Pub. Mat. UAB
Vol. 27 Nº 2 Juny 1983

SOBRE FILTROS ESTABLES DE GABRIEL VII

(Algunas relaciones entre teorías de torsión en A-mod y teorías de torsión en Mod-A)

José Ríos Montes

En [3,b] y [4], se definen los conceptos de semisimplicidad y regularidad, relativos a un filtro de Gabriel en un anillo A, en esta nota se define una función entre el conjunto de teorías de torsión hereditarias en A-mod y el conjunto de teorías de torsión hereditarias en mod-A, entre otros resultados, se prueba que en el caso estable, los conceptos antes mencionados se preservan bajo esta correspondencia.

En la última sección, se da una caracterización de los filtros de Gabriel en A que satisfacen la propiedad de que todo módulo simple de torsión es F-inyectivo y se estudian algunas propiedades que comparten estos filtros y aquellos que hacen de A un anillo F-regular.

La notación y terminología utilizada, sera la de [3,a] .

I.- RESULTADOS PRELIMINARES

Sea A un anillo con 1, denotamos por T, al conjunto de teorías de torsión hereditarias en A-mod y por T_d, al conjunto de teorías de torsión hereditarias en Mod-A .

Sea $(\mathbb{T},\mathbb{L})$ una teoría de torsión hereditaria en A-mod con filtro asociado $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{B}_{\mathbb{F}} = \{I A/I \in \mathbb{F}\}$ y $(\mathbb{T}_d,\mathbb{L}_d)$ la teoría de torsión en Mod-A, generada por los módulos derechos $\{A/J \ / \ J \in \mathcal{B}_{\mathbb{F}}\}$.

PROPOSICION 1.1. $(\mathbb{T}_d,\mathbb{L}_d)$ es una teoría de torsión hereditaria.

DEMOSTRACION: Las clases $\mathbb{T}_d$ y $\mathbb{L}_d$, se describen como sigue;

$$\mathbb{L}_d = \{N_A/\mathrm{Hom}_A(A/J,N) = 0 \ \forall \ J \in \mathcal{B}_{\mathbb{F}}\}$$

$$\mathbb{T}_d = \{M_A/\mathrm{Hom}_A(M,N) = 0 \ \forall \ N \in \mathbb{L}_d\}$$

Para probar la afirmación, basta hacer ver que $\mathbb{L}_d$ es cerrada bajo capsulas inyectivas.

Sean $N \in \mathbb{L}_d$, $J \in \mathcal{B}_{\mathbb{F}}$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(A/J, E(N))$, si $f \neq 0$ existe $x \in E(N)$, $x \neq 0$ tal que $f(\bar{1}) = x$, entonces $xJ = 0$ como N es submódulo esencial de $E(N)$, podemos elegir $y \in N$ de tal manera que $y \neq 0$ y $xa = y$ para algún $a \in A$ como J es ideal bilateral, $yJ = xaJ \subset xJ = 0$, entonces, podemos definir $g : A/J \to N$ por $g(\bar{a}) = ya$ y este morfismo no es cero, de aquí que para todo $J \in \mathcal{B}_{\mathbb{F}}$, $\mathrm{Hom}_A(A/J, E(N)) = 0$ esto nos dice que $(\mathbb{T}_d, \mathbb{L}_d)$ es una teoría de torsión hereditaria.

Definimos ahora, $\psi : T \to T_d$ como sigue :

$$\psi\,[\,(\mathbb{T},\mathbb{L})\,] = (\mathbb{T}_d,\mathbb{L}_d)\ .$$

OBSERVACIONES 1.2.

a) Si A es conmutativo, $\psi = 1_T$

b) Si $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}'$ son clases de torsión hereditarias en A-mod tales que $\mathbb{T} \subset \mathbb{T}'$ entonces $\mathbb{T}_d \subset \mathbb{T}_d'$.

c) Si $\mathbb{T} = \{0\}$ entonces $\mathbb{T}_d = \{0\}$

d) Si $\mathbb{T} =$ A-mod, $\mathbb{T}_d =$ Mod-A

e) Es fácil ver que si $\mathbb{F}$ es un filtro de Gabriel en A, entonces el conjunto $\mathbb{F}_0 = \{I_A / \ I \supset J_1 \ldots J_k$ con $J_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{F}}\}$ es una pretopología en A_A .

COROLARIO 1.3. Sea $\mathbb{F}_d$ el filtro de Gabriel asociado a $(\mathbb{T}_d,\mathbb{L}_d)$ entonces:

$\mathbb{F}_d = \{I_A /$ para todo J tal que $I \subset J \subsetneq A$, existe $a \in A-J$ tal que $(J : a) \in \mathbb{F}_0\}$.

DEMOSTRACION : [5].

OBSERVACION 1.4. Si los elementos de $\mathcal{B}_{\mathbb{F}}$ son finitamente generados como ideales derechos, entonces $\mathbb{F}_d = \mathbb{F}_0$.

PROPOSICION 1.5. Si $(\mathbb{T},\mathbb{L})$ es una teoría de torsión T.L.T. entonces $(\mathbb{T}_d,\mathbb{L}_d)$ es T.L.T.

DEMOSTRACION: Sea J el ideal bilateral idempotente, generador de $\mathbb{F}$, entonces; $\mathbb{F}_0 = \{I_A / J \subset I\}$ es un filtro de Gabriel y de aquí que $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}_d$.

PROPOSICION 1.6. Si $(\mathbb{T},\mathbb{L})$ se escinde centralmente, entonces $(\mathbb{T}_d,\mathbb{L}_d)$ se escinde centralmente.

DEMOSTRACION.- Sean $e,f,$ idempotentes centrales tales que $A = Ae \oplus Af$, donde $tA = A$ y $\mathbb{F} = \{{}_AI / Af \subset I\}$ de la proposición anterior, tenemos que $\mathbb{F}_d = \{I_A/fA \subset I\}$ y entonces $t_dA = eA$, por consiguiente $(\mathbb{T}_d,\mathbb{L}_d)$ se escinde centralmente.

II.- ANILLOS NETERIANOS

DEFINICION 2.1. Un filtro de Gabriel $\mathbb{F}$ en A es acotado, si $\mathbb{F}$ tiene una base consistente de ideales bilaterales.

OBSERVACION 2.2. Por 1.4, si A_A es neteriano, entonces, para cada teoría de torsión hereditaria, $(\mathbb{T},\mathbb{L}) \in \mathcal{T}$, tenemos que $\mathbb{F}_d$ es un filtro de Gabriel acotado.

Denotemos por $\xi(A)$ al conjunto de clases de isomorfismo de módulos derechos inyectivos inescindibles, y por Spec (A) al conjunto de ideales primos de A.

Sea A neteriano derecho y $\phi : \xi(A) \to \mathrm{Spec}(A)$, la función que asigna a cada inyectivo inescindible, su único ideal primo asociado, es conocido que esta función es suprayectiva, ya que, si $P \in \mathrm{Spec}(A)$, entonces $E(A/P) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ donde cada E_i es inyectivo inescindible y $E_i \cong E_j$ para todo i,j, sin embargo ϕ no es siempre inyectiva.

DEFINICION 2.3. Un anillo neteriano derecho A, es completamente acotado derecho si ϕ es biyectiva. En esta sección, se da una demostración distinta a las conocidas, de una caracterización de los anillos completamente acotados.

PROPOSICION 2.4. Sea A neteriano derecho y E_0, E_1, módulos derechos inyectivos inescindibles no isomorfos, entonces, la teoría de torsión cogenerada por E_0, es distinta a la teoría de torsión cogenerada por E_1.

DEMOSTRACION .- supongamos que E_0 esta cogenerado por E_1, probaremos que E_0 no cogenera a E_1.

Sea I un máximo en la familia de anuladores de elementos no nulos de E_0, este máximo existe porque A_A es neteriano, además $I \subsetneq A$, sea $x \in E_0-\{0\}$, elemento asociado a I, como E_1 cogenera a E_0, existe un morfismo distinto de cero, $f : A/I \to E_1$, notemos que f no es monomorfismo, ya que entonces tendríamos que $E_1 \cong E(A/I)$ pero $E(A/I) \cong E_0$ y de aquí $E_1 \cong E_0$ lo cual contradice la hipótesis, sea $J/I = \operatorname{Ker} f$, por lo anterior, $I \subsetneq J \subsetneq A$, entonces $A/J \cong \operatorname{Im} f \subset E_1$, la maximalidad de I nos dice que $\operatorname{Hom}_A(A/J,E_0) = 0$, de aquí que E_1 no está cogenerado por E_0.

TEOREMA 2.5. Sea A neteriano derecho, son equivalentes:

a) A es completamente acotado derecho.

b) Todo filtro de Gabriel en A_A es acotado.

DEMOSTRACION :

a) $\Rightarrow$ b) [5].

b) $\Rightarrow$ a) Sean E_0, E_1, A-módulos derechos inyectivos inescindibles, probaremos que no tienen el mismo ideal primo asociado.

Sea t_0 el radical asociado a la teoría de torsión cogenerada por E_0 y $\mathbb{F}_0$ el filtro de Gabriel correspondiente. Por la proposición anterior, podemos suponer que $t_0E_1 \neq 0$, sea P el primo asociado a E_1, como E_1 es inescindible, existe $x \in t_0E_1$, $x \neq 0$ tal que $P = An(xA)$, por otro lado, $an(x) \in \mathbb{F}_0$, como $\mathbb{F}_0$ es acotado, existe $J \in \mathbb{F}_0$, ideal bilateral tal que $J \subset an(x)$ entonces $xAJ = 0$ y de aquí que $J \subset P$ de lo cual tenemos que $P \in \mathbb{F}_0$.

Si P fuese el primo asociado a E_0, tendríamos un elemento $y \in E_0$, $y \neq 0$ tal que $P = An(yA)$ y entonces $P \subset an(y)$ lo cual nos dice que $an(y) \in \mathbb{F}_0$ y por lo tanto $0 \neq y \in t_0E_0 = 0$ que es absurdo, entonces E_0 y E_1 tienen distinto primo asociado es decir, A es completamento acotado.

COROLARIO 2.6. Si A es neteriano derecho y ψ es suprayectiva entonces A es completamente acotado derecho.

DEMOSTRACION :

La hipótesis junto con la observación 2.2, nos dicen que todo filtro de Gabriel en A_A es acotado.

COROLARIO 2.7. Si A es neteriano derecho e izquierdo entonces: ψ es biyectiva si y sólo si A es completamente acotado derecho é izquierdo.

DEMOSTRACION : Basta considerar el siguiente hecho:

Si A es neteriano y $\mathbb{F}$ es un filtro de Gabriel en A, acotado, entonces:

$$\mathbb{F} = \{I / I \supset P_1 \ldots P_k \text{ donde } P_i \in \mathbb{F} \cap \operatorname{Spec} A\} .$$

III.- CONCEPTOS RELATIVOS

En [3,b] y [4], se definieron los conceptos de semisimplicidad y regularidad, relativos a un filtro de Gabriel en A, en esta sección, probamos que en el caso estable, estos conceptos permanecen invariantes bajo ψ.

DEFINICION 3.1. Sea $\mathbb{F}$ un filtro estable de Gabriel en A, A es $\mathbb{F}$-semisimple, si todo ideal en $\mathbb{F}$ es sumando directo de A.

Una caracterización de anillos $\mathbb{F}$-semisimples es la siguiente: $A = tA \oplus \ell A$ con tA y ℓA generados por idempotentes centrales, $\mathbb{F} = \{ I / \ell A \subset I\}$ y tA semisimple.

TEOREMA 3.2. Si $\mathbb{F}$ es un filtro estable de Gabriel en A y A es $\mathbb{F}$-semisimple, entonces $\mathbb{F}_d$ es un filtro estable y A es $\mathbb{F}_d$-semi - simple.

