Pub. Mat. UAB
Vol. 26 N°2 Juny 1982

# NOTA SOBRE LES QUASIMARTINGALES EN EL PLA

Jaume Suñer Llabrés

Rebut el 20 de gener del 1982

ABSTRACT. In this paper we introduce notions of two-parameter quasimartingales related with the different kinds of two-parameter martingales and state a characterization and decomposition theorems. The main result gives a condition for the existence of a $\sigma$-additive extension of Doléans-Föllmer's measure associated to a planar quasimartingale, in terms of uniform integrability on a family of stopped processes.

Introducció. Sigui $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espai de probabilitat complet, i $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ una filtració de $\mathcal{F}$ complint les condicions habituals, és a dir contínua per la dreta i que $\mathcal{F}_0$ conté tots els conjunts negligibles de $\mathcal{F}$. Un procés $(X_t)_{t\geqslant 0}$, adaptat a $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, se'n diu una quasimartingala en $\mathbb{R}_+$ si

$$\operatorname{Var}(X) = \sup\{E(\Sigma_{i=0}^{n-1}|E(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}/\mathcal{F}_{t_i})|)\} < \infty,$$

on el suprem es pren sobre totes les particions finites

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty.$$

El concepte de quasimartingala fou introduït per en Fisk (5) i n'Orey (9), en estudiar un problema més general que el de la descomposició de Doob-Meyer d'una submartingala en suma d'una martingala i un procés creixent. Un estudi de les quasimartingales i la seva analogia amb les supermartingales pot trobar-se en (11). En (6), (8) i (10) es fa un enfocament des del punt de vista de la mesura de Doléans-Föllmer, introduïda en (4) i (6).

En Brennan (1) defineix conceptes de quasimartingala en el pla basats en les definicions de Vitali, Arzelà i Hardy de funcions reals de dues variables de variació afitada (veure (3)), i dóna teoremes de caracterització i descomposició que són anàlegs als del cas d'un paràmetre. Posteriorment dóna una condició equivalent a que la mesura de Doléans-Föllmer tingui extensió $\sigma$-additiva a la tribu previsible.

El present treball s'introdueixen conceptes de quasimartingales en el pla relacionats amb els diferents tipus ja coneguts de martingala en dos paràmetres (veure (2)). L'objectiu bàsic d'aquest article és trobar una condició alternativa a la de (1) perquè existeixi extensió $\sigma$-additiva de la mesura de Doléans-Föllmer d'una quasimartingala en el pla. La condició que es troba és una condició d'integrabilitat uniforme sobre el procés, és a dir una condició del tipus de que el procés pertanyi a una certa classe (D), anàlogament al cas d'un paràmetre (veure (11)).

<u>Notacions.</u> El conjunt de paràmetres serà $T = [0,1]^2$; considerarem un espai de probabilitat complet $(\Omega,\mathcal{F},P)$ i una filtració $(\mathcal{F}_z)_{z\in T}$ de $\mathcal{F}$ que compleix (a) és contínua per la dreta; (b) $\mathcal{F}_{(o,o)}$ conté tots els conjunts negligibles de $\mathcal{F}$. Endemés considerarem altres tres filtracions: $\mathcal{F}_z^1 = \bigvee_{o\leqslant v\leqslant 1} \mathcal{F}_{(s,v)}$,

$\mathcal{F}_z^2 = \bigvee_{o\leqslant u\leqslant 1} \mathcal{F}_{(u,t)}$ on $z = (s,t)$, i $\mathcal{F}_z^s = \mathcal{F}_z^1 \vee \mathcal{F}_z^2$. Normalment $(\mathcal{G}_z)_{z\in T}$ indicarà una qualsevol d'aquestes quatre filtracions. $X = \{X_z : z\in T\}$ designarà un procés integrable i adaptat a $(\mathcal{F}_z)_{z\in T}$.

Si $z = (s,t)$ i $z' = (s',t')$, l'increment del procés X en el rectangle $(z,z']$ voldrà dir:

$$\Delta X(z,z'] = X(z') - X(s',t) - X(s,t') + X(z).$$

Si $g = \{z_{ij}\}_{i,j}$ és una partició de T, usarem la notació $\Delta_g X(z_{ij})$ per a indicar $\Delta X(z_{ij}, z_{i+1,j+1}]$.

Direm rectangle previsible a tot conjunt de la forma $(z,z'] \times A$, on $z, z' \in T$, $z \ll z'$ i $A \in \mathcal{G}_z$. El conjunt dels rectangles previsibles forma una semiàlgebra, que anomenarem $\mathcal{R}$ ; $\mathcal{A}$ serà l'àlgebra de les reunions finites disjuntes d'elements de $\mathcal{R}$ ; i $\mathcal{P}$ la $\sigma$-àlgebra generada per $\mathcal{A}$. Segons la filtració inicial $(\mathcal{G}_z)_{z\in T}$ que agafem, tenim les tribus previsibles, i-previsibles (i=1,2) o s-previsible.

Si X és qualsevol procés integrable adaptat a $(\mathcal{F}_z)_{z\in T}$, podem associar-li una funció de conjunt definida sobre cada un dels quatre tipus de rectangle previsible mitjançant la fórmula:

$$\mu_X((z,z'] \times A) = E(1_A \cdot \Delta X(z,z']).$$

Aquesta funció de conjunt $\mu_X$ és finita i finitament additiva i estén a una funció finitament additiva en $\mathcal{A}$. A l'extensió li direm $\mu_X^w$, $\mu_X^i$ o $\mu_X^s$ segons de l'àlgebra que es tracti. Resulta immediatament de la definició que:

$$\mu_X^s = 0 \Leftrightarrow \text{ X és una martingala forta,}$$

i anàlogament per $\mu_X^i$ i $\mu_X^w$.

<u>Definició 1</u>. Un procés $(X_z)_{z\in T}$ és una quasimartingala en T respecte de $(\mathcal{G}_z)_{z\in T}$ si

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{G}_z}(X) = \sup_g E(\Sigma_{z\in g}|E(\Delta_g X(z)/\mathcal{G}_z)|) < \infty,$$

on g és una partició de T.

Segons la filtració $(G_z)_{z\in T}$ que agafem, ens aparèixen diferents tipus de quasimartingala, que les anomenarem així: si $G_z = F_z$, en direm quasimartingala feble (que coincideix amb els V-processos de (1)); si $G_z = F_z^i$ $(i = 1,2)$, tindrem les i-quasimartingales; i si $G_z = F_z^s$, les quasimartingales fortes.

Es tenen immediatament les següents relacions:

X és una quasimartingala forta $\Rightarrow$ X és una i-quasimartingala $\Rightarrow$ X és una quasimartingala feble.

<u>Definició 2.</u> Una quasimartingala X respecte de $(G_z)_{z\in T}$ s'anomena un quasipotencial (respecte de $(G_z)_{z\in T}$ si $X_z = 0$ $\forall z\in\Gamma_u$, on

$\Gamma_u = \{(s,1):\ 0\leqslant s\leqslant 1\} \cup \{(1,t):\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$.

Utilitzant la mesura de Doléans-Föllmer en el pla, anàlogament a com es demostra en (8), resulten els següents fets:

<u>Teorema 1</u>. Sigui $T_0 = (0,1] \times (0,1]$. Sigui $X = (X_z)_{z\in T}$ un procés adaptat a $(F_z)_{z\in T}$, subfiltració d'una filtració $(G_z)_{z\in T}$. Aleshores X és una quasimartingala respecte de $(G_z)_{z\in T}$ si i només si $|\mu_X|(T_0 \times \Omega) < \infty$, i llavors $|\mu_X|(T_0 \times \Omega) = \mathrm{Var}_{G_z}(X)$.

<u>Teorema 2: Descomposició del tipus de Riesz.</u>

Tota quasimartingala respecte de $(G_z)_{z\in T}$ descomposa de manera única en suma d'una martingala respecte de $(G_z)_{z\in T}$ i un quasipotencial respecte de $(G_z)_{z\in T}$.

<u>Teorema 3: Descomposició del tipus de Rao.</u>

Tota quasimartingala X respecte de $(G_z)_{z\in T}$ es pot escriure de manera única com $X = M + U - V$, on M és una martingala respecte de $(G_z)_{z\in T}$, i U i V són dos processos que compleixen les propietats següents:

a) $U_z, V_z \geq 0 \quad \forall z \in T$.

b) $U_z = V_z = 0 \quad \forall z \in \Gamma_u$.

c) U i V són dues submartingales respecte de $(G_z)_z \in T$.

d) U i V són dues supermartingales respecte de l'ordre parcial.

Endemés

$$|\mu_X|(T_0 \times \Omega) = E(U_{(o,o)} + V_{(o,o)}).$$

D'aquest teorema se'n dedueix que tota quasimartingala X és diferencia de dues supermartingales positives, febles si X és feble, i respecte de l'ordre parcial si X és una quasimartingala forta ó una 1- i 2-quasimartingala.

<u>Definició 3.</u> Sigui X una quasimartingala respecte de $(G_z)_{z\in T}$. Aleshores direm que $\mu_X$ té projecció contínua si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $g \subset T$ és una partició qualsevol i la família $\{A(z) \in G_z : z \in g\}$ satisfà $P(\cup_{z \in g} A(z)) < \delta$, aleshores $\Sigma_{z\in g} | \int_{A(z)} \Delta_g X(z).dP| < \varepsilon$.

<u>Definició 4.</u> Una aplicació D: $\Omega \to \mathbb{R}^2_+$ és una regió d'atur simple si:

a) Existeix una partició $\{z_{ij}\}_{i,j}$ de $\mathbb{R}^2_+$ i una familia de conjunts $\{A_{ij} \in G_{z_{ij}}\}i,j$ tal que $D(\omega) = \cup_{i,j}(z_{ij}, z_{i+1,j+1}] \cdot 1_{A_{ij}}(\omega)$.

b) Existeix un $z_0$ finit tal que $A_{ij} = \emptyset$ si $z_{ij} \notin ((o,o), z_0]$.

c) $\forall \omega \in \Omega$ tal que $D(\omega) \neq \emptyset$, si $z \in D(\omega)$, aleshores $z' \in D(\omega)$ $\forall z' < z$.

Donada una regió d'atur simple D, podem definir el procés X aturat a D com $X(D)(\omega) = \Sigma_{i,j} \Delta X(z_{ij}, z_{i+1,j+1}] \cdot 1_{A_{ij}}(\omega)$, i aleshores direm:

Definició 5. Un procés X pertany a la classe (D') si la família $\{X(D)$: D regió d'atur simple $\}$ és uniformament integrable.

Per acabar anem a demostrar:

Proposició 1. Sigui X una quasimartingala forta ó una 1- i 2-quasimartingala, contínua per la dreta en $L^1$ i tal que $\sup_{z\in T} E|X_z| < \infty$. Aleshores X pertany a la classe (D') si i només si $\mu_X$ té projecció contínua.

Demostració:

(només si): Per ésser X de la classe (D'), sabem que $\forall\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tal que si $P(A) < \delta$, aleshores $\sup_{D \text{ simples}} \int_A |X(D)|.dP < \varepsilon$.

Fixem doncs un $\varepsilon > 0$, i sigui $\delta > 0$ que verifica l'anterior propietat. Sigui ara $\{z_{ij}\}$ una partició de T i $\{A_{ij} \in \mathcal{G}_{z_{ij}}\}$ una col.lecció de conjunts tal que $P\,(\cup_{i,j} A_{ij}) < \delta$. Aleshores

$$\Sigma_{i,j} \left|\int_{A_{ij}} \Delta X(z_{ij}).dP\right|$$

$$\leq \int_{\cup_{i,j} A_{ij}} |X(D_1)|.dP < \varepsilon$$

on $D_1(\omega) = \cup_{i,j}(z_{ij}, z_{i+1,i+1}] \cdot 1_{A_{ij}}(\omega)$ és una regió d'atur simple

./.

(si): Utilitzarem aquí el teorema 3.5 de (1), el qual no només es verifica per les quasimartingalas febles (els V-processos, en la terminologia d'en Brennan), sinó que admet una generalització als altres tipus de quasimartingala.

Segons aquest teorema, $X = M + A$, on $M$ és una martingala del mateix tipus que $X$ i $A$ és un procés de variació afitada. Demostrarem que $M$ i $A$ són processos de la classe (D') i per tant $X$ sera també de la classe (D').

a) A és de la classe (D').

En efecte: $\{A(D)$: $D$ regió d'atur simple$\}$ és una família de variables aleatòries afitades per $\|A\| = \sup\{\Sigma_{z\in g}|\Delta_g A_z(\omega)|\}$ (on el suprem es pren sobre totes les particions $g \subset T$) i $\|A\| \in L^1(P)$ per hipòtesi; per tant la família és uniformament integrable.

b) M és de la classe (D').

Sigui $D$ una regió d'atur simple qualsevol. Aleshores $M(D)(\omega) = \Sigma_{i,j}\Delta M(z_{ij}, z_{i+1,j+1}]\cdot 1_{A_{ij}}(\omega) = M_{T_1}(\omega) - M_{T_2}(\omega) - M_{T_3}(\omega) + M_{T_4}(\omega)$, on els $T_i$ són els punts d'atur següents: $T_1(\omega) = \Sigma_{i,j} z_{A_{ij}}(\omega)$, $T_2(\omega) = \Sigma_{i,j} z_{i+1,j}\cdot 1_{A_{ij}}(\omega)$, $T_3(\omega) = \Sigma_{i,j} z_{i,j+1}\cdot 1_{A_{ij}}(\omega)$, $T_4(\omega) = \Sigma_{i,j} z_{i+1,j+1}\cdot 1_{A_{ij}}(\omega)$.

Utilitzant el teorema d'atur de Kurtz (veure (7)), tindrem que

$$\int_{\{|M(D)(\omega)|>a\}} |M(D)(\omega)|.dP$$

$$\leqslant \Sigma_{i=1}^{4}\int_{\{|M(D)(\omega)|>a\}} |M_{T_i}|.dP$$

$$\leqslant \Sigma_{i=1}^{4}\int_{\{|M(D)(\omega)|>a\}} E(|M_{(1,1)}|/\mathcal{F}_{T_i}).dP$$

$$= \Sigma_{i=1}^{4}\int_{\{|M(D)(\omega)|>a\}} |M_{(1,1)}|.dP \to 0$$

quan $a \to \infty$, uniformament en D./.

Els resultats del present treball formen part de la tesina llegida per l'autor el 22 d'Octibre de 1981, dirigida per na Marta Sanz Solé.

## REFERENCIES

1. Brennan,M. Planar Seminartingales. Journal of Multivar. Analysis, 9, 465-486 (1979).

2. Cairoli, R. and Walsh,J.B. Stochastic integrals in the plane. Acta Math., 134, 111-183 (1975).

3. Clarkson,J.A. and Adams,C.R. On definition of bounded variation for functions of two variables. Trans. Amer. Math. Soc., 35, 824-854 (1933).

4. Doléans-Dade, C. Existence du processus croissant natural associé a un potential de la classe (D). Z. Wahrsch. and verw. Geb., 9, 309-314 (1968).

5. Fisk,D.L. Quasi-martingales. Trans.Amer.Math.Soc., 120, 359-389 (1965).

6. Follmer,H. On the representation of semimartingales. The Annals of Probability, 1, 580-589(1973).

7. Kurtz,T.G. The optional sampling theorem for martingales indexed by directed sets. The Annals of Probability, 8, 675-681 (1980).

8. Metivier,M. and Pellaumail,J. On Doléans-Follmer's measure for quasimartingales. Illinois Journal of Mathematics, 77, 491-504(1975).

9. Orey,S. F-processes. In proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., vol. 2, p. p. 301-313 (1967).

10. Pellaumail,J. Sur l'integrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer. Astérisque, vol.19. Publication de la Société Mathématique de France (1973).

11. Rao.K.M. Quasi-martingales. Math. Scand., 24, 79-92 (1969).

Jaume Suñer Llabrés.
Dep. Mathématiques.
Esc. Tecn. Sup. d'Arquitectura del Vallès.
Universitat Politècnica de Barcelona.