal que C r C'.

caso $v = 0$: $C-B = \emptyset$, luego $C \subset B$, y tomamos $C' = C$.

caso $v > 0$: sea $x \in C-B$, pongamos $x \in X_i$; de $0 < \gamma_i \leq \beta_i < n_i$ resulta la existencia de $y \in (B-C)\cap X_i$; como xRy, tomando $C" = t_{xy}(C)$ se verifica $v" = card(C"-B) = v-1$, luego por inducción $C"$ r $C' \subset B$, para cierto C'. Como C r C", resulta C r C', y C s B.

<u>Nota</u>. Es fácil probar el siguiente recíproco: si la inversa de la biyección φ es morfismo de orden, el espacio (X,F) es completo.

Después de haber construído un primer modelo numérico isomorfo a $(\overline{P(X)}, \leq)$, pasaremos al segundo, el "retículo de modelos de coaliciones". Partiremos otra vez de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ naturales no nulos, n su suma.

En el producto N^n se considera el subconjunto $A = A(n_1, \ldots, n_k)$ formado por los $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tales que

1) cumplen $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq k$,

2) para cada $i=1,\ldots,k$, tienen valor i a lo sumo n_i componentes

Para cada $j=0,1,\ldots,n$, designaremos por A_j el subconjunto de los $a \in A$ que tienen exactamente j componentes no nulas.

Consideraremos A dotado de la ordenación usual $\leq$ de N^n.

<u>Proposición</u> III.2.2.- Si $A = A(n_1, \ldots, n_k)$, $\Lambda = \Lambda(n_1, \ldots, n_k)$, existe un isomorfismo de orden $\psi : (\Lambda, s) \longrightarrow (A, \leq)$, que transforma cada Λ_j en A_j.

<u>demostración</u>. Se define $\psi : \Lambda \longrightarrow A$, asignando a cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ el elemento

$$a = \psi(\alpha) = (0,\ldots,0,\underbrace{1,\ldots,1}_{\alpha_1},\underbrace{2,\ldots,2}_{\alpha_2},\ldots\ldots,\underbrace{k,\ldots,k}_{\alpha_k}),$$

y resulta obviamente de la definición que $\psi(\Lambda_j) = A_j$.

Se define también $\eta : A \longrightarrow \Lambda$, asignando a $a = (a_1, \ldots, a_n)$

$$\alpha = \eta(a) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$$

cuya componente α_i indica las veces que aparece i en a.

Se verifica que $\eta \circ \psi = id_\Lambda$, $\psi \circ \eta = id_A$; queda sólo por ver que ψ y η son morfismos de orden.

Sean $\alpha \, s \, \beta$, $a = \psi(\alpha)$, $b = \psi(\beta)$. Si $a_h = i > 0$, entonces $\alpha_i + \ldots + \alpha_k \geq n-h$; por ser $\alpha \, s \, \beta$, deducimos $\beta_i + \ldots + \beta_k \geq n-h$, y $b_h \geq i$. Esto demuestra que $a \leq b$.

Sean ahora $a \leq b$, $\alpha = \eta(a)$, $\beta = \eta(b)$. Por ser $\alpha_i+\ldots+\alpha_k$ el número de componentes de a no inferiores a i, resulta, de $a \leq b$, que $\alpha_i+\ldots+\alpha_k \leq \beta_i+\ldots+\beta_k$, para cada $i=1,\ldots,k$, por tanto α s β.

Establecida la cadena de isomorfismos entre $(\overline{P(X)}, \leq)$, (Λ, s) y $(A, \leq)$ como conjuntos ordenados, con sus correspondientes restricciones a los $\overline{P_j(X)}$, Λ_j y A_j, bastará estudiar las propiedades de $(A, \leq)$, que es el dotado de una relación de orden más operativa.

<u>Proposición</u> III.2.3.- A es un retículo distributivo, completo e isomorfo a un subretículo de la divisibilidad en los naturales; salvo en el caso trivial $n = 1$, A no es álgebra de Boole ni siquiera retículo complementado. Cada A_j es un subretículo de A.

<u>demostración</u>. Con la ordenación usual, N^n es un retículo donde el supremo y el ínfimo vienen dados por las siguientes fórmulas:

$c = a \vee b$ si y sólo si $c_i = \max(a_i, b_i)$, $i = 1,\ldots,n$,

$c = a \wedge b$ si y sólo si $c_i = \min(a_i, b_i)$, $i = 1,\ldots,n$.

Por tanto, si $a, b \in A$, resulta $a \vee b$, $a \wedge b \in A$, por lo que A es retículo. Por ser N^n distributivo, el subretículo A lo es también. Y aunque N^n no es completo, A lo es por ser finito.

Elegidos n números naturales primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la aplicación $\mathcal{E} : N^n \longrightarrow N$ dada por $\mathcal{E}(a) = p_1^{a_1} \ldots p_n^{a_n}$ es un isomorfismo del retículo $(N^n, \leq)$ en (no sobre) el retículo $(N, /)$ de la divisibilidad; restringiendo $\mathcal{E}$ a $(A, \leq)$ obtenemos un último isomorfismo de éste con un subretículo de $(N, /)$.

De las fórmulas del supremo y el ínfimo resulta que si $a \in A_j$, $b \in A_h$ (los A_j forman una partición de A) y es $j \leq h$, sale $a \vee b \in A_h$, $a \wedge b \in A_j$. Por tanto, si $n > 1$, existen $A_j \neq A_o, A_n$, de forma que salvo

$(0,\ldots,0) = \inf(A)$ y $(1,\ldots,1,\ldots,k,\ldots,k) = \sup(A)$ ningún otro elemento tiene complemento, por lo que A no puede ser retículo complementado.

Finalmente, de las fórmulas de supremo e ínfimo resulta inmediatamente que cada A_j es un retículo, subretículo de A.

Todas estas propiedades se traducen en seguida a $\overline{P(X)}$ si el espacio (X,F) es completo, via los isomorfismos precedentes.

Corolario. Si (X,F) es un espacio electoral completo, $(\overline{P(X)}, \leq)$ es un retículo, distributivo, completo e isomorfo a un subretículo de la divisibilidad en los naturales, pero no es complementado si $n > 1$.

Las estructuras (Λ, s) y $(A, \leq)$ correspondientes a los cardinales $n_1,\ldots,n_k$ de las clases de simetría de (X,F) son retículos isomorfos a $(\overline{P(X)}, \leq)$.

Cada $\overline{P_j(X)}$ es un subretículo de $\overline{P(X)}$, que en los isomorfismos corresponde a los subretículos Λ_j y A_j de Λ y A respectivamente.

demostración. Basta tener en cuenta las tres proposiciones anteriores y el hecho de que si dos conjuntos ordenados son isomorfos como tales y uno de ellos es retículo, entonces el otro también lo es, y ambos retículos son isomorfos (Szász [47] , teorema 9).

Definición III.2.2.- Llamaremos retículo asociado al espacio electoral completo (X,F) al retículo $(\overline{P(X)}, \leq)$ o a sus modelos isomorfos (Λ, s) o retículo de los índices, y $(A, \leq)$ retículo de los modelos de coaliciones.

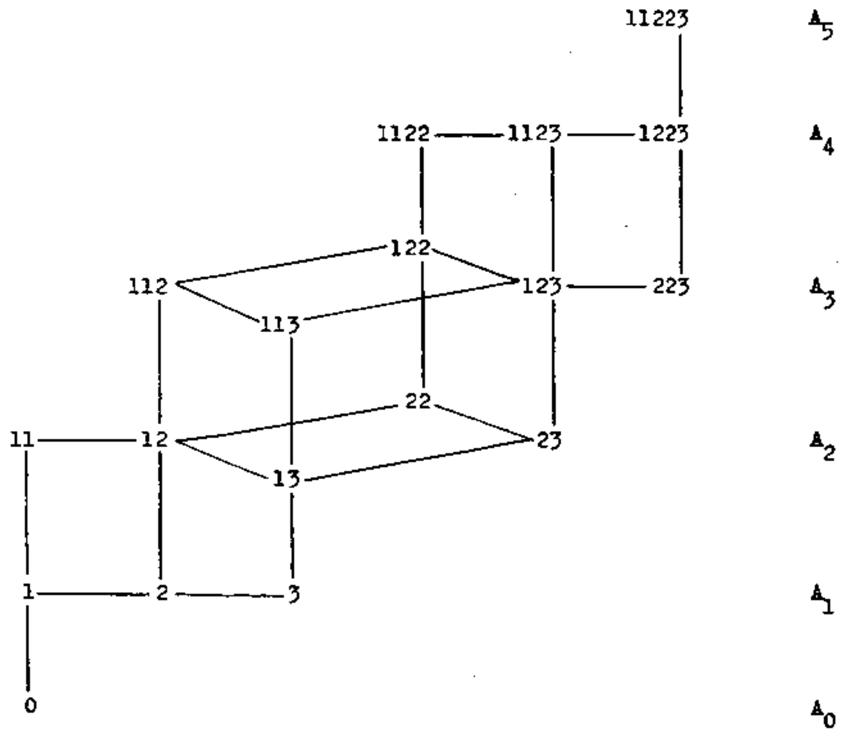
A espacios isomorfos corresponden retículos isomorfos, pero el recíproco es falso. Por ejemplo, para $X = \{a,b,c\}$ dotado del filtro de base $F_o = \{\{a,b\},\{a,c\}\}$, y $X' = \{a',b',c'\}$ con el de base $F'_o = \{\{a'\}\}$.

Terminaremos esta sección con un ejemplo de espacio electoral completo, que ilustrará la formación del retículo A y el nombre que se le ha dado, el de los "modelos de coaliciones".

Sea $X = \{a,b,c,d,e\}$, dotado del filtro F cuya base F_o consta de $\{a,b\}$ y $\{a,c\}$.

Las clases de simetría son $X_1 = \{d,e\}$, $X_2 = \{b,c\}$, $X_3 = \{a\}$, y la ordenación de $\overline{X}$ es $N = X_1 < X_2 < X_3 = V$.

La figura siguiente muestra un esquema del retículo A, en el que se destaca la partición en subretículos $\{A_o, A_1, \ldots, A_5\}$.



Esquema.- Se han suprimido los ceros iniciales, así como los paréntesis y comas, en aras de una mayor claridad.

Cada subretículo A_i se forma combinando de todas las maneras posibles i símbolos elegidos en este ejemplo entre 1,1,2,2,3.

Llamamos a A el retículo de los modelos de coaliciones porque cualquier coalición, es decir, todo subconjunto de X, queda representada por uno de tales modelos, atendiendo a sus índices. Se utiliza el mismo símbolo numérico para representar elementos R-relacionados. Cada $A \subset X$ queda representado por un modelo de A_i, $i = \text{card}(A)$, y $A, B \subset X$ corresponden a un mismo modelo si y sólo si A r B.

Se sobreentiende que el sentido creciente de la ordenación de A recorre los segmentos del diagrama de izquierda a derecha y de abajo arriba. Esta ordenación del retículo de modelos corresponde a la ordenación s de P(X).

F_0 pasa a ser un solo modelo, el 23, y F se convierte en todos los modelos situados por encima del 23 (inclusive). Las coaliciones perdedoras están representadas por todos los modelos del 112 hacia abajo, y las de bloqueo por los seis modelos intermedios restantes.

III.3.- CLASIFICACION DE ESPACIOS SIMPLES COMPLETOS.

Daremos aquí los invariantes numéricos fundamentales de cada espacio, junto con los correspondientes teoremas de existencia y de clasificación (unicidad salvo isomorfismos).

Introduciremos alguna nomenclatura adicional para citar con comodidad los distintos tipos de espacios.

Dado un espacio (X,F) designaremos por $N, X_1, X_2, \ldots, X_k, V$ sus clases de simetría -observando que k no tiene ahora exactamente el mismo significado que en la sección anterior-.

n y $n_N, n_1, n_2, \ldots, n_k, n_V$ designarán los cardinales de X y de las mencionadas clases de simetría.

<u>Definición</u> III.3.1.- Un espacio electoral (X,F) es simple si todas las $C \in F_o$ tienen un mismo cardinal p.

Estudiaremos primero los espacios simples más elementales.

<u>Definición</u> III.3.2.- Un espacio (X,F) es atómico si F_o consta de una sola coalición.

En otro caso diremos que el espacio es molecular.

La estructura de los espacios atómicos queda descrita por el

<u>Teorema</u> III.3.1.- a) (X,F) es atómico si y sólo si $k = 0$;

b) todo espacio atómico es simple, completo y con $V \neq \emptyset$;

c) dos espacios atómicos (X,F), (X',F') son isomorfos si y sólo si $n = n'$, $p = p'$ (n y p serán los invariantes del espacio);

d) dados n,p tales que $0 < p \leq n$, existe un espacio atómico con invariantes n,p.

demostración. a) Si (X,F) es atómico, sea $F_o = \{C\}$. Entonces $V = C$, $N = X-C$, $k = 0$. Recíprocamente, si $k = 0$, solamente existen las clases N, que puede ser vacía, y V, que no puede serlo. Si $C \in F_o$ debe ser $C = V$, por tanto el espacio es atómico.

b) Obviamente, todo espacio atómico es simple; por ser $k = 0$ es completo y con V no vacío; además, $n_V = p$.

c) Si existe un isomorfismo $f : X \longrightarrow X'$, tenemos $n = n'$, y al ser $f(V) = V'$, $p = p'$. Recíprocamente, si $n = n'$, $p = p'$, basta tomar una biyección $f : X \longrightarrow X'$ tal que $f(V) = V'$, y será un isomorfismo.

d) Sea $X = \{1,2,\ldots,n\}$, con $F_o = \{C\}$, $C = \{1,2,\ldots,p\}$. Este espacio (X,F) es atómico con invariantes n,p.

En particular, para $p = 1$ resulta el espacio dictatorial, mientras que para $p = n$ resulta el espacio de unanimidad.

Definición III.3.3.- Un espacio (X,F) es simétrico si F_o es un cierto $P_p(X)$, donde debe ser $p > n/2$.

El único espacio simétrico atómico es el de unanimidad.

Llamaremos asimétricos a los espacios no simétricos.

La estructura de los espacios simétricos se expone en el

Teorema III.3.2.- a) (X,F) es simétrico si y sólo si su grupo de automorfismos es $S(X)$;

b) todo espacio simétrico es simple, completo, con $N = \emptyset$, y (salvo el de unanimidad) molecular, con $V = \emptyset$, $k = 1$;

c) dos espacios simétricos (X,F), (X',F') son isomorfos si y sólo si $n = n'$, $p = p'$ (n y p serán los invariantes del espacio);

d) dados n,p tales que $n/2 < p \leq n$, existe un espacio (X,F) simétrico con dichos invariantes.

demostración. a) Si (X,F) es simétrico, sea $F_o = P_p(X)$. Para cada $\sigma \in S(X)$ se verifica $\sigma P_p(X) = P_p(X)$, luego $\sigma \in Aut(X,F)$. En cuanto al recíproco, si $Aut(X,F) = S(X)$, sea $C \in F_o$, $p = card(C)$. Al aplicar a C todas las $\sigma \in S(X)$ resulta $P_p(X) \subset F_o$; análogo razonamiento y la minimalidad de las coaliciones de F_o prueban que no existen $C' \in F_o$ tales que $card(C') \neq p$, por lo que $F_o = P_p(X)$.

b) Obviamente todo espacio simétrico es simple, y completo porque $\overline{X} = X/R$ consta solamente de una clase; por lo mismo $N = \emptyset$; si la clase fuera V estaríamos en el caso atómico de espacio de unanimidad; por tanto, si el espacio es molecular resulta $V = \emptyset$, $k = 1$.

c) Si existe un isomorfismo $f : X \longrightarrow X'$, tenemos $n = n'$, y si $C \in F_o$, $f(C) \in F'_o$, por tanto $p = p'$. Recíprocamente, si $n = n'$, $p = p'$, cualquier biyección $f : X \longrightarrow X'$ es un isomorfismo.

d) Sea $X = \{1,2,\dots,n\}$, con $F_o = P_p(X)$; la condición $p > n/2$ asegura la verificación del axioma $A_o.2$ de base de filtro, luego (X,F) es un espacio simétrico con invariantes n,p.

En particular, para el valor mínimo $p = E(n/2)+1$ obtenemos el espacio electoral de mayoría simple, y el máximo $p = n$ nos da el de unanimidad.

Los espacios simples no completos son moleculares, asimétricos y con $k \geq 2$, y no serán estudiados. De los restantes espacios simples, que son completos, moleculares y asimétricos, separaremos primeramente los pseudosimétricos, que tienen cierta similitud con los simétricos.

Definición III.3.4.- Un espacio (X,F) es pseudosimétrico si $k = 1$, $N \cup V \neq \emptyset$.

Su estructura se expone en el siguiente teorema.

Teorema III.3.3.- a) Todo espacio pseudosimétrico es simple, completo, molecular y asimétrico;

b) dos espacios pseudosimétricos (X,F), (X',F') son isomorfos si y sólo si $n = n'$, $p = p'$, $n_V = n'_V$, $n_1 = n'_1$ (n, p, n_V, n_1 serán los invariantes del espacio; $n_N = n-n_1-n_V$ es superfluo);

c) dados n, p, n_V, n_1 que satisfagan $n_V+n_1 \leq n$, $0 < n_1 < n$, $n_V < p < n_1+n_V$, así como $p > n_1/2$ si $n_V = 0$, existe un espacio pseudosimétrico (X,F) que tiene por invariantes los números dados.

demostración. a) Sea $C \in F_o$, $\mathrm{card}(C \cap X_1) = p-n_V$. Si existiera $C' \in F_o$ tal que $\mathrm{card}(C' \cap X_1) \neq p-n_V$, aplicando una adecuada permutación $\sigma \in S(X_1) \subset \mathrm{Aut}(X,F)$ se obtendría una relación de inclusión entre C y $\sigma(C')$, absurda al ser $\sigma(C') \in F_o$. Así que $\mathrm{card}(C) = p$ para toda $C \in F_o$, y el espacio es simple. Es completo y molecular por ser $k = 1$, así como asimétrico por ser $N \cup V$ no vacío.

b) Si existe un isomorfismo $f : X \longrightarrow X'$, tenemos $n = n'$. Por ser $f(V) = V'$, resulta $n_V = n'_V$, y de $f(N) = N'$ se obtiene $f(X_1) = X'_1$, de donde $n_1 = n'_1$. Por último, si $C \in F_o$ tenemos $f(C) \in F'_o$, luego $p = p'$. Recíprocamente, una biyección $f : X \longrightarrow X'$ tal que $f(V) = V'$, $f(X_1) = X'_1$ define un isomorfismo entre los dos espacios.

c) Sea $X = \{1,2,\ldots,n\}$, y pongamos $V = \{1,2,\ldots,n_V\}$, así como $X_1 = \{n_V+1, n_V+2, \ldots, n_V+n_1\}$, $N = X-V-X_1$. Consideremos también la familia $F_o = \{C \subset X \ / \ \mathrm{card}(C) = p,\ V \subset C,\ C-V \subset X_1\}$. La primera condición impuesta a los datos se utiliza para poder formar X. De la cuarta resulta el axioma $A_o.2$ de base de filtro, y $A_o.1$ sale de ser de cardinal p toda $C \in F_o$. Así que (X,F) es un espacio electoral simple. De la segunda condición sale que X_1 y $N \cup V$ no son vacíos, y de la tercera que no coinciden. Así, (X,F) es pseudosimétrico y de invariantes n, p, n_V y n_1.

Se incluye ahora el siguiente esquema para dar una visión global de los espacios simples, señalando los tipos ya estudiados y los pendientes de resolución: para éstos será necesario considerar el retículo asociado. En este cuadro los espacios de unanimidad se consideran atómicos, no simétricos.

$$\text{simples} \begin{cases} k=0, \text{ atómicos} \\ \\ k\neq 0, \text{ moleculares} \begin{cases} k=1 \begin{cases} N \cup V = \emptyset, \text{ simétricos} \\ N \cup V \neq \emptyset, \text{ pseudosimétricos} \end{cases} \\ \\ k\geq 2 \begin{cases} \text{completos} \begin{cases} \overline{F} \text{ ideal dual} \\ \overline{F} \text{ no ideal dual} \end{cases} \\ \text{no completos} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Los espacios pendientes son los moleculares, $k \geq 2$, completos. La distinción que se establece en ellos se debe a $\overline{F}$, que es la imagen del filtro F a través del paso al cociente de $P(X)$ a $\overline{P(X)}$.

Comenzaremos el estudio de estos espacios estableciendo un par de resultados generales auxiliares. Sea (X,F) un espacio electoral completo, $(\overline{P(X)}, \leq)$ el retículo asociado. Designaremos por $\overline{F}$ (resp. $\overline{F}_o$) la imagen del filtro F (resp. de la base F_o) al pasar de $P(X)$ a $\overline{P(X)}$.

<u>Lema</u> III.3.1.- a) $\overline{A} \in \overline{F}$ si y sólo si $\exists \overline{B} \in \overline{F}_o$ con $\overline{B} \leq \overline{A}$;

b) $\overline{F}$ es un filtro de orden, y sus minimales son los de $\overline{F}_o$;

d) si (X,F) es simple, entonces $\overline{F}_o = \overline{F} \cap \overline{P_p(X)}$.

<u>demostración</u>. a) Por su análoga en $P(X)$ para F y F_o, porque $B \subset A$ implica $B \leq A$, y $B \leq A$, $B \in F$ implican $A \in F$.

b) resulta de a), y c) de su análoga en $P(X)$ para F y F_o.

Lema III.3.2.- Sea (X,F) simple completo. Son equivalentes:

i) $\overline{F}$ tiene mínimo;

ii) $\overline{F}_o$ tiene mínimo;

iii) $\overline{F}_o$ es un ideal dual del retículo $\overline{P_p(X)}$;

iv) $\overline{F}$ es un ideal dual del retículo $\overline{P(X)}$.

Y entonces $\overline{F}$ y $\overline{F}_o$ son ideales principales generados por su mínimo común.

demostración. i) equivale a ii) por la parte b) del lema previo.

ii) implica iii) trivialmente.

iii) implica iv) por la parte a) del Lema III.3.1.

iv) implica i) porque la existencia de dos minimales en $\overline{F}$ va contra la propiedad del ideal dual $\overline{F}$ de ser cerrado para la intersección.

El resto del enunciado es inmediato.

Consideraremos en primer lugar los espacios simples moleculares con $k \geq 2$ completos en los cuales $\overline{F}$ sea ideal dual, designando por $\overline{M}$ el mínimo de $\overline{F}$ y $\overline{F}_o$ cuya existencia asegura el lema anterior.

Estableceremos tres resultados: condiciones que satisfacen los invariantes de tales espacios, teorema de existencia de espacios dados sus invariantes y teorema de clasificación por medio de los mismos.

Sea (X,F) uno de tales espacios y conservemos las notaciones expuestas al principio de la sección: $N, X_1, X_2, \dots, X_k, V$ serán las clases de simetría (aunque N y/o V pueden ser vacías); además, $n = \mathrm{card}(X)$, y el vector $n_R = (n_N, n_1, n_2, \dots, n_k, n_V)$ nos dará el cardinal de cada clase. p será el cardinal constante en F_o.

Del mínimo $\overline{M} \in \overline{F}_o = \overline{F} \cap \overline{P_p(X)} \subset \overline{P(X)}$, consideraremos sus índices

$$\varphi(\overline{M}) = h = (0, h_1, h_2, \dots, h_k, n_V) \in \Lambda_p \subset \Lambda,$$

así como su modelo

$$\psi(h) = z = (0, \dots, 0, z_{n-p+1}, \dots, z_n) \in A_p \subset A.$$

Por ser $p = h_1+h_2+\ldots+h_k+n_V$, $n = n_N+n_1+n_2+\ldots+n_k+n_V$, no serán considerados invariantes básicos ni p ni n_N.

La siguiente proposición expresa las condiciones que verifican los invariantes básicos. No han sido expuestas sus análogas para los anteriores tipos de espacios porque las condiciones a que estaban sujetos sus invariantes, aunque sí se han mencionado, eran evidentes.

El Teorema III.3.4, por su parte, análogo a los enunciados para los anteriores tipos de espacios, completa el estudio de los que ahora estudiamos, incluyendo la clasificación por medio de los invariantes descritos y la existencia de espacios con invariantes dados.

<u>Proposición</u> III.3.1.- Los números n; $n_1,\ldots,n_k,n_V$; $h_1,\ldots,h_k$ asociados al espacio en la forma expuesta anteriormente verifican:

1) $0 \leq n_V < n$;

2) $n_1+n_2+\ldots+n_k+n_V \leq n$;

3) $0 < h_i < n_i$, $i = 1,2,\ldots,k$;

4) $n_V = 0$ implica $\Sigma(h) = \frac{1}{2}\,\Sigma(n_R)$

(Σ es el operador descrito al principio de la sección III.2).

<u>demostración</u>. 1) y 2) son obvios, y se incluyen para que las condiciones expuestas sean también suficientes.

La demostración del punto 3) consta de varios pasos.

a) $h_1 > 0$: Elijamos $x \in X_1$, y también $C \in F_o$ con $x \in C$; si el modelo de $\overline{C}$ es $\psi\varphi(\overline{C}) = (a_1,\ldots,a_n)$ tendremos $a_1 = \ldots = a_{n-p} = 0$, $a_{n-p+1} = 1$; y por ser $\overline{M} \leq \overline{C}$, resulta $z_{n-p+1} = 1$, de donde $h_1 > 0$.

b) $h_k < n_k$: si fuese $h_k = n_k$, para cada $C \in F_o$ deduciríamos, de $\overline{M} \leq \overline{C}$, que el k-ésimo índice de $\overline{C}$ es n_k, lo que lleva a $X_k \subset C$, y al absurdo $X_k \subset V$.

c) $h_i > 0$, para $i \geq 2$: supongamos un $h_i = 0$. Elijamos $x \in X_i$. Para cada $C \in F_o$ designemos por $\varphi(\overline{C}) = (0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,n_V)$ sus índices y por $\psi\varphi(\overline{C}) = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ su modelo. Demostraremos que xSy para cada $y \in X_{i-1}$, con lo que llegaremos a contradicción. Basta probar que para cada $C \in F_o$ es $t_{xy}(C) \in F_o$ si $x \in C$. Además, es suficiente tratar el caso de C con $\alpha_{i-1} < n_{i-1}$, y suponer $y \notin C$. Pero de $\overline{M} \leq \overline{C}$ y de suponer $h_i = 0$, resulta $z_{n-p+\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1} \leq i-1$ en el modelo de $\overline{M}$, ya que $a_{n-p+\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1} = i$; por ello al aplicar la trasposición t_{xy} sale que todavía se verifica $\overline{M} \leq \overline{t_{xy}(C)}$, de donde $t_{xy}(C) \in F_o$.

d) $h_i < n_i$, para $i \leq k-1$: supongamos un $h_i = n_i$. Elijamos un $x \in X_{i+1}$. Para cada $C \in F_o$ designamos sus índices y su modelo como en el apartado c). Demostraremos que xSy para cada $y \in X_i$, con un razonamiento análogo al del apartado c) mutatis mutandis, y llegaremos a un absurdo.

Finalmente demostraremos el punto 4). Supongamos $V = \emptyset$. Razonaremos por reducción al absurdo. Si fuera $\Sigma(h) \leq \frac{1}{2}\ \Sigma(n_R)$, consideremos el vector $h' = n_R - h$ en Λ. Sea $M \subset X$ un representante del mínimo $\overline{M}$. La igualdad $h' + h = n_R$ asegura que h' es el vector de índices de $M' = X-M$, y para probar que M' es una coalición vencedora, que es el absurdo al que llegamos, basta obtener la desigualdad $\overline{M} \leq \overline{M}'$, y ésta resulta, al pasar al retículo Λ, del siguiente cálculo:

$$\Sigma(h') = \Sigma(n_R) - \Sigma(h) \geq 2\ \Sigma(h) - \Sigma(h) = \Sigma(h).$$

<u>Teorema</u> III.3.4.- a) Dos espacios (X,F), (X',F') del tipo considerado son isomorfos si y sólo si $n = n'$, $n_R = n'_R$, $h = h'$ (es decir, n, $n_R = (n_N,n_1,n_2,\ldots,n_k,n_V)$, $h = (0,h_1,h_2,\ldots,h_k,n_V)$ son los invariantes del espacio, pudiendo prescindir de n_N);

b) Dados números n; $n_1,n_2,\ldots,n_k,n_V$; $h_1,h_2,\ldots,h_k$ sujetos a las condiciones 1),2),3),4) de la Proposición III.3.1, existe un espacio del tipo considerado (simple, molecular, $k \geq 2$, completo, donde $\overline{F}$ es un ideal dual) que tiene por invariantes los números dados (y cabe añadir que $n_N = n - (n_1+n_2+\ldots+n_k+n_V)$, $p = h_1+h_2+\ldots+h_k+n_V$).

<u>demostración</u>. a) Si existe un isomorfismo $f : X \longrightarrow X'$ tenemos $n = n'$. Además, la igualdad $t_{f(x)f(y)} = f \circ t_{xy} \circ f^{-1}$ para cada $x,y \in X$ implica que f conserva las relaciones R y S entre los elementos, por lo que si $N, X_1, X_2, \ldots, X_k, V$ son las clases de X ordenadas de menor a mayor y $N', X_1', X_2', \ldots, X_{k'}', V'$ las de X' también ordenadas, debe ser $k = k'$, $f(N) = N'$, $f(X_i) = X_i'$ para $i=1,\ldots,k$, $f(V) = V'$, de donde $n_R = n_R'$. Finalmente, si $\overline{M}$ y $\overline{M}'$ son los respectivos mínimos de $\overline{F}$ y $\overline{F}'$, como f conserva S también respeta s, de donde $M \mathrel{s} f^{-1}(M')$, $M' \mathrel{s} f(M)$, por lo que $\overline{M}' = \overline{f(M)}$, y de aquí $h = h'$.

Recíprocamente, si $n = n'$, $n_R = n_R'$, $h = h'$, se define una aplicación $f : X \longrightarrow X'$ requiriendo solamente que sea biyectiva y verifique $f(N) = N'$, $f(X_i) = X_i'$ para $i=1,\ldots,k$, $f(V) = V'$. Si α es el vector de índices de $A \subset X$, para que $A \in F$ es necesario y suficiente $\Sigma(\alpha) \geq \Sigma(h)$ y algo análogo ocurre en X'. Puesto que f conserva los vectores de índices de cada $A \subset X$, f es morfismo, f^{-1} también por lo mismo y, en definitiva, f es un isomorfismo.

b) Dados los números $n, n_1, n_2, \ldots, n_k, n_V, h_1, h_2, \ldots, h_k$, definimos $n_N = n - (n_1+n_2+\ldots+n_k+n_V)$, así como los vectores $n_R = (n_N, n_1, \ldots, n_k, n_V)$ y $h = (0, h_1, \ldots, h_k, n_V)$. Sea $X = \{1,2,\ldots,n\}$ y designemos $N, X_1, \ldots, X_k, V$ los subconjuntos de X formados respectivamente por $n_N, n_1, \ldots, n_k, n_V$ elementos elegidos en este orden siguiendo el orden natural de los elementos de X. Para cada $A \subset X$ pondremos $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_\infty)$ indicando los cardinales de las intersecciones de A con $N, X_1, \ldots, X_k, V$ respectivamente, y definiremos la colección $F = \{A \subset X \mathrel{/} \Sigma(\alpha) \geq \Sigma(h)\}$.

Probaremos que (X,F) es un espacio electoral del tipo deseado que tiene por invariantes los números dados.

En primer lugar, F satisface los axiomas de filtro. Si $A,B \in F$ A y B se cortan: si V no es vacío, es cierto por ser $V \subset A$ si $A \in F$, ya que $\sum_\infty(\alpha) \geq \sum_\infty(h) = n_V$; si $V = \emptyset$, suponer $A \cap B = \emptyset$ implicaría, para sus respectivos vectores α, β, que $\alpha + \beta \leq n_R$, que nos llevaría a que $\sum(\alpha) + \sum(\beta) \leq \sum(n_R)$, y ello a $2\sum(h) \leq \sum(n_R)$, en contra de la condición 4) de la Proposición III.3.1. Si $A \in F$, $A \subset B$, entonces $B \in F$. En efecto: si α, β, son los vectores respectivos, $\sum(h) \leq \sum(\alpha) \leq \sum(\beta)$.

A continuación, llamando $p = h_1+h_2+\ldots+h_k+n_V$, comprobaremos que el espacio electoral (X,F) es simple de cardinal p. Si $A \in F_o$ tenemos $\mathrm{card}(A) = \sum_1(\alpha) \geq \sum_1(h) = p$. Probaremos, pues, que si $A \in F$ pero $\sum_1(\alpha) > p$, entonces $A \notin F_o$. Supongamos que se verifica $\sum_1(\alpha) > \sum_1(h)$, $\sum_2(\alpha) > \sum_2(h)$, ..., $\sum_i(\alpha) > \sum_i(h)$, $\sum_{i+1}(\alpha) = \sum_{i+1}(h)$. De ello se deduce que $\alpha_i > h_i$. Si se escoge un $B \subset X$ de vector β idéntico a α excepto por $\beta_i = \alpha_i - 1$, y de forma que $B \subset A$, resulta $\sum(\beta) \geq \sum(h)$, por lo que $B \in F$, de donde $A \notin F_o$.

En tercer lugar veremos que N es el conjunto de elementos nulos, V el de los vetos, $X_1,X_2,\ldots,X_k$ las restantes clases de simetría, y que el espacio es completo porque $X_1 < X_2 < \ldots < X_k$. Puesto que $k \geq 2$ por hipótesis resultará que el espacio es molecular y que sus invariantes n y n_R son los dados. Si $A \in F$, $A-N \in F$, porque la primera componente de h es 0. Luego cada $x \in N$ es nulo. Cada $A \in F$ contiene a V, luego cada $x \in V$ tiene veto. Sea ahora $x \notin N \cup V$; si $x \in X_i$, la condición 3) de los datos, $0 < h_i < n_i$, permite elegir $A \in F_o$ con $x \in A$, y también $B \in F_o$ con $x \notin B$, por tanto x no es nulo ni tiene veto. Si $x,y \in X_i$, entonces $t_{xy} \in \mathrm{Aut}(X,F)$, porque si $x \in A \in F_o$, $y \notin A$, también $t_{xy}(A) \in F_o$, pues tiene los mismos índices que A. Luego xRy. Si $x \in X_i$, $y \in X_{i+1}$, veremos que xSy. Sea $x \in A \in F_o$, $y \notin A$. El vector de índices β de $t_{xy}(A)$ coincide con el vector α de A excepto por $\beta_{i+1} = \alpha_{i+1} + 1$, $\beta_i = \alpha_i - 1$, por lo tanto $\sum(\beta) \geq \sum(\alpha) \geq \sum(h)$, así que $t_{xy}(A) \in F$. Falta comprobar que $y \not S x$, lo que completará la discusión de las clases de simetría. Por la condición 3) podemos escoger un $A \in F$ con índices $\alpha = (0,h_1,..,h_k,n_V)$ tal que $y \in A$, $x \notin A$. El vector de índices de $t_{yx}(A)$ es exactamente $\beta = (0,h_1,\dots,h_i+1,h_{i+1}-1,\dots,h_k,n_V)$, por tanto $\sum_{i+1}(\beta) < \sum_{i+1}(h)$, es decir, $t_{yx}(A) \notin F$.

Por último, la definición de F asegura inmediatamente que $\overline{F}$ es un ideal dual porque tiene mínimo, y que sus índices constituyen justamente el vector h, que era el tercer invariante dado.

Finalmente, trataremos de los espacios moleculares completos con $k \geq 2$, donde $\overline{F}$ y $\overline{F}_o$ no sean ideales duales, es decir (Lema III.3.2) no tengan mínimo. Estableceremos también los tres resultados: condiciones de los invariantes, teorema de clasificación y teorema de existencia. Aunque el proceso es similar al del tipo anterior de espacios, el mayor número de invariantes complica ahora un poco la notación.

Sea (X,F) uno de tales espacios, $N,X_1,X_2,\dots,X_k,V$ $(k \geq 2)$ las clases de simetría, n y $n_R = (n_N,n_1,n_2,\dots,n_k,n_V)$ los cardinales de X y las clases, con $n = \sum_1(n_R)$, y p el cardinal constante en F_o.

Sean $\overline{M}_1,\overline{M}_2,\dots,\overline{M}_t$ $(t \geq 2)$ los minimales de $\overline{F}$, que son también los de $\overline{F}_o = \overline{F} \cap \overline{P_p(X)} \subset \overline{P(X)}$.

A cada $\overline{M}_j$ se le asocia el vector de sus índices, designado por $h_j = (0,h_{j1},h_{j2},\dots,h_{jk},n_V)$, que podemos considerar la fila j de la siguiente matriz:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1k} & n_V \\ 0 & h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2k} & n_V \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & h_{t1} & h_{t2} & \dots & h_{tk} & n_V \end{bmatrix};$$

Proposición III.3.2.- El número n, el vector n_R y la matriz H asociados al espacio en la forma descrita anteriormente satisfacen:

0) $k \geq 3$;

1) $n_V < n$, $n_i > 0$, $i = 1,\dots,k$;

2) $n_N+n_1+n_2+\dots+n_k+n_V = n$;

3) $\sum_1(h_j) = p$ constante, $j = 1,\dots,t$;

4) $h_j \leq n_R$, $j = 1,\dots,t$;

5) para cada $i = 1,\dots,k$, existen $h_{ji} > 0$, $h_{\ell i} < n_i$;

6) $\Sigma(h_j)$ y $\Sigma(h_\ell)$ no son comparables si $j \neq \ell$;

7) para cada $i = 1,\dots,k$ existe j con $h_{ji} > 0$, $h_{ji-1} < n_{i-1}$;

8) si $n_V = 0$, entonces $\Sigma(h_j) + \Sigma(h_\ell) \nleq \Sigma(n_R)$, $\forall j,\ell$.

demostración. 0) Si $k = 2$ no puede haber dos minimales en $\overline{F}$, porque dos vectores del tipo $h = (0,h_1,h_2,n_V)$, $h' = (0,h_1',h_2',n_V)$ tales que $\sum_1(h) = p = \sum_1(h')$ siempre son comparables por s en Λ. Con esta propiedad destacamos que todo espacio simple completo con $k = 2$ debe ser del tipo anterior, donde $\overline{F}$ era ideal dual.

1) La primera parte es obvia por no ser simétrico el espacio, y la segunda por la propia definición de los n_i.

2) Por definición de las clases de simetría.

3) Por ser un espacio simple de cardinal constante p en F_o.

4) Por definición de los índices.

5) Supongamos en primer lugar que para cierta columna i de H

es $h_{ji} = 0$ para cada j. En tal caso todos los representantes de los minimales carecen de elementos de X_i. Llegaremos entonces a la contradicción de que si $x \in X_i$, $y \in X_{i-1}$, es xSy. En efecto, sea $x \in A \in F_o$, $y \notin A$. Para probar que $t_{xy}(A) \in F$ se considera el vector de índices de A, $\alpha = (\alpha_o,\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\alpha_\infty)$, donde $\alpha_{i-1} < n_{i-1}$. Si $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ es el modelo de A, $a_{n-p+\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1} = i$. Por ser $A \in F_o$ existe algún minimal $\overline{M}_j \leq \overline{A}$, por lo que en su modelo $z_j = (z_{j1},\ldots,z_{jn})$ encontraremos que es $z_{j,n-p+\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1} \leq i-1$. Al ser i-1 el correspondiente elemento del modelo de la clase de $t_{xy}(A)$, resulta $\overline{M}_j \leq \overline{t_{xy}(A)}$, $t_{xy}(A) \in F$, xSy.

Supongamos ahora que para cierta columna i de H es $h_{ji} = n_i$ para cada j. Entonces todos los representantes de los minimales contienen a X_i, y un razonamiento análogo al anterior lleva a la conclusión de que si $x \in X_{i+1}$, $y \in X_i$, es xSy, absurdo.

6) Expresa simplemente el hecho de que h_j y h_ℓ no son comparables porque corresponden a minimales distintos de $\overline{F}$.

7) En caso contrario a lo que se afirma, los vectores de índices de los minimales serían de uno de estos dos tipos, para cierto i:

$$(0,h_{j1},\ldots,h_{ji-1},\underset{\textstyle i}{\overset{\textstyle \underline{i}}{0}},h_{ji+1},\ldots,h_{jk},n_V),$$

$$\text{o}\quad (0,h_{j1},\ldots,n_{i-1},h_{ji},h_{ji+1},\ldots,h_{jk},n_V),$$

-para i=1 se sobreentiende $n_{i-1} = n_N$, $h_{ji-1} = 0$; en la demostración del punto 5) hemos sobreentendido, análogamente, $X_{i-1} = N$ para i=1 -. Vamos a ver que tomando $x \in X_i$, $y \in X_{i-1}$ resultaría xSy, absurdo. En efecto, si $x \in A \in F_o$, $y \notin A$, para probar que $t_{xy}(A) \in F$ notemos que en el vector de índices α de A tenemos $\alpha_{i-1} < n_{i-1}$, $\alpha_i > 0$. El vector de índices de $t_{xy}(A)$ será $(0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}+1,\alpha_i-1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_k,n_V)$, y de dicha expresión se observa que si el vector de A era superior a un minimal del primer tipo éste también lo es, mientras que si α era superior a uno del segundo tipo, llamémosle h_j, de las condiciones $\Sigma_i(\alpha) \geq \Sigma_i(h_j)$, $\Sigma_{i-1}(\alpha) \geq \Sigma_{i-1}(h_j)$, y de $\alpha_{i-1} < n_{i-1}$, resulta $\Sigma_i(\alpha) > \Sigma_i(h_j)$, por lo que $\varphi(\overline{t_{xy}(A)})$ también es superior a h_j, y por tanto $t_{xy}(A) \in F$.

8) Si fuera $n_V = 0$ y tuviéramos $\Sigma(h_j) + \Sigma(h_\ell) \leq \Sigma(n_R)$ para cierto par j, ℓ, consideremos $h' = n_R - h_j$ en Λ. Si $M_j \subset X$ es un representante del minimal de vector h_j, la definición de h' indica que éste es el vector de índices del complementario $M' = X - M_j$, y para probar que M' es una coalición vencedora -absurdo al que queremos llegar- basta observar que $\Sigma(h') = \Sigma(n_R) - \Sigma(h_j) \geq \Sigma(h_\ell)$.

<u>Teorema</u> III.3.5.- a) Dos espacios (X,F), (X',F') del tipo considerado son isomorfos si y sólo si $n = n'$, $n_R = n'_R$, $H = H'$ (salvo el orden de las filas): los invariantes del espacio son n, n_R y H;

b) Dados n, n_R, H sujetos a las condiciones 0),1),...,8) de la Proposición III.3.2, existe un espacio del tipo considerado (simple, molecular, $k \geq 2$, completo, donde $\overline{F}$ no es ideal dual) cuyos invariantes son n, n_R y H.

<u>demostración</u>. a) Si existe un isomorfismo $f : X \longrightarrow X'$ tenemos $n = n'$, ycomo en el Teorema III.3.4, $n_R = n'_R$. Sean ahora $\overline{M}_1,\dots,\overline{M}_t$ los minimales de $\overline{F}$, y $\overline{M}'_1,\dots,\overline{M}'_u$ los minimales de $\overline{F}'$. Al conservar f y f^{-1} la relación S también conservan s, por tanto transforman minimales en minimales, $t = u$, y, salvo orden de las filas, $H = H'$.

Recíprocamente, si $n = n'$, $n_R = n'_R$, $H = H'$ (salvo orden), basta tomar una aplicación biyectiva $f : X \longrightarrow X'$ que cumpla $f(N) = N'$, $f(X_i) = X'_i$, $i = 1,\dots,k$, $f(V) = V'$. Puesto que f y f^{-1} conservan los índices transforman minimales en minimales, por tanto son morfismos y f es isomorfismo.

b) Dados n, n_R y H consideremos $X = \{1,2,\dots,n\}$, y designemos por $N, X_1, X_2, \dots, X_k, V$ los subconjuntos de X formados respectivamente por $n_N, n_1, n_2, \dots, n_k, n_V$ elementos elegidos en este orden siguiendo la serie natural de los elementos de X. Para cada $A \subset X$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_\infty)$ tendrá el mismo significado que en la parte b) del Teorema III.3.4. Definimos $F = \{A \subset X \,/\, \sum(\alpha) \geq \sum(h_j)$ para algún $j\}$. Probaremos que (X,F) es un espacio electoral del tipo propuesto que tiene los invariantes dados.

En primer lugar, F satisface los axiomas de filtro. Si $A,B \in F$, se cortan: si V no es vacío, porque $V \subset A$ para cada $A \in F$; si no hay vetos, porque de $A \cap B = \emptyset$ llegaríamos, como en el teorema anterior, a una contradicción, en este caso con la condición 8) de la Prop. III.3.2.

Si $A \in F$, $A \subset B$, entonces $B \in F$, como en el Teorema III.3.4.

Sea p el número dado por la condición 3) de la Prop. III.3.2. Por un camino análogo al del teorema anterior se prueba que (X,F) es un espacio simple de cardinal constante p.

El siguiente punto es probar que N es el conjunto de elementos nulos, V el de los vetos, y $X_1, X_2, \dots, X_k$ las demás clases de simetría, así como establecer la cadena $X_1 < X_2 < \dots < X_k$, lo que probará que el espacio es completo; como $k \geq 2$ por hipótesis (de hecho $k \geq 3$), resulta que el espacio es molecular y que sus invariantes n y n_R son los dados. Como en el teorema anterior, es obvio que los elementos de N son nulos y los de V tienen veto. Sea $x \notin N \cup V$: la condición 5) de los datos permite elegir $A \in F_0$ con $x \in A$, y también $B \in F_0$ con $x \notin B$, por lo que x no es nulo ni tiene veto. Tampoco ofrece novedad la prueba de que si $x,y \in X_i$ es xRy, ni la de que si $x \in X_i$, $y \in X_{i+1}$, es xSy. Sí detallaremos la comprobación de que $y \not S x$: por 7) existe un $A = M_j$ tal que $y \in M_j$, $x \notin M_j$. El vector de índices de $t_{xy}(M_j)$ es el siguiente:

$h' = (0,h_{j1},\ldots,h_{ji}+1,h_{ji+1}-1,\ldots,h_{jk},n_V)$. Y por ser $\sum(h') < \sum(h_j)$, la condición 6) impide cualquier otra $\sum(h_\ell) \leq \sum(h')$, por lo tanto $t_{xy}(M_j) \notin F$, es decir, $y \not\leq x$.

Por último, la definición de F asegura que $\overline{F}$ no es un ideal dual sino que tiene t minimales, cuyos vectores de índices son precisamente las filas de la matriz H, que era el tercer invariante dado.

Hemos esquematizado solamente la demostración de este teorema, porque las ideas esenciales contenidas en la misma ya han sido expuestas con detalle en la del Teorema III.3.4.

<u>Ejemplo</u>. Tomemos como invariantes $n = 10$, $n_R = (0,2,4,3,1)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Resulta, pues, $k = 3$, $t = 2$, $n_V = 1$, $n_N = 0$, y se comprueban inmediatamente las condiciones de la Prop. III.3.2. Tenemos:

$\sum(H) = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\sum(n_R) = (10,10,8,4,1)$, $p = 7$.

Tomando como soporte $X = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$, estos elementos se clasifican según R en

$$X_1 = \{a,b\}, \quad X_2 = \{c,d,e,f\}, \quad X_3 = \{g,h,i\}, \quad V = \{j\}.$$

En el retículo de modelos A los minimales son:

$(1,2,2,2,3,3,4)$, que corresponde a 24 minimales en X, y

$(1,1,2,3,3,3,4)$, que corresponde a 4 minimales en X.

Estos dos minimales pertenecen a A_7, isomorfo a $\overline{P_7(X)}$, donde está $\overline{F}_0$.

Con este ejemplo intentamos poner de manifiesto que las condiciones enunciadas en la Proposición III.3.2 son manejables.

Para cerrar esta sección daremos una visión de tipo deductivo que complemente el proceso inductivo seguido en la clasificación.

En definitiva, todos los espacios simples completos quedan caracterizados por un vector $n_R = (n_N, n_1, n_2, \dots, n_k, n_V)$ y una matriz $H = (h_{ji})$ -salvo orden de sus filas-, sujetos a las condiciones de la Proposición III.3.2 que, convenientemente particularizadas, son válidas para todos estos espacios. En todos ellos es $n = d(n_R)$, $p = d(h_j)$ para cada j, y n_V está repetido en n_R y todas las filas de H.

Si la matriz tiene más de una fila $\overline{F}$ no es ideal dual.

Si tiene una sola entonces $\overline{F}$ es ideal dual (lo que incluye a los atómicos, simétricos y pseudosimétricos). En este caso:

si $k \geq 2$ tenemos el tipo de espacios del Teorema III.3.4;

si $k \leq 1$ estamos en uno de los tres tipos iniciales, es decir:

atómicos: $n_R = (n_N, n_V)$, $h = (0, n_V)$, $k = 0$;

simétricos: $n_R = (0, n_1, 0)$, $h = (0, h_1, 0)$, $k = 1$, $V = N = \emptyset$; o bien

pseudosimétricos: $n_R = (n_N, n_1, n_V)$, $h = (0, h_1, n_V)$, $k = 1$, $V \cup N \neq \emptyset$, habiendo excluído el espacio de unanimidad de los simétricos.

En estos tres últimos casos $\overline{F}_o$ consta de un sólo elemento $\overline{M}$, que aparte de mínimo de $\overline{F}$ es también máximo de $\overline{P_p(X)}$. Además, para los simétricos, $\overline{P_p(X)} = \overline{F}_o = \{\overline{M}\}$.

En los atómicos $\overline{F}$ es una cadena vertical y $\overline{P_p(X)}$ una horizontal. En los simétricos $\overline{F}$ es una cadena vertical porque todo $\overline{P(X)}$ lo es, y cada $\overline{P_j(X)}$ se reduce a un elemento.

IV

CONJUNTOS DECISORIOS

En la sección I.1 se han descrito los conjuntos decisorios y su funcionamiento, extrayendo el concepto de coalición vencedora cuyas propiedades constituyen los axiomas de espacio electoral.

En este capítulo profundizamos en el estudio de los conjuntos decisorios mediante la teoría de los espacios electorales. La cuestión principal es si así como a cada conjunto decisorio asociamos un espacio electoral es cierto el recíproco, es decir, todo espacio electoral es realizable mediante un conjunto decisorio. En la tercera sección del capítulo se resuelve esta cuestión para los espacios no completos y los espacios simples donde $\overline{F}$ es ideal dual.

Previamente, en la primera sección establecemos el proceso de asociación como un functor. En la segunda sección daremos resultados generales acerca de la realización de espacios, especialmente dos simplificaciones del problema: la densidad y la normalización.

En sentido amplio, todo espacio electoral es "realizable" obviamente, pero no queremos ignorar los usos imperantes en las estructuras sociales, como reparto de votos, vetos, etc. Ello condiciona sin duda la realización. Y a otro nivel, es presumible que alguna variación en la definición de conjunto decisorio -en particular sobre la condición de elección única- modificaría la clase de espacios realizables. Por supuesto, aquí conservaremos el significado de los términos como se han dado desde el principio, y ello relativiza nuestros resultados.

IV.1.- ESPACIO ELECTORAL ASOCIADO.

Sea (X,V_e,v,d) un conjunto decisorio. Por la Prop. I.1.2, la familia $F = \{A \subset X \;/\; V_e \subset A,\ v(A) \geq d\}$ es un filtro electoral en X.

Definición IV.1.1.- (X,F) es el espacio electoral asociado al conjunto decisorio (X,V_e,v,d).

En lo sucesivo adjetivaremos a los conjuntos decisorios según las características del espacio electoral asociado: hablaremos, pues, de conjuntos decisorios simples, completos, simétricos, etc.

Es fácil ver que la base del filtro F es la familia dada por $F_o = \{A \in F \;/\; \forall x \in A-V_e,\ v(A)-v(x) < d\}$. Asimismo se ve que $V_e \subset V$, pero en general no coinciden. Una discusión sobre las distintas clases de veto se llevará a cabo en la sección IV.2.

El proceso de asociación lleva a decir que dos conjuntos decisorios son equivalentes si tienen el mismo espacio electoral asociado.

Definición IV.1.2.- Sean (X,V_e,v,d), (X',V'_e,v',d') conjuntos decisorios tales que $d \geq d'$. Una aplicación $f : X \longrightarrow X'$ diremos que es un morfismo de conjuntos decisorios si verifica que $f(V_e) \supset V'_e$, y que $v'(x') \geq v(f^{-1}(x'))$, para cada $x' \in X'$.

Puesto que la identidad es un morfismo y la composición de dos morfismos también lo es, queda definida una categoría $\mathcal{C}$ cuyos objetos son los conjuntos decisorios y cuyos morfismos son los descritos.

Es inmediato comprobar que son equivalentes:

i) f es un isomorfismo;

ii) f es biyectiva, $d = d'$, f y f^{-1} son morfismos;

iii) f es biyectiva, $d = d'$, $v' \circ f = v$, $f(V_e) = V'_e$.

Proposición IV.1.1.- La regla que asigna a cada conjunto decisorio (X,V_e,v,d) el espacio electoral asociado (X,F), y a cada morfismo $f : (X,V_e,v,d) \rightarrow (X',V'_e,v',d')$ el correspondiente $f : (X,F) \rightarrow (X',F')$, es un functor covariante fiel $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{E}$. Por tanto, dos conjuntos decisorios isomorfos son equivalentes.

Además, $\mathrm{Aut}(X,V_e,v,d) = \{f \in \mathrm{Aut}(X,F) \;/\; v \circ f = v,\ f(V_e) = V_e\}$.

demostración. La primera cuestión es que si f es morfismo en $\mathcal{Z}$ $f = \mathcal{F}(f)$ lo es en $\mathcal{E}$. En efecto: si $A \in F$, tenemos $V_e \subset A$, $v(A) \geq d$. Deducimos que $f(A) \in F'$ al considerar que $f(A) \supset f(V_e) \supset V'_e$, y que

$$v'(f(A)) \geq v(f^{-1}(f(A))) \geq v(A) \geq d \geq d'.$$

De la definición de $\mathcal{F}$ resulta $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$, $\mathcal{F}(id) = id$, así que $\mathcal{F}$ es un functor covariante, y conjuntos decisorios isomorfos son equivalentes. $\mathcal{F}$ es fiel porque $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$ implica $f = g$. Por ello, el grupo de automorfismos de un conjunto decisorio es un subgrupo del grupo de automorfismos del espacio electoral asociado; su caracterización es una adaptación inmediata de la condición iii) dada en la Def. IV.1.2.

Terminamos esta sección con las ideas de subconjunto decisorio y conjunto decisorio cociente.

Sea (X,V_e,v,d) un conjunto decisorio. Sea $Y \subset X$ tal que $V_e \subset Y$, $v(Y) \geq d$. Llamando v_Y a la restricción de v a Y es inmediato comprobar que (Y,V_e,v_Y,d) es un conjunto decisorio.

Definición IV.1.3.- Diremos que (Y,V_e,v_Y,d) es un subconjunto decisorio de (X,V_e,v,d).

La inclusión $i : Y \longrightarrow X$ es un morfismo de conjuntos decisorios.

Por otra parte, el espacio electoral asociado al subconjunto decisorio (Y, V_e, v_Y, d) es precisamente el subespacio electoral (Y, F_Y) de (X, F), observando que $Y \in F$.

Ampliando el comentario de la Def. I.2.2, Y tiene suficiente capacidad decisoria en el sentido de que toda decisión adoptada en Y tiene asegurada su aprobación en X, suponiendo naturalmente que los elementos de Y mantengan sus votos. Esto puede agilizar un proceso de votación (ignorando ausencias, creando comisiones, etc.). La restricción de que $Y \in F$ no parece excesiva, pues no siendo necesariamente minimal Y no se exige unanimidad de sus miembros para aprobar una medida.

Sea ahora R una relación de equivalencia en X, sea $\overline{X} = X/R$, y sea $\pi : X \longrightarrow \overline{X}$ el paso al cociente. Poniendo $\overline{V}_e = \pi(V_e)$, y definiendo $\overline{v} : \overline{X} \longrightarrow N$ mediante $\overline{v}(\overline{x}) = v(\pi^{-1}(\overline{x}))$, es inmediato comprobar que se obtiene un conjunto decisorio $(\overline{X}, \overline{V}_e, \overline{v}, d)$.

<u>Definición</u> IV.1.4.- Diremos que $(\overline{X}, \overline{V}_e, \overline{v}, d)$ es el conjunto decisorio cociente de (X, V_e, v, d) por la relación de equivalencia R.

El paso al cociente es un morfismo de conjuntos decisorios.

El espacio electoral asociado al conjunto decisorio cociente $(\overline{X}, \overline{V}_e, \overline{v}, d)$ es justamente el espacio $(\overline{X}, \overline{F})$ cociente de (X, F) por R.

Recordando el comentario de la Def. I.2.4, el conjunto decisorio cociente describe la situación resultante tras la formación de pactos (las clases de R), cuyo conocimiento simplifica el proceso al disminuir el número de elementos, aunque aumente el número de votos controlados por cada uno de ellos.

IV.2.- ESPACIOS ELECTORALES REALIZABLES.

El estudio de los espacios realizables puede reducirse a los espacios densos. Además basta considerar realizaciones normalizadas. La normalización influye en el grupo de automorfismos y relaciona el reparto de votos con ciertas valoraciones del retículo asociado.

<u>Definición</u> IV.2.1.- Un espacio electoral (X,F) es realizable si está asociado por el functor $\mathcal{F}$ a algún conjunto decisorio, del que diremos que realiza el espacio.

<u>Proposición</u> IV.2.1.- a) Todos los subespacios y cocientes de un espacio realizable lo son también.

b) Si un subespacio denso es realizable, el espacio también.

<u>demostración</u>. a) Sea (X,V_e,v,d) una realización de (X,F). Si $Y \in F$, el subconjunto decisorio (Y,V_e,v_Y,d) realiza el subespacio (Y,F_Y); análogamente, si R es una relación de equivalencia en X, el conjunto decisorio cociente $(\overline{X},\overline{V}_e,\overline{v},d)$ realiza el espacio cociente $(\overline{X},\overline{F})$.

b) Sea (Y,F_Y) un subespacio denso y realizable de (X,F), y sea (Y,V_e,v,d) una realización del mismo. Extendiendo el reparto v a X por $v(x) = 0$ para $x \notin Y$, (X,V_e,v,d) es un conjunto decisorio que realiza (X,F) por ser denso (Y,F_Y).

Al considerar en cada espacio (X,F) el subespacio denso mínimo $(X-N,F_{X-N})$, resulta de la proposición anterior que el problema de averiguar los espacios realizables puede limitarse a la subcategoría plena de los espacios densos, es decir, aquéllos donde $N = \emptyset$.

Sea (X,V_e,v,d) un conjunto decisorio, R la relación de simetría en el espacio asociado (X,F). Si $x,y \in X-V_e$, $v(x) = v(y)$ implica xRy, pero ello no es cierto si x, y o ambos están en V_e, ni tampoco es cierto el recíproco, esto es, que xRy implique $v(x) = v(y)$ si $x,y \in X$.

<u>Definición</u> IV.2.2.- Un conjunto decisorio (X,V_e,v,d) está normalizado si $v(x) = v(y)$ equivale a xRy para todo par $x,y \in X$.

La normalización no depende, pues, tan sólo de v, sino de V_e, e incluso de la clase de simetría V. Desde el principio hemos llamado a los elementos de V_e miembros con veto explícito: el adjetivo indica que la posesión de veto de tales elementos está dada por las condiciones del conjunto decisorio. Pero la inclusión $V_e \subset V$ puede ser estricta, por lo que, para distinguir, a los eventuales elementos de $V-V_e$ les llamaremos elementos con veto implícito, condición que les viene dada por el número de votos que controlan.

Daremos a continuación algunos métodos de transformación de conjuntos decisorios en otros equivalentes, variando V_e, v o d. Tratamos de obtener una forma conveniente a partir de un conjunto decisorio sin salir de su clase de equivalencia módulo $\mathcal{F}$. Exactamente demostraremos que todo conjunto decisorio es equivalente a uno normalizado.

<u>Lema</u> IV.2.1.- (Eliminación de vetos implícitos). Todo conjunto decisorio (X,V_e,v,d) es equivalente a (X,V,v,d), siendo V el conjunto de los elementos con veto del espacio asociado (X,F).

<u>demostración</u>. Es inmediato comprobar que (X,F) es también el espacio asociado a (X,V,v,d).

Lema IV.2.2.- (Eliminación de vetos explícitos). Todo conjunto decisorio (X,V_e,v,d) es equivalente a uno de la forma $(X,\emptyset,v',d')$.

demostración. Sea (X,F) el espacio asociado a (X,V_e,v,d). Sea $h = \mathrm{card}(V_e)$ y tomemos un número natural

$$a > \max \left\{ v(X)-d,\ \frac{v(X)+v(V_e)-2d}{h} \right\}.$$

Tomaremos $d' = d + ah - v(V_e)$, y definiremos $v' : X \longrightarrow N$ como sigue:

$$v'(x) = \begin{cases} v(x), & \text{si } x \notin V_e, \\ a, & \text{si } x \in V_e. \end{cases}$$

Debemos probar primero que $(X,\emptyset,v',d')$ es un conjunto decisorio, o sea que $d' > T'/2$, siendo $T' = v'(X)$. En efecto:

$$T' = v'(X) = v'(X-V_e) + v'(V_e) = v(X-V_e) + ah,$$

y simplificando la desigualdad que hay que demostrar, $2d' > T'$, queda

$$2d + 2ah - 2v(V_e) > v(X) - v(V_e) + ah,$$

$$ah + 2d - v(V_e) > v(X),$$

$$ah > v(X) + v(V_e) - 2d,$$

que resulta de una de las condiciones exigidas al número a.

Por último veamos que (X,F) es el espacio asociado al conjunto decisorio $(X,\emptyset,v',d')$. Si $A \in F$, por ser $A \supset V_e$, $v(A) \geq d$ tendremos $v'(A) = v'(A-V_e) + v'(V_e) = v(A-V_e) + ah \geq d - v(V_e) + ah = d'$. Recíprocamente, sea $v'(A) \geq d'$. Debe ser $V_e \subset A$, o eligiendo $x \in V_e-A$ deduciríamos $v'(A) \leq v'(X-\{x\}) = v'(X-V_e) + v'(V_e-\{x\}) =$
$= v(X) - v(V_e) + (h-1)a < a + d - v(V_e) + (h-1)a = d'$, absurdo. Finalmente, por ser $d' \leq v'(A) = v(A-V_e) + ah$, resulta, teniendo presente la definición de d', $v(A-V_e) \geq d - v(V_e)$, de donde se obtiene la desigualdad $v(A) \geq d$, que prueba que $A \in F$, visto ya que $V_e \subset A$.

Lema IV.2.3.- (Simplificación de factores). Todo conjunto decisorio (X, V_e, v, d) es equivalente a (X, V_e, tv, td), supuesto t un número racional no nulo tal que $td \in N$ y tv tome sólo valores naturales.

demostración. Inmediata. Utilizaremos este lema al demostrar la Proposición IV.2.2.

Un conjunto decisorio será t-irreducible si no existe $t < 1$ al que aplicar el presente lema.

Lema IV.2.4.- Todo conjunto decisorio (X, V_e, v, d) es equivalente a un (X, V_e, v', d_o) que verifica

$$v'(x) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x \in V_e \cup N,$$

$$d_o = \min_{A \in F_o} v'(A) = \min_{A \in F} v'(A).$$

En particular, a) para un conjunto decisorio denso sin vetos implícitos (X, V, v, d) podremos suponer, salvo equivalencias, $v(x) = 0$ si y sólo si $x \in V$, así como $d = \min_{A \in F} v(A)$;

b) para un conjunto decisorio sin vetos explícitos $(X, \emptyset, v, d)$ podremos suponer, salvo equivalencias, $v(x) = 0$ si y sólo si $x \in N$, $d = \min_{A \in F} v(A)$.

demostración. Sea (X, F) el espacio asociado al conjunto decisorio dado; tomemos $d' = d - v(V_e)$, y definamos $v' : X \longrightarrow N$ como sigue:

$$v'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in V_e \cup N; \\ v(x), & \text{si} \quad x \notin V_e \cup N. \end{cases}$$

En primer lugar, $T' = v'(X) = T - v(V_e \cup N)$, por tanto, si es V_e vacío, $2d' = 2d > T = T' + v(N) \geq T'$, así que (X, V_e, v', d') es un conjunto decisorio; para probar que es equivalente al dado, sea F' el filtro asociado y comprobemos que $F' = F$.

Si $A \in F_o$, al ser $A \cap N = \emptyset$, $v'(A) = v(A-V_e) \geq d - v(V_e) = d'$, luego $A \in F'$, por lo que $F \subset F'$. Recíprocamente, si $A \in F'$ vemos que $A \in F$ de $v(A) = v(A-V_e-N) + v(V_e) + v(A \cap N) \geq v'(A-V_e-N) + v(V_e) \geq d$.

Por último, tomando $d_o = \min_{A \in F_o} v'(A)$, es inmediato comprobar que (X,V_e,v',d_o) es un conjunto decisorio equivalente al construído en la demostración y, por tanto, al dado inicialmente.

<u>Proposición</u> IV.2.2.- (Normalización). Dado un conjunto decisorio (X,V_e,v,d),

a) existe uno equivalente (X,V_e',v',d_o') tal que

- no tiene vetos explícitos: $V_e' = \emptyset$,
- verifica $v'(x) = 0$ si y sólo si $x \in N$,
- está normalizado,
- es t-irreducible,
- verifica que $d_o' = \min_{A \in F} v'(A)$;

b) si el conjunto dado es denso, existe también otro conjunto decisorio equivalente (X,V_e'',v'',d_o'') tal que

- no tiene vetos implícitos: $V_e'' = V$,
- verifica $v''(x) = 0$ si y sólo si $x \in V$,
- está normalizado,
- es t-irreducible,
- verifica que $d_o'' = \min_{A \in F} v''(A)$.

<u>demostración</u>. Se trata de un razonamiento bastante extenso, a lo largo del cual utilizaremos los cuatro lemas previos. Sin embargo, las dos partes tienen mucho en común y entraremos en detalles sólo en a).

a) Por el Lema IV.2.2 se puede suponer $V_e = \emptyset$, mientras que por el Lema IV.2.4 supondremos también $v(x) = 0$ si y sólo si $x \in N$. Por no haber vetos explícitos tenemos $v(x) > 0$ para cada $x \in X-N$.

A partir de este punto aplicaremos un proceso de modificación de v que proporcionará un conjunto decisorio equivalente normalizado. El proceso se efectuará dentro de cada clase de simetría excepto N, y en él aplicaremos eventualmente el Lema IV.2.3, por lo que no se alterarán las dos condiciones inicialmente supuestas, que son parte de las exigidas al conjunto decisorio cuya existencia pretendemos probar.

Sean xRy, $x,y \in X-N$, y supongamos $v(y) \geq v(x)+2$. Se define v' por $v'(x) = v(x)+1$, $v'(y) = v(y)-1$, $v'(z) = v(z)$ si $z \neq x,y$.

Se obtiene así un conjunto decisorio $(X,V_e=\emptyset,v',d)$ en el cual $v'(y)-v'(x) = v(y)-v(x)-2$. Veremos que es equivalente al $(X,V_e=\emptyset,v,d)$ de partida. Sea F' el filtro asociado a v' en X. Si $A \in F$, tanto si contiene a x e y como si no contiene a ninguno, $v'(A) = v(A)$, $A \in F'$. Si sólo está x, $v'(A) = v(A)+1 > d$, luego $A \in F'$. Si sólo y está en A, por ser xRy se tiene $d \leq v(t_{xy}(A)) < v(A)$, luego $v'(A) = v(A)-1 \geq d$, así que $A \in F'$. En definitiva, $F \subset F'$.

Si $A \in F'$, el único caso interesante es si $x \in A$, $y \notin A$, en el cual $v(A) = v'(A)-1 \geq d-1$, $v(t_{xy}(A)) = v(A)+2 \geq d+1$, $t_{xy}(A) \in F$, y por tanto $A = t_{xy}^2(A) \in F$. Concluímos así que $F' \subset F$, y que $F' = F$.

Sea $X' = \{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ una clase de simetría de X. Aplicando reiteradamente el proceso anterior se puede suponer que en $(X,\emptyset,v,d)$

$$v(x_1) = v(x_2) = \ldots = v(x_i) = r,$$

$$v(x_{i+1}) = v(x_{i+2}) = \ldots = v(x_{i+j}) = r+1, \text{ siendo } j = m-i.$$

Multiplicando v y d por m y aplicando el Lema IV.2.3 supondremos que

$$v(x_1) = \dots = v(x_i) = mr,$$

$$v(x_{i+1}) = \dots = v(x_{i+j}) = mr+m.$$

Se considera ahora v', definida como v fuera de X', y en esta clase por

$$v'(x_1) = \dots = v'(x_i) = mr+j,$$

$$v'(x_{i+1}) = \dots = v'(x_{i+j}) = mr+m-i = mr+j.$$

$(X,\emptyset,v',d)$ es un conjunto decisorio, porque $v'(X) = v(X)$, ya que la variación del total de votos repartidos ha sido $ij-ji = 0$. Veremos que es equivalente al anterior, $(X,\emptyset,v,d)$. Sea F' el filtro asociado a v' en X. Sean $X_1' = \{x_1,x_2,\dots,x_i\}$, $X_2' = \{x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+j}\}$. Para cada $A \in F$ pondremos $A_1 = A \cap X_1'$, $A_2 = A \cap X_2'$, $h = \mathrm{card}(A_1)$, $k = \mathrm{card}(A_2)$. Por ser $v'(A) = v(A) + jh - ik$, distinguiremos dos casos:

1) si $jh - ik \geqq 0$, resulta $v'(A) \geqq d$, por tanto $A \in F'$;

2) si $jh - ik < 0$, debe ser $k > 0$, y de $j(h-i) \leqq jh-ik < 0$ sale $h < i$. Llamemos $s = \min(i-h,k) > 0$. Al trasponer s elementos de A_2 por s de $X_1'-A_1$ resulta $d \leqq v(t_1t_2\dots t_sA) = v(A) - ms$, $v(A) \geqq d + ms$, así que $v'(A) \geqq d + ms - (ik-jh)$. Para ver que $A \in F'$ basta que $ik-jh \leqq ms$. Si $s = i-h$, $ik-jh \leqq ij-jh \leqq ms$; si $s = k$, $ik-jh \leqq ik \leqq ms$.

Para cada $A \in F'$ tomaremos A_1,A_2,h,k como antes. Ahora tenemos $v'(A) = v(A) + jh - ik \geqq d$; distinguiremos también dos casos:

1) si $jh - ik \leqq 0$, resulta $v(A) \geqq d$, por tanto $A \in F$;

2) si $jh - ik > 0$, deducimos análogamente al caso anterior que $h > 0$, $k < j$. Llamando ahora $s = \min(h,j-k) > 0$, trasponemos ahora s elementos de A_1 por s de $X_2'-A_2$, con lo que obtenemos en este caso

$$v(t_1t_2\dots t_sA) = v(A) + ms \geqq d + ms - (jh-ik).$$

Si $s = h$, $jh-ik \leqq jh \leqq ms$; si $s = j-k$, $jh-ik \leqq ji-ik \leqq ms$, resultando $v(t_1t_2\dots t_sA) \geqq d$, de donde $t_1t_2\dots t_sA \in F$, y aplicando $t_s\dots t_2t_1$ queda $A = t_s\dots t_2t_1t_1t_2\dots t_sA \in F$, de donde $F' \subset F$, y en definitiva $F' = F$.

Así se consigue la normalización en la clase de simetría X', es decir, $v(x_1) = \dots = v(x_i) = v(x_{i+1}) = \dots = v(x_m)$.

Si después se aplica el proceso a otra clase de simetría, las modificaciones realizadas en v no alteran la normalización que se hubiera conseguido anteriormente en otras clases como X' (la única modificación global de v es la aplicación del Lema IV.2.3), por tanto con este proceso se consigue normalizar sucesivamente todas las clases de simetría. En particular, para X' = V se simplifica la segunda parte del proceso; por ejemplo, si $A \in F$, $v'(A) = v(A)$ por ser $A_1 = A_2 = V$.

Finalmente, una aplicación del Lema IV.2.3 no alterará las tres condiciones conseguidas hasta ahora. Y retocando por último la condición de aprobación como al final de la demostración del Lema IV.2.4 resulta la existencia de (X, V'_e, v', d'_o) que satisface la tesis del apartado a).

b) Por el Lema IV.2.1 se puede suponer $V_e = V$, mientras que por el Lema IV.2.4 supondremos también $v(x) = 0$ si y sólo si $x \in V$. Por ser denso el conjunto decisorio de partida, $v(x) > 0$ para cada $x \in X-V$.

Aplicando ahora exactamente el mismo proceso descrito en el a) en cada clase de simetría -ahora excepto en V- conseguimos un conjunto decisorio normalizado equivalente que satisface todavía las dos condiciones citadas inicialmente. Y, como en a), una aplicación final del Lema IV.2.3 y la modificación de la condición de aprobación nos da el conjunto decisorio (X, V''_e, v'', d''_o) correspondiente al enunciado de b).

Este resultado y los cuatro lemas previos permiten simplificar esquemas de votación, eliminando vetos explícitos -lo que reduce el esquema a v y d-, o implícitos -anulando las diferencias entre las dos clases de vetos-, o normalizando -con lo que el simple reparto de votos traduce las simetrías existentes entre los elementos-.

Proposición IV.2.3.- Sea (X,F) un espacio electoral realizable con grupo $Aut(X,F)$ generado por trasposiciones. Entonces:

a) Si (X,V_e,v,d) es una realización de (X,F) tal que $V_e = \emptyset$, o bien tal que $V_e = V$, $v(x) = 0$ si y sólo si $x \in V$,

v está normalizada si y sólo si $Aut(X,V_e,v,d) = Aut(X,F)$;

b) existen realizaciones de (X,F) cuyo grupo es $Aut(X,F)$.

En particular, todo ello es válido para espacios realizables completos, en cuyo caso, en las condiciones de a), v está normalizada si y sólo si $Aut(X,V_e,v,d) = \{f \in S(X) \ / \ pof = p\}$.

demostración. En la Proposición IV.1.1 hemos visto que, por lo general, $Aut(X,V_e,v,d)$ es sólo un subgrupo de $Aut(X,F)$, formado por los f tales que $vof = v$, $f(V_e) = V_e$. Designemos por $S(X,F)$ el producto directo de los grupos simétricos de las clases de simetría de (X,F); se trata de un subgrupo de $Aut(X,F)$.

a) Si v está normalizada y además $V_e = \emptyset$ o bien $V_e = V$, para cada par xRy se verifica $v \circ t_{xy} = v$, $t_{xy}(V_e) = V_e$, de manera que t_{xy} está en $Aut(X,V_e,v,d)$. En consecuencia,

$$S(X,F) \subset Aut(X,V_e,v,d) \subset Aut(X,F);$$

puesto que por hipótesis $Aut(X,F)$ está generado por trasposiciones, coincide, por el Lema II.2.1, con $S(X,F)$ y, por tanto, con $Aut(X,V_e,v,d)$.

Recíprocamente, por hipótesis y por ser $Aut(X,F)$ generado por trasposiciones tenemos $S(X,F) = Aut(X,V_e,v,d)$, por tanto, xRy implica $v \circ t_{xy} = v$, de donde $v(x) = v(y)$. Como además suponemos $V_e = \emptyset$ o bien $V_e = V$, $v(x) = 0$ si y sólo si $x \in V$, resulta que $v(x) = v(y)$ implica $v \circ t_{xy} = v$, y también $t_{xy}(V_e) = V_e$, tanto si $x,y \in V$ como si $x,y \notin V$ (el caso $x \in V$, $y \notin V$ o vice versa es imposible por ser $v = 0$ exactamente en V), por lo que $t_{xy} \in Aut(X,F)$, xRy, y v está normalizada.

b) Basta tener en cuenta que, según la Proposición IV.2.2, hay realizaciones de (X,F) que satisfacen las hipótesis de a), incluyendo la normalización de v.

Finalmente, según la Proposición II.2.4 el grupo de automorfismos de un espacio electoral completo está generado por trasposiciones, por tanto, si es realizable le son aplicables a) y b). Y por la citada proposición, la normalización de v será equivalente a que

$$\mathrm{Aut}(X, V_e, v, d) = \mathrm{Aut}(X,F) = \left\{ f \in S(X) \ / \ p\circ f = p \right\}.$$

Sea (Λ, s) el retículo definido en la sección III.2. Además, sea $\omega : \Lambda \longrightarrow N$ una valoración definida en dicho retículo.

<u>Definición</u> IV.2.3.- Diremos que ω es una valoración lineal si existen $0 < v_1 < v_2 < \dots < v_k$ tales que, si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \Lambda$,

$$\omega(\alpha) = v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + \dots + v_k\alpha_k.$$

<u>Proposición</u> IV.2.4.- Sea (X,F) un espacio electoral denso y completo. Son equivalentes:

i) (X,F) es realizable;

ii) existe una valoración $\overline{v} : \overline{P(X)} \longrightarrow N$ tal que

1) induce una valoración lineal ω en el retículo asociado (Λ, s),

2) $\overline{F}$ es la antiimagen de una semirrecta $[d, +\infty)$,

3) $\overline{v}(\overline{X}) < 2d$.

<u>demostración</u>. i) $\Longrightarrow$ ii). Sea (X, V_e, v, d) una realización de (X,F), que por la Proposición IV.2.2 podemos suponer normalizada y sin vetos explícitos: $V_e = \emptyset$. Designemos por $X_1, \dots, X_k$ $(=V,$ eventualmente) las clases de simetría de (X,F). Por ser éste completo podemos suponer que $X_1 < \dots < X_k$ es la ordenación de X/R. Por ser v normalizada, queda

completamente determinada por sus valores constantes $v_1, \dots, v_k$ en las clases de simetría. Por ser denso y completo el espacio y sin vetos explícitos la realización, $0 < v_1 < \dots < v_k$. Por ser v normalizada, ArB implica $v(A) = v(B)$, por tanto la extensión de v a $P(X)$ factoriza para dar una valoración $\overline{v} : \overline{P(X)} \longrightarrow N$. Esta se traslada por el isomorfismo φ de la Proposición III.2.1 a una valoración $\omega : \Lambda \longrightarrow N$, que es lineal porque viene dada por $\omega(\alpha) = v_1\alpha_1 + \dots + v_k\alpha_k$, para cada vector $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Se comprueba inmediatamente que $\overline{F}$ es la antiimagen de la semirrecta $[d, +\infty)$, ya que no habiendo vetos explícitos $\overline{A} \in \overline{F}$ equivale a $v(A) \geq d$. Finalmente, también por no haber vetos explícitos en la realización, $\overline{v}(\overline{X}) = v(X) = T < 2d$.

ii) $\Longrightarrow$ i). Supuesta la existencia de una valoración $\overline{v}$ que cumpla las condiciones 1),2),3), construiremos una realización de (X,F).

Tomamos $V_e = \emptyset$, y si $X_1, \dots, X_k$ (=V, eventualmente) son las clases de simetría de (X,F), y $v_1, \dots, v_k$ los coeficientes de la valoración ω asociada a $\overline{v}$, definimos como reparto de votos $v : X \longrightarrow N$ dada por $v(x) = v_i$ si y sólo si $x \in X_i$, $i = 1, \dots, k$. Al extender v a $P(X)$ resulta $T = v(X) = \overline{v}(\overline{X}) < 2d$, así que (X, V_e, v, d) es un conjunto decisorio. Este es una realización de (X,F) por la condición 2) y por ser $V_e = \emptyset$. Por su construcción, v está normalizada, e induce a su vez la valoración $\overline{v}$.

El siguiente resultado recoge algunas propiedades de interés para las valoraciones lineales.

<u>Proposición</u> IV.2.5.- Toda valoración lineal $\omega : \Lambda \longrightarrow N$ cumple

a) $\omega(0) = 0$;

b) ω es positiva: $\alpha \leq \beta$, $\alpha \neq \beta$ implica $\omega(\alpha) < \omega(\beta)$;

c) ω es fuertemente aditiva: $\omega(\alpha) + \omega(\beta) = \omega(\alpha \vee \beta) + \omega(\alpha \wedge \beta)$.

demostración. a) $\omega(0) = 0v_1 + \dots + 0v_k = 0$.

b) Sean $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_k)$. Si $\alpha \leq \beta$, $\alpha \neq \beta$, sea h máximo tal que $\Sigma_h(\alpha) < \Sigma_h(\beta)$; resulta entonces $\alpha_h < \beta_h$, y también $\alpha_{h+1} = \beta_{h+1}, \dots, \alpha_k = \beta_k$. Poniendo $d_i = \beta_i - \alpha_i$, $i = 1,\dots,k$, resulta $d_1, d_2, \dots, d_{h-1} \geq 0$, $d_h > 0$, $d_{h+1} = \dots = d_k = 0$. Por tanto, $v_h d_h > 0$, $v_{h-1}d_{h-1} + v_h d_h > v_{h-1}d_{h-1} + v_{h-1}d_h \geq 0$, y por recurrencia llegamos a $v_1 d_1 + v_2 d_2 + \dots + v_h d_h > 0$, lo que lleva a que $\omega(\alpha) < \omega(\beta)$.

c) Sean α, β como en b). Es inmediato comprobar que en el retículo Λ las fórmulas para el supremo y el ínfimo son las siguientes:

$\alpha \vee \beta = \gamma$ si y sólo si $\Sigma_i(\gamma) = \max\{\Sigma_i(\alpha), \Sigma_i(\beta)\}$, $i = 1,\dots,k$,

$\alpha \wedge \beta = \delta$ si y sólo si $\Sigma_i(\delta) = \min\{\Sigma_i(\alpha), \Sigma_i(\beta)\}$, $i = 1,\dots,k$.

Por tanto, $\Sigma_i(\alpha) + \Sigma_i(\beta) = \Sigma_i(\gamma) + \Sigma_i(\delta)$, $i = 1,\dots,k$, de donde $\alpha_i + \beta_i = \gamma_i + \delta_i$, $i = 1,\dots,k$, y de aquí $\omega(\alpha) + \omega(\beta) = \omega(\gamma) + \omega(\delta)$.

Ejemplo. Un caso interesante de valoración lineal se obtiene al considerar en un espacio denso y completo el poder de Shapley, ya que es constante en cada órbita, es decir, en cada clase de simetría. Por tanto y de forma análoga a la de la demostración de la Proposición IV.2.4 para v, el poder p induce una valoración $\overline{p}$ en el retículo $\overline{P(X)}$ que es lineal en el sentido de la Definición IV.2.3, prescindiendo del hecho no esencial de que no es a valores en N sino en Q.

IV.3.- REALIZACION DE ESPACIOS ELECTORALES SIMPLES.

Tomaremos como argumento el esquema de clasificación de los espacios simples de la sección III.3. En las demostraciones nos limitaremos a dar una realización, si bien añadiremos algún comentario sobre la diversidad de realizaciones posibles.

<u>Proposición</u> IV.3.1.- Todo espacio atómico es realizable.

<u>demostración</u>. Sea (X,F) el espacio, $F_0 = \{C\}$ la base del filtro. Se obtiene una realización (X,V_e,v,d) tomando $V_e = C$, $v(x) = 1$ constante, $d = \mathrm{card}(C)$.

Una realización aún más apoyada en los vetos explícitos sería: $V_e = C$, $v(x) = 0$ cte, $d = 0$. En cambio, la realización más sencilla sin vetos explícitos viene dada por $V_e = \emptyset$, $d = \mathrm{card}(C)$, v = función característica de C en X. Finalmente, otra que excluye vetos explícitos pero esconde la nulidad de los elementos de X-C viene dada por $V_e = \emptyset$,

$$v(x) = \begin{cases} a, \text{ si } x \in C, & d = ia, \text{ con } i = \mathrm{card}(C),\ a > n-i,\ n = \mathrm{card}(X). \\ 1, \text{ si } x \notin C \end{cases}$$

<u>Proposición</u> IV.3.2.- Todo espacio simétrico es realizable.

<u>demostración</u>. Sea (X,F) el espacio, $F_0 = P_p(X)$ la base de F. Se obtiene una realización (X,V_e,v,d) tomando $V_e = \emptyset$, $v(x) = 1$, $d = p$.

<u>Comentario</u>. Se exige unanimidad cuando $p = n$. La llamada mayoría absoluta se presenta cuando $p = E(n/2) + 1$. En cualquier caso, d puede expresarse como el $\frac{100p}{n}$ % del total de votos, que es n.

Si llamamos conjunto decisorio democrático a aquél donde V_e es vacío y $v(x) = 1$ constante, atendiendo al slogan "un hombre, un voto", concluímos de la Proposición IV.3.2 que un conjunto decisorio es (equivalente a uno) democrático si y sólo si el grupo de automorfismos del espacio asociado es el grupo simétrico.

Proposición IV.3.3.- Todo espacio pseudosimétrico es realizable.

demostración. Sea (X,F) el espacio, p el cardinal cte. en F_o. Por la Proposición IV.2.1.b) suponemos $N = \emptyset$. Se obtiene una realización (X,V_e,v,d) tomando $V_e = V$, $v(x) = 1$, $d = p$.

Y otra sin vetos explícitos: si $n = \text{card}(X)$, $n_V = \text{card}(V)$, sea $a > n-p$, y tomemos $V_e = \emptyset$, $v(x) = \begin{cases} a, & \text{si } x \in V \\ 1, & \text{si } x \notin V \end{cases}$, $d = p - n_V + an_V$; basta ver que cada $x \in V$ tiene veto, y ello resulta de que los restantes elementos sumarían $(n_V-1)a + n - n_V$ votos, mientras que $a > n-p$ implica que $an_V > (n_V-1)a + n - p$, de donde $d > (n_V-1)a + n - n_V$.

Proposición IV.3.4.- Todo espacio no completo es irrealizable.

demostración. Por reducción al absurdo, supongamos (X,F) no completo realizable. Según el Lema IV.2.2 existirá una realización sin vetos explícitos $(X,\emptyset,v,d)$. Por tanto, $A \in F$ si y sólo si $v(A) \geq d$, de forma que, dados $x,y \in X$, según sea $v(x) \leq v(y)$ o $v(y) \leq v(x)$ deducimos xSy o ySx, por ser $V_e = \emptyset$. Ello prueba que (X,F) debe ser completo.

Insistimos en que este resultado es relativo, por cuanto está referido a la clase de conjuntos decisorios considerada aquí. Acabamos de ver que la completitud es una condición necesaria para que un espacio sea realizable. El próximo resultado mostrará que no es suficiente.

Sea (X,F) un espacio simple molecular completo con $k \geq 2$ donde $\overline{F}$ sea ideal dual del retículo asociado $\overline{P(X)}$, y sea $\overline{M}$ su mínimo. Respetaremos las notaciones de la sección III.3 sin necesidad de repetirlas. Las posibilidades de realización vienen dadas por la siguiente

Proposición IV.3.5.- Sea (X,F) un espacio electoral simple, completo, con $k \geq 2$, donde $\overline{F}$ sea ideal dual de $\overline{P(X)}$. Entonces:

a) Si $k > 2$, (X,F) es irrealizable;

b) si $k = 2$, (X,F) es realizable si y sólo si se verifica

$$(k_2-h_2).(n_1-h_1) < (h_1-k_1),$$

donde $k_1 = \max(h_1+h_2-1-n_2, 0)$, $k_2 = \min(h_1+h_2-1, n_2)$, y como en la sección III.3, $n_1 = \mathrm{card}(X_1)$, $n_2 = \mathrm{card}(X_2)$, $\overline{M} = \min \overline{F}$, $\varphi(\overline{M}) = (h_1, h_2, n_V)$.

demostración. Por la Proposición IV.2.1 se puede suponer (X,F) denso en ambos apartados.

a) Sea $\varphi(\overline{M}) = (h_1, h_2, \ldots, h_k, n_V)$. Si $V = \emptyset$ basta suprimir n_V. Consideremos $\overline{N}$ y $\overline{P}$ definidos por sus vectores de índices

$$\varphi(\overline{N}) = (h_1-1, h_2-1, h_3, \ldots, h_{k-1}, h_k+1, n_V),$$
$$\varphi(\overline{P}) = (h_1+1, h_2+1, h_3, \ldots, h_{k-1}, h_k-1, n_V).$$

Ello es posible por ser $k > 2$, y por la Proposición III.3.1.3). Además, por sus índices, $\overline{M} \nleq \overline{N}$, $\overline{M} \nleq \overline{P}$, luego $\overline{N}, \overline{P} \notin \overline{F}$. Sean M, N, P representantes en $P(X)$, donde $N, P \notin F$. Si hubiera una realización (X, V_e, v, d), aplicando la Prop. IV.2.2 la supondríamos normalizada, con $V_e = V$, y con $v(x) = 0$ si y sólo si $x \in V$, por ser denso (X,F). Siendo $V \subset N, P$ pero $N, P \notin F$, resultan $v(N) < v(M)$, $v(P) < v(M)$, es decir,

$$(h_1-1)v_1+(h_2-1)v_2+\ldots+(h_k+1)v_k < h_1v_1+h_2v_2+\ldots+h_kv_k,$$
$$(h_1+1)v_1+(h_2+1)v_2+\ldots+(h_k-1)v_k < h_1v_1+h_2v_2+\ldots+h_kv_k,$$

que nos llevan a la contradicción $v_k < v_1+v_2$, $v_1+v_2 < v_k$.

b) $k = 2$. Determinaremos en primer lugar los maximales que hay fuera de $\overline{F}$. Se consideran $\overline{N}$ y $\overline{P}$ definidos por sus índices respectivos, $\varphi(\overline{N}) = (n_1, h_2-1, n_V)$, $\varphi(\overline{P}) = (k_1, k_2, n_V)$, siendo k_1, k_2 los del enunciado. Si $V = \emptyset$, basta suprimir n_V de toda la demostración. Si $V \neq \emptyset$ consideraremos también $\overline{Q}$, definido por sus índices $\varphi(\overline{Q}) = (n_1, n_2, n_V-1)$.

Todo ello es posible porque $0 \leq k_1 < n_1$, $0 < k_2 \leq n_2$, a la vista de la Prop. III.3.1.3). Además, por sus índices, $\overline{M} \nleq \overline{N}$, $\overline{M} \nleq \overline{P}$, $\overline{M} \nleq \overline{Q}$, por lo que $\overline{N},\overline{P},\overline{Q} \notin \overline{F}$. Veremos ahora que estos tres son los únicos maximales del complementario de $\overline{F}$. Sea $\overline{A} \notin \overline{F}$, de índices $\varphi(\overline{A}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_V)$. Por ser falso que $\varphi(\overline{M}) \leq \varphi(\overline{A})$, hay tres casos posibles:

1) $\alpha_V < n_V$ (sólo posible si $V \neq \emptyset$), y entonces $\overline{A} \leq \overline{Q}$;

2) $\alpha_V = n_V$, $\alpha_2 < h_2$, y entonces $\overline{A} \leq \overline{N}$;

3) $\alpha_V = n_V$, $h_2 \leq \alpha_2$, $h_1+h_2 > \alpha_1+\alpha_2$, y entonces $\overline{A} \leq \overline{P}$ puesto que $\alpha_2 \leq n_2$, $\alpha_2 \leq h_1+h_2-1$, de donde $\alpha_2 \leq k_2$, y $\alpha_1+\alpha_2 \leq h_1+h_2-1 = k_1+k_2$ por la definición de k_1 y k_2.

Demostraremos ahora que la condición enunciada es necesaria para que el espacio (X,F) sea realizable. Sea (X,V_e,v,d) una realización, que por la Proposición IV.2.2 podemos suponer normalizada, con $V_e = V$, y con $v(x) = 0$ si y sólo si $x \in V$, por ser denso (X,F). Sean M,N,P representantes en $P(X)$ de $\overline{M},\overline{N},\overline{P}$ respectivamente. Por ser $V \subset N,P$, $N,P \notin F$, resulta $v(N) < v(M)$, $v(P) < v(M)$, lo que nos lleva a las desigualdades $n_1v_1+(h_2-1)v_2 < h_1v_1+h_2v_2$, $k_1v_1+k_2v_2 < h_1v_1+h_2v_2$, y al simplificarlas $(n_1-h_1)v_1 < v_2$, $(k_2-h_2)v_2 < (h_1-k_1)v_1$. Observando que $k_2-h_2 \geq 0$ siempre porque $h_2 < n_2$, $h_2 \leq h_1+h_2-1$, multiplicamos y obtenemos

$$(k_2-h_2)(n_1-h_1)v_1 \leq (k_2-h_2)v_2 < (h_1-k_1)v_1,$$

de donde resulta la condición del enunciado. Cuando sea $k_2-h_2 = 0$, ello da $h_1 = 1$, en cuyo caso $k_1 = 0$, y la condición queda $0 < 1$, es decir, aún estricta. Observemos que siempre es $h_1-k_1 > 0$, por ser $h_2 < n_2$.

Finalmente probaremos que la condición es suficiente. Elegiremos v_1 y v_2 con determinadas condiciones y con ellos definiremos v y una realización del espacio dado. Cuando aparezca una fracción con denominador ≥ 0 convendremos en que al anularse éste la fracción valga $+\infty$.

Si $n_V \neq 0$, tomaremos $v_1, v_2 \in N$ que satisfagan

$$n_1-h_1 < v_2/v_1 < (h_1-k_1)/(k_2-h_2) \qquad (1)$$

lo cual es posible por hipótesis. Cuando $n_V = 0$, exigiremos a v_1, v_2 condiciones suplementarias que vamos a exponer. De la Prop. III.3.1.4) se ve que es falsa la conjunción de $2h_2 \leq n_2$ con $2h_1+2h_2 \leq n_1+n_2$. Por tanto, caben tres posibilidades:

a) $2h_2 > n_2$, $2h_1 \geq n_1$,

b) $2h_2 > n_2$, $2h_1 < n_1$,

c) $2h_2 \leq n_2$, $2h_1+2h_2 > n_1+n_2$;

en el caso a) no exigimos condiciones adicionales a v_1, v_2, sólo (1); en el caso b) tenemos $(k_2-h_2)(n_1-2h_1) = (k_2-h_2)(n_1-h_1)-(k_2-h_2)h_1 \leq$ $\leq (k_2-h_2)(n_1-h_1) < (h_1-k_1) \leq (h_1-k_1)(2h_2-n_2)$, y tomando los extremos, $(k_2-h_2)(n_1-2h_1) < (h_1-k_1)(2h_2-n_2)$, que escrito equivalentemente queda $(n_1-2h_1)/(2h_2-n_2) < (h_1-k_1)/(k_2-h_2)$; en este caso tomaremos $v_1, v_2 \in N$ de manera que satisfagan las condiciones

$$\max \left\{n_1-h_1, (n_1-2h_1)/(2h_2-n_2)\right\} < v_2/v_1 < (h_1-k_1)/(k_2-h_2) \qquad (2)$$

más restrictivas que las impuestas cuando $n_V \neq 0$, pues las incluyen; en el caso c) se deduce de las hipótesis que $2h_1-n_1 > n_2-2h_2 \geq 0$; aquí probaremos que se verifica $(2h_1-n_1)/(n_2-2h_2) > n_1-h_1$, por lo que tomaremos $v_1, v_2 \in N$ de manera que satisfagan las condiciones

$$n_1-h_1 < v_2/v_1 < \min \left\{(2h_1-n_1)/(n_2-2h_2), (h_1-k_1)/(k_2-h_2)\right\} \qquad (3)$$

también más restrictivas que si $n_V \neq 0$; pongamos $d_1 = 2h_1-n_1$, y también $d_2 = n_2-2h_2$; observemos que $d_1, d_2 > 0$, $d_1 < h_1$, $d_1 > d_2$; hay dos casos:

1º Si $k_1 = h_1+h_2-1-n_2$, entonces $k_2 = n_2$, $k_1 = h_1-h_2-d_2-1$, $k_2 = 2h_2+d_2$, y la condición pasa a ser $(h_2+d_2)(h_1-d_1) < 1+h_2+d_2$, de la que resulta $d_1 = h_1-1$; si fuera falsa la desigualdad que hemos de probar obtendríamos $d_1/d_2 \leq 1$, en contradicción con $d_1 > d_2$.

2º. Si $k_1 = 0$, entonces $k_2 = h_1+h_2-1$, y la condición pasa a ser $(h_1-1)(h_1-d_1) < h_1$, de donde $d_1 > h_1(h_1-2)/(h_1-1) > h_1-2$, y concluímos que $d_1 = h_1-1$, finalizando el razonamiento como en el caso 1º.

Se define un conjunto decisorio (X,V_e,v,d) tomando $V_e = V$, $v(x) = v_1,v_2,0$ según $x \in X_1,X_2,V$, y $d = h_1v_1+h_2v_2$, viniendo dados v_1,v_2 por las fórmulas (1),(2),(3) según los casos. El primer punto -que ha exigido la discusión anterior- es la comprobación de que (X,V_e,v,d) es un conjunto decisorio. Se trata de probar que si $V = \emptyset$ es $2d > T$, donde $T = v(X) = n_1v_1+n_2v_2$. Distinguiremos los casos a),b),c) de antes:

a) De las dos hipótesis resulta inmediatamente

$$2d = 2h_1v_1+2h_2v_2 > n_1v_1+n_2v_2 = T.$$

b) Por las desigualdades (2) resulta

$$(n_1-2h_1)/(2h_2-n_2) < v_2/v_1,$$

y de aquí $2d = 2h_1v_1+2h_2v_2 > n_1v_1+n_2v_2 = T$.

c) Por las desigualdades (3) tenemos, análogamente,

$$v_2/v_1 < (2h_1-n_1)/(n_2-2h_2),$$

de donde $2d > T$.

El último punto de la demostración consiste en probar que el filtro F' asociado en X a este conjunto decisorio coincide con F. Sean M,N,P,Q (éste último si $V \neq \emptyset$) representantes en P(X) de $\overline{M},\overline{N},\overline{P},\widetilde{Q}$. Para empezar tenemos $V \not\subset Q$; $v(P) < v(M)$, ya que aplicando la acotación superior de (1),(2),(3) es $v(M)-v(P) = (h_1-k_1)v_1+(h_2-k_2)v_2 > 0$; asimismo, $v(N) < v(M)$, pues aplicando ahora la acotación inferior de las fórmulas $v(M)-v(N) = (h_1-n_1)v_1+(h_2-h_2+1)v_2 > 0$.

Sea ahora $A \subset X$, y pongamos $\varphi(\overline{A}) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_V)$, suprimiendo el tercer índice si $V = \emptyset$. Si $A \in F$, $\overline{A} \in \overline{F}$, luego $\overline{M} \leq \overline{A}$, que se expresa por $\alpha_V = n_V$, $\alpha_2 \geq h_2$, $\alpha_1+\alpha_2 \geq h_1+h_2$, de donde obtenemos $V \subset A$, así como

$v(A) \geqq v(M) = d$, puesto que $v(A)-v(M) = (\alpha_1-h_1)v_1+(\alpha_2-h_2)v_2 \geqq$ $\geqq (\alpha_1-h_1)v_1+(\alpha_2-h_2)v_1 = (\alpha_1+\alpha_2-h_1-h_2)v_1 \geqq 0$, por lo tanto $A \in F'$. Recíprocamente, sea $A \notin F$. Entonces $\overline{A} \notin \overline{F}$, por lo tanto se verifica que $\overline{A} \leqq \overline{N}$, $\overline{A} \leqq \overline{P}$, o $\overline{A} \leqq \overline{Q}$. Si $\overline{A} \leqq \overline{Q}$, $\alpha_V < n_V$, luego $V \notin A$, $A \notin F'$. Si $\overline{A} \leqq \overline{P}$, $\alpha_V \leqq n_V$, $\alpha_2+\alpha_V \leqq k_2+n_V$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_V \leqq k_1+k_2+n_V$; si $\alpha_V < n_V$, $V \notin A$, $A \notin F'$; supuesto, pues, $\alpha_V = n_V$, queda $\alpha_2 \leqq k_2$, $\alpha_1+\alpha_2 \leqq k_1+k_2$, por lo cual $v(P)-v(A) = (k_1-\alpha_1)v_1+(k_2-\alpha_2)v_2 \geqq (k_1-\alpha_1+k_2-\alpha_2)v_1 \geqq 0$, así que resulta $v(A) \leqq v(P) < v(M) = d$, es decir, $A \notin F'$. Finalmente, si $\overline{A} \leqq \overline{N}$, entonces $\alpha_V \leqq n_V$, $\alpha_2+\alpha_V \leqq h_2-1+n_V$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_V \leqq n_1+h_2-1+n_V$; si $\alpha_V < n_V$, es $V \notin A$ y $A \notin F'$; suponiendo, pues, $\alpha_V = n_V$, queda $\alpha_2 \leqq h_2-1$, $\alpha_1+\alpha_2 \leqq n_1+h_2-1$, de modo que $v(N)-v(A) = (n_1-\alpha_1)v_1+(h_2-1-\alpha_2)v_2 \geqq (n_1-\alpha_1+h_2-1-\alpha_2)v_1 \geqq 0$, de donde $v(A) \leqq v(N) < v(M) = d$, es decir, $A \notin F'$. Esto acaba la demostración de que $F' = F$; por tanto, (X,F) es realizable.

BIBLIOGRAFIA

1.- ARROW (1951) Social choice and individual values, Wiley, New York, 2ª ed. rev. 1963.

2.- AUMANN, MASCHLER (1961) "An equilibrium theory for n-person cooperative games", Am. Math. Soc. Notices, vol. 8, p. 261.

3.- AUMANN, MASCHLER (1964) "The bargaining set for cooperative games" en Advances in Game Theory, Annals of Math. Studies 52, Princeton, pp. 443-476.

4.- AUMANN, PELEG (1960) "Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments", Bull. Am. Math. Soc., 66, 173-179.

5.- BLACK (1958) The theory of committees and elections, Cambridge U. Press.

6.- BLOOMFIELD, WILSON (1972) "The postulates of Game Theory", Journal of Mathematical Sociology, vol. 2, 221-234.

7.- BOTT (1953) "Symmetric solutions to majority games" en Contributions to the theory of Games II, Annals of Math. Studies 28, Princeton, 319-323.

8.- BUCHANAN, TULLOCK (1962) The calculus of consent, Ann Arbor: The University of Michigan Press.

9.- CARRERAS (1978) "Valoración del poder en conjuntos decisorios", Revista Técnica de la E.T.S.I.I.T., nº 12, Terrassa, 61-68.

10.- DAVIS (1969) Game Theory, Basic Books Inc., New York.

11.- DOWNS (1957) An Economic theory of democracy, Harper, New York.

12.- FREIXA (1980) "Les decisions dels cossos col.legiats", Memòries de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona, vol. XLIV, nº 18, 519-566.

13.- HALL (1959) The Theory of Groups, Macmillan, New York.

14.- HARSANYI (1956) "Approaches to the bargaining problem before and after the Theory of Games: A critical discussion of Zethuen's, Hicks' and Nash's theories", Econometrica, XXIV, 144-157.

15.- HARSANYI (1959) "A bargaining model for the cooperative n-person game" en Contributions to the Theory of Games IV, Annals of Math. Studies 40, Princeton, 325-355.

16.- HILTON, STAMMBACH (1971) A Course in Homological Algebra, Springer--Verlag, New York.

17.- ISBELL (1964) "Homogeneus games III" en Advances in Game Theory, Annals of Math. Studies 52, Princeton, 255-265.

18.- JEVONS (1871) Theory of political Economy, Londres.

19.- KEMENY, SNELL, THOMPSON (1957) Introduction to Finite Mathematics, Prentice-Hall, New Jersey, 2ª ed. 1966.

20.- LUCAS (1968) "The proof that a game may not have a solution", RAND Corporation, RM 5543 PR.

21.- LUCE, RAIFFA (1957) Games and decisions, Wiley, New York.

22.- LUCE, ROGOW (1956) "A game-theoretical analysis of congressional power distribution for a stable two-party system", Behavioral Science I, 83-95.

23.- MAC KINSEY (1950) "Isomorphism of games and strategic equivalence" en Contributions to the Theory of Games I, Annals of Math. Studies 24, Princeton, 117-130.

24.- MAC KINSEY (1952) Introduction to the Theory of Games, Mc Graw-Hill, New York.

25.- MAY (1952) "A set of independent, necessary and sufficient conditions for simple majority decision", Econometrica 20.

26.- NASH (1950) "Equilibrium point in n-person games", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 36, 48-49.

27.- NASH (1951) "Non-cooperative games", Annals of Math. 54, 286-295.

28.- NERING (1964) "Coalition bargaining in n-person games" en Advances in Game Theory, Annals of Math. Studies 52, Princeton, 531-545.

29.- NEVEU (1964) Bases mathématiques du Calcul des Probabilités, Masson et Cie, Paris.

30.- OWEN (1964) "The tensor composition of non-negative games" en Advances in Game Theory, Annals of Math. Studies 52, Princeton, 307-326.

31.- OWEN (1971) "Political games", Naval Res. Log. Quart., 345-355.

32.- OWEN (1975) "Evaluation of a Presidential election game", Am. Pol. Sci. Rev., 947-953.

33.- OWEN (1977) "Values of games with a priori unions" en Mathematical Economics and Game Theory, Springer-Verlag, New York, 76-88.

34.- OWEN (1978) "Characterization of the Banzhaf-Coleman index", SIAM Journal Applied Math., vol. 35, nº 2, 315-327.

35.- PARETO (1897) Cours d'Economie politique, Rouge, Lausanne.

36.- PARTHASARATHY (1966) "A note on compound simple games", Proc. Am. Math. Soc. 17, 1334-1340.

------------- (1969) "Product solutions for simple games III", Proc. Am. Math. Soc. 23, 412-420.

37.- PARTHASARATHY, RAGHAVAN (1971) Some topics in two-person games, American Elsevier Publ. Co., New York.

38.- PLOTT (1972) "Ethics, Social Choice Theory and the theory of economic policy", Journal of Mathematical Sociology, vol. 2, 181-208.

39.- RIKER (1959) "A test of the adequacy of the power index", Behavioral Science IV, 120-131.

40.- RIKER (1962) The theory of political coalitions, Yale U. Press.

41.- SELTEN (1964) "Valuation of n-person games" en Advances in Game Theory, Annals of Math. Studies 52, Princeton, 577-626.

42.- SEN (1970) Collective choice and social welfare, Holden-Day, San Francisco.

43.- SHAPLEY (1953) "A value for n-person games" en Contributions to the Theory of Games, Annals of Math. Studies 28, Princeton, 307-317.

44.- SHAPLEY (1964) "Solutions of compound simple games" en Advances in Game Theory, Annals of Math. Studies 52, Princeton, 267-305.

45.- SHAPLEY, AUMANN (1974) Values of non-atomic games, Princeton University Press.

46.- SHAPLEY, SHUBIK (1954) "A method for evaluating the distribution of power in a committee system", Am. Pol. Sci. Rev. XLVIII, 787-792.

47.- SZASZ (1971) Théorie des treillis, Dunod, Paris.

48.- VON NEUMANN (1928) "Zur theorie der gesellschaftsspiele", Mathematische Annalen, vol. 100, 295-320.

49.- VON NEUMANN, MORGENSTERN (1944) Theory of games and economic behavior, Princeton U. Press, 3ª ed. 1953.

50.- VOROB'EV (1977) Game Theory, Springer-Verlag, New York.