DEMOSTRACION :

De la proposición 1.6, tenemos que $tA = t_d A$ y $\mathbb{F}_d = \{I_A / \ell A \subset I\}$, tA semisimple implica que todo ideal en $\mathbb{F}_d$ es sumando directo de A, por otro lado, ${}_A(A/\ell A)$ es proyectivo y de aquí que $\mathbb{F}_d$ es un filtro estable en A_A.

DEFINICION 3.3. Sea $\mathbb{F}$ un filtro de Gabriel en ${}_A A$, A es $\mathbb{F}$-regular si para todo ideal derecho J y todo I en $\mathbb{F}$, $JI = J \cap I$.

OBSERVACION 3.4. Si A es $\mathbb{F}$-regular y J e I son ideales bilaterales de $\mathbb{F}$ entonces $IJ = I \cap J$ y de aquí que
$\mathbb{F}_0 = \{I_A \subset A/I \supset J$ para algún $J \in \mathcal{B}_{\mathbb{F}}\}$.

LEMA 3.5. Sea $\mathbb{F}$ un filtro de Gabriel estable en ${}_A A$, si A es $\mathbb{F}$-regular entonces, para todo $I_A \in \mathbb{F}_0$, el A-módulo derecho A/I es plano.

DEMOSTRACION :

Sea $I \in \mathbb{F}_0$, como A es $\mathbb{F}$-regular, por teorema 2.2 de [4], el A-módulo A/I es $\mathbb{F}$-plano, por consiguiente el A-módulo izquierdo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A/I,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es $\mathbb{F}$-inyectivo (teorema 1.4 de [4]), de la observación 3.4, tenemos que existe $J \in \mathbb{F}$, J bilateral tal que $J \subset I$, es claro que J anula a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A/I,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A/I,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es $\mathbb{F}$-inyectivo y de torsión respecto a $\mathbb{F}$, la estabilidad de $\mathbb{F}$ nos da por resultado que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A/I,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es inyectivo y entonces $(A/I)_A$ es plano.

LEMA 3.6. Si $M \in$ Mod-A es $\mathbb{F}_0$-inyectivo entonces M es $\mathbb{F}_d$-inyectivo.

DEMOSTRACION :

Sea $M \in$ Mod-A tal que M es $\mathbb{F}_0$-inyectivo, sea $I \in \mathbb{F}_d$ y $f : I \to M$ un morfismo, consideremos la familia

$C = \{f' : I' \to M / I \subset I' \subset A$ y f' extiende a $f\}$ con la siguiente relación de orden $g \leq g'$ si $g : J \to M$, $g' : J' \to M$ con $J \subset J'$ y $g'\big|_J = g$, es fácil ver que $(C, \leq)$ satisface las hipótesis del lema de Zorn, sea $f_0 : I_0 \to M$ un máximo en C, si $I_0 \subsetneq A$, por el Corolario 1.3, existe $a \in A - I_0$ tal que $(I_0 : a) \in \mathbb{F}_0$, definamos $\phi : (I_0 : a) \to M$ de la siguiente manera $\phi(b) = f_0(ab)$, como M es $\mathbb{F}_0$ inyectivo, existe $\bar{\phi} : A \to M$ tal que $\bar{\phi}$ extiende a ϕ, sea $y = \bar{\phi}\ (1)$, definamos ahora

$$f_1 : [I_0 + aA] \to M \quad \text{por} \quad f_1(x + ab) = f_0\ (x) + yb\ ,$$

si $x + ab = x' + ab'$ entonces $x - x' = a(b' - b)$ y de aquí que $b' - b \in (I_0 : a)$, $f_0(x) - f_0(x') = f_0(a(b-b')) = y(b-b') = yb - yb'$ es decir, f_1 está bien definida, es claro también que f_1 extiende a f_0 lo cual es absurdo, por consiguiente $I_0 = A$ y M es $\mathbb{F}_d$-inyectivo.

TEOREMA 3.7. Sea $\mathbb{F}$ un filtro estable de Gabriel en ${}_A A$, si A es $\mathbb{F}$-regular entonces A es $\mathbb{F}_d$-regular.

DEMOSTRACION:

Por el teorema 2.2 de [4], basta probar que todo módulo izquierdo es $\mathbb{F}_d$-plano.

Por el lema 3.5, $(A/I)_A$ es plano para todo $I \in \mathbb{F}_0$ y de aquí que la sucesión exacta corta de A-módulos derechos

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0 \quad \text{es pura, es decir;}$$

$0 \to I \otimes_A M \to A \otimes_A M \to A/I \otimes_A M \to 0$ es exacta para todo $I \in \mathbb{F}_0$ y $M \in$ A-mod, esto nos dice que si $M \in$ A-mod, el A-módulo derecho $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es $\mathbb{F}_0$-inyectivo, aplicando aquí el lema 3.6 tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es $\mathbb{F}_d$-inyectivo, finalmente el teorema 1.4 de [4] da por resultado que ${}_AM$ es $\mathbb{F}_d$-plano y esto prueba que A es $\mathbb{F}_d$-regular.

IV. CLASES DE TORSION DONDE TODO MODULO SIMPLE ES $\mathbb{F}$-INYECTIVO.

En [4], se probó el siguiente teorema;

TEOREMA.- Sea A un anillo conmutativo y $\mathbb{F}$ un filtro estable de Gabriel en A, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) A es $\mathbb{F}$-regular.

b) Todo ideal en $\mathbb{F}$ es idempotente.

c) Todo A-módulo simple es $\mathbb{F}$-inyectivo.

d) Todo módulo simple y de torsión es inyectivo.

En esta sección, se da una caracterización en el caso general de los filtros que satisfacen la propiedad de que todo módulo simple y de torsión es $\mathbb{F}$-inyectivo, finalmente se estudian algunas propiedades que comparten estos filtros, con aquellos que hacen de A un anillo $\mathbb{F}$-regular.

Denotamos (como en [1]) por $\mathbb{M}$ a la clase de módulos M tales que $cM = \{0\}$, donde $cM = \bigcap_{k \in \mathbb{F}(M)} k$.

TEOREMA 4.1. Sea $\mathbb{F}$ un filtro estable en ${}_{A}A$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) Todo módulo simple y de torsión es inyectivo.

b) Todo módulo simple y de torsión es $\mathbb{F}$-inyectivo.

c) Todo módulo de torsión es semiprimitivo.

d) Todo módulo cíclico de torsión es semiprimitivo.

e) Si $I \in \mathbb{F}$, I es intersección de ideales máximos.

f) Si $M \in$ A-mod y $N \in \mathbb{F}(M)$, N es intersección de submódulos máximos de M.

g) cM es intersección de submódulos máximos de M, para todo $M \in$ A-mod.

h) Todo elemento de $\mathbb{H}$ es semiprimitivo.

i) Si $M \in$ A-mod, cada submódulo cerrado de M, es intersección de submódulos máximos de M.

j) $\mathbb{H}$ tiene un cogenerador que es suma directa de módulos simples.

DEMOSTRACION :

a) $\Rightarrow$ b) Inmediato.

b) $\Rightarrow$ c) Sea $M \in \mathbb{T}$ y $x \in M$, $x \neq 0$, por el lema de Zorn, elegimos $N \subset M$ submódulo máximo tal que $x \notin N$, sea $N_0 = \cap \{k \subset M / N \subsetneq k\}$ entonces $x \in N_0$ y N_0/N es simple además

$N_0/N \subset M/N$ y de aquí que N_0/N es de torsión, por b),

$M/N = N_0/N \oplus N_1/N$ como $x \in N_0$, $x \notin N$, y de aquí que $N = N_1$ entonces N es un submódulo máximo de M, por consiguiente

$\cap \{k/\ k$ es submódulo máximo de $M\} = \{0\}$ es decir M es semiprimitivo.

c) $\Rightarrow$ d) Es claro.

d) $\Rightarrow$ c) Teniendo en cuenta que $I \in \mathbb{F}$ si y sólo si $A/I \in \mathbb{T}$.

e) $\Rightarrow$ b) Sea S un A-módulo simple, $S \in \mathbb{T}$, $I \in \mathbb{F}$ y $f : I \to S$ un morfismo, $f \neq 0$, si $J = \ker f$ entonces $J \in \mathbb{F}$ ya que $I/J \cong S \in \mathbb{T}$ e $I \in \mathbb{F}$, aplicando e), existe un ideal máximo $I_0 \in \mathbb{F}$ tal que $J \subset I_0$, $I \not\subset I_0$ y de aquí que $A = I + I_0$ por otro lado, $J = I \cap I_0$, definimos ahora, $\bar{f} : A \to S$ como sigue,

$\bar{f}(x+x_0) = f(x)$, donde $x \in I$, $x_0 \in I_o$, si $x + x_0 = x' + x_0'$ entonces $x - x' = x_0' - x_0 \in I_0 \cap I$ por lo cual $f(x-x') = 0$ entonces $\bar{f}$ está bien definida y de aquí que S es $\mathbb{F}$-inyectivo.

b) $\Rightarrow$ a) Inmediato de la estabilidad de $\mathbb{F}$.

c) $\Rightarrow$ f) Igual que d) $\Rightarrow$ e)

f) $\Rightarrow$ g) $cM = \bigcap_{k \in \mathbb{F}(M)} k$, como cada $\mathbb{F}$-submódulo de M es intersección de submódulos máximos, tenemos a su vez que cM es intersección de submódulos máximos de M.

g) $\Rightarrow$ h) Si $M \in \mathbb{H}$ entonces $cM = \{0\}$, la hipótesis da como consecuencia que M es semiprimitivo.

h) $\Rightarrow$ i) Sea $M \in$ A-mod y N un submódulo cerrado de M entonces $M/N \in \mathbb{H}$ por lo tanto M es semiprimitivo y de aquí que N es intersección de submódulos máximos de M.

i) $\Rightarrow$ c) Se sigue del hecho que $\mathbb{T} \subset \mathbb{H}$.

a) $\Rightarrow$ j) Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de clases de isomorfismo de módulos simples de torsión, sea $C = \bigoplus_{S_\alpha \in \mathcal{C}} S_\alpha$, probaremos que C es un cogenerador de $\mathbb{H}$, por la proposición 1.1. de [1], basta ver que todo módulo de torsión está cogenerado por C .

Sea $M \in \mathbb{T}$, $x \in M-\{0\}$, existe una sucesión exacta

$< x > \xrightarrow{f} S \longrightarrow 0$ con S módulo simple y $S \in \mathbb{T}$, por la hipótesis, existe $\bar{f} : M \to S$ tal que $\bar{f}$ extiende a f , como $S \subset C$ entonces M está cogenerado por C, por otro lado $C \in \mathbb{H}$ y de aquí que C es un cogenerador para $\mathbb{H}$.

j) $\Rightarrow$ a) Sea C un cogenerador de $\mathbb{H}$ con $C = \bigoplus_{\alpha \in X} S_\alpha$ donde S_α es un A-módulo simple para todo $\alpha \in X$.

Sea $S \in \mathbb{T}$, S simple, como $\mathbb{F}$ es estable, $E(S) \in \mathbb{T}$ y por lo tanto $E(S) \in \mathbb{H}$, ya que C es cogenerador de $\mathbb{H}$, dado $x \in S$, $x \neq 0$ existe $f : E(S) \to C$ morfismo tal que $f(x) \neq 0$, esto junto con el hecho que S es simple y esencial en $E(S)$ implican que f es monomorfismo, entonces $E(S)$ es semisimple e inescindible, de aquí que $S = E(S)$; lo cual prueba que S es inyectivo.

Si no suponemos la estabilidad de $\mathbb{F}$, tenemos entonces:

TEOREMA 4.2. Sea $\mathbb{F}$ un filtro de Gabriel en A, son equivalentes las siguientes afirmaciones;

a) Todo módulo simple y de torsión, es inyectivo.

b) Todo módulo de torsión es semiprimitivo.

c) Si $I \in \mathbb{F}$, I es intersección de ideales máximos.

d) Si $M \in A$-mod y $N \in \mathbb{F}(M)$ entonces N es intersección de submódulos máximos de M.

COROLARIO 4.3. Si $\mathbb{F}$ satisface las condiciones del teorema anterior entonces todo ideal en $\mathbb{F}$ es idempotente.

DEMOSTRACION :

Sea $I \in \mathbb{F}$ tal que $I^2 \subsetneq I$, como $I^2 \in \mathbb{F}$, existe un ideal máximo I_0 tal que $I^2 \subset I_0$, $I \not\subset I_0$, de aquí que $A = I + I_0$, sean $x \in I$, $x_0 \in I_0$ tales que $1 = x + x_0$, entonces $x = (x^2 + xx_0) \in I_0$ entonces $1 \in I_0$ lo cual es absurdo, por lo tanto $I = I^2$.

OBSERVACION 4.4. Notemos que si A es $\mathbb{F}$-regular e $I \in \mathbb{F}$ entonces $I = I^2$, esto es inmediato de la igualdad $IAI = IA \cap I$.

El siguiente teorema es entonces válido para filtros que hacen de A un anillo $\mathbb{F}$-regular como para los descritos en el teorema 4.2.

TEOREMA 4.5. Sea $\mathbb{F}$ un filtro de Gabriel en A, son equivalentes las siguientes afirmaciones;

a) Todo ideal en $\mathbb{F}$ es idempotente.

b) Si $J \in \mathbb{F}$ es bilateral, entonces $(A/J)_A$ es $\mathbb{F}$-plano.

c) Si $J \in \mathbb{F}$ es bilateral, entonces $JI = J \cap I$ para todo $I \in \mathbb{F}$.

DEMOSTRACION :

a) $\Rightarrow$ c) Sea $I \in \mathbb{F}$, $J \cap I \in \mathbb{F}$, por lo tanto $(J \cap I)^2 = J \cap I$. $JI \subset J \cap I$, por otro lado es claro que $(J \cap I)^2 \subset JI$, por consiguiente $JI = J \cap I$.

c) $\Rightarrow$ a) Sea $I \in \mathbb{F}$, entonces $IA \in \mathbb{F}$, por la hipótesis, $IAI = IA \cap I$, de aquí que $I^2 = I$.

b) $\Rightarrow$ c) Es consecuencia del teorema 1.13 de [4].

COROLARIO 4.6. Si en 4.5 pedimos que $\mathbb{F}$ sea estable entonces c) se puede modificar por

c') Si $J \in \mathbb{F}$ es ideal bilateral entonces $(A/J)_A$ es plano.

DEMOSTRACION :

Utilizando el mismo argumento que en la demostración del lema 3.5.

REFERENCIAS

1) Colavita L., Raggi F., Ríos J. Sobre filtros estables de Gabriel V. Anales del Instituto de Matemáticas UNAM, Vol. 17 no. 1 p. 1-16 (1977)

2) Fisher Joe W. Von Neumann regular rings versus V-rings. Ring Theory. Proceedings of the Oklahoma conference. Marcel Dekker Inc. New York 1974 p. 101-119 .

3) González M. et al. a) Sobre filtros estables de Gabriel I. Anales del Instituto de Matemáticas UNAM, Vol. 16 no. 2 p. 135-154 (1976) .

b) Sobre filtros estables de Gabriel II, Anales del Instituto de Matemáticas UNAM, Vol. 16 no. 2, p. 155-173 (1976) .

4) Ríos, J. Sobre filtros estables de Gabriel IV Anales del Instituto de Matemáticas UNAM. Vol. 17 no. 1, p. 95-108 (1977) .

5) Stenstrom Bo. Rings of Quotients. New York-Berlin: Springer Verlag 1975 .

Rebut 20 d'agost del 1982

Area de la Investigación Científica
Circuito Exterior-Ciudad Universitaria

Mexico 20, D.F.

MEXICO