Pub. Mat. UAB
Vol. 28 Nº 1 Maig 1984

ESTUDI D'UN PUNT D'ATUR SOBRE NxN

M. Farré

Definirem un punt d'atur que pren valors sobre $N\times N$ i generalitza el temps d'arribada a un cert nivell del passeig aleatori ordinari.

L'objectiu d'aquest treball és demostrar que aquest punt d'atur és finit amb probabilitat 1.

0. NOTACIO, DEFINICIONS I PROPIETATS PREVIES

Sigui $\{N= 0,1,2,\dots,\}$ el conjunt dels nombres naturals.

En $N\times N$ tindrem l'ordre natural, $\leq$, definit coordenada a coordenada.

Sigui (Ω,F,P) un espai de probabilitat. Considerem una família creixent de sub-σ-àlgebres de F, $(F_t,\ t\in N\times N)$. Direm que una variable aleatòria T, definida en (Ω,F,P) i a valors en $(N\times N)\cup\{\infty\}$, és un punt d'atur relativament a la família $(F_t,\ t\in N\times N)$ si i només si per a tot $t\in N\times N$ el conjunt $\{T\leq t\}$ és de F_t.

Si T és un punt d'atur es defineix:

$$F_T = \{A\in F:\ A\cap\{T\leq t\}\in F_t,\ \forall t\in N\times N\}$$

que és una sub-σ-àlgebra de F.

És fàcil veure que T és un punt d'atur relativament a (F_t) si i només si $\{T=t\}$ és de F_t, per a tot $t\in N\times N$.

Si $T_1\leq T_2$ són dos punts d'atur, aleshores $F_{T_1}\subseteq F_{T_2}$.

Donat $(X_t,\ t\in N\times N)$ un procés adaptat a la família (F_t) i T un punt d'atur a valors en $N\times N$, la funció X_T, definida per $(X_T)(w) = (X_{T(w)}(w))$, és una variable aleatòria F_T-mesurable.

1. CONSTRUCCIO DEL PUNT D'ATUR T

Considerem una família de v.a. independents i idènticament distribuïdes $\{X_{ij},\ (i,j)\in N\times N\}$ [Nota: Quan no quedin clares les coordenades del punt indicador escriurem $X_{i,j}$]. Els imposarem que siguin de quadrat integrable i posarem $\sigma^2=\mathrm{Var}(X_{ij})$ i $\mu=E(X_{ij})$.

Designarem per

$$\{S_{ij}\} = \{\sum_{\substack{k\leq i\\ h\leq j}} X_{kh}\}$$

la família de sumes parcials.

$\{F_{ij},\ (i,j)\in N\times N\}$ serà la família creixent de sub-σ-àlgebres associada a la família de variables X_{ij} de manera natural. Es a dir, F_{ij} és la σ-àlgebra generada per les variables $\{X_{kh},\ k\leq i, h\leq j\}$.

En aquestes condicions, i recursivament, construïm la següent successió de v.a. que prenen valors en NxN:

$(r_0,t_0) = (0,0)$, i per $n\geq 0$

$(r_{n+1},t_{n+1}) = (r_n + I_{\{X_{r_n t_n}\in B\}}, t_n + I_{\{X_{r_n t_n}\in B^c\}})$,

on B és un borelià de $\mathbb{R}$ tal que

$$P(\{X_{ij}\in B\})=p > 0 \quad \text{i} \quad P(\{X_{ij}\in B^c\})=q > 0,$$

per a tot parell (i,j).

Es fàcil comprovar, per inducció, que, per a tot $n\geq 0$, (r_n,t_n) és un punt d'atur sobre NxN. Notem que, en suposar (r_n,t_n) punt d'atur, ja té sentit considerar la v.a. $X_{r_n t_n}$ que intervé en la definició de (r_{n+1},t_{n+1}).

La successió $\{(r_n,t_n),\ n\geq 0\}$ és una trajectòria aleatòria que surt de l'origen de coordenades i, per a tot $n\geq 0$, (r_n,t_n) és un punt de la recta $x+y=n$. En cada pas es decideix el camí segons una variable aleatòria de Bernouilli de paràmetre p.

1.1. Proposició

Les variables aleatòries $(X_{r_n t_n})$ són independents i idènticament distribuïdes amb la mateixa llei que les (X_{ij}).

Demostració: Per a tot borelià C, i per a tot $n \geq 0$ tindrem

$$P[X_{r_{n+1} t_{n+1}} \in C/F_{r_n t_n}] = \sum_{i=0}^{n} (P[r_n = i,\ X_{i,n-i} \in B,\ X_{i+1,n-1} \in C/F_{r_n t_n}] +$$

$$+ P[r_n = i,\ X_{i,n-i} \in B^c,\ X_{i,n-i+1} \in C/F_{r_n t_n}]) = P(X_{oo} \in C);$$

ja que, per cada i, les σ-àlgebres $F_{r_n t_n}$ i $F_{i,n-i}$ tenen la mateixa traça sobre el conjunt $\{r_n = i\}$. ■

Aquest resultat es pot obtenir també com a conseqüència d'un teorema degut a Krengel i Sucheston ([1], p.211, teorema 3.1) formulat utilitzant el concepte de tàctica. Més precisament, la família de parts de F, $\{H_{st},\ s,t \in N \times N,\ s \leq t\}$ definida per $H_{s,s+(1,0)} = \{X_s \in B\}$, $H_{s,s+(0,1)} = \{X_s \in B^c\}$, $H_{st} = \emptyset$ altrament, és una tàctica en el sentit de Krengel i Sucheston.

Sigui $a \in R$, $a \geq 0$. Definim:

$$\nu = \inf\{n \geq 0 : |S_{r_n t_n}| > a\ ,\ (\nu = \infty \text{ si el conjunt és buit}).$$

Diem $T = (r_\nu, t_\nu)$ si $\nu \neq \infty$, i $T = \infty$ si $\nu = \infty$.

1.2. Proposició.

T és un punt d'atur a valors en $(N \times N) \cup \{\infty\}$.

Demostració: Per tot $(m,n) \in N \times N$ anomenarem r una aplicació injectiva i creixent de $\{0,1,\ldots,m+n\}$ dins $(N \times N) \cap [(0,0),(m,n)]$. El nombre d'aplicacions injectives distintes és $(m+n)!/m!n!$.

Podem escriure:

$$\{T=(m,n)\} = \bigcup_{r}(\{|S_{mn}|>a\} \cap \{(r_i,t_i)=r(i),\ i=0,\dots,m+n\} \cap [\bigcap_{i=o}^{m+n-1} \{|S_{r(i)}| \leq a\}])$$

que ens dóna el conjunt $T=(m,n)$ com a unions i interseccions finites d'elements de F_{mn}.■

T és el primer punt en què el valor absolut de les sumes parcials S_{ij} arriba a un cert nivell a, en considerar aquestes sumes en els punts de la successió creixent $\{(r_n,t_n),\ n \geq 0\}$.

2. TEOREMA: T ES QUASI SEGURAMENT FINIT

El següent resultat ens demostra que el punt d'atur T és finit amb probabilitat 1, tal com podíem esperar degut a l'analogia que guarda amb el passeig aleatori ordinari.

2.1. Teorema

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\nu > n\}) = 0$$

Demostració: Distingirem dos casos A) $\mu=0$; B) $|\mu|>0$.

A) $\mu=0$.

Fixem $\delta>1$, $\delta\in R$, i considerem les corbes del pla:

$$x = y^{\delta} \qquad i \qquad y = x^{\delta}.$$

Cada punt aleatori (r_n,t_n), per n prou gran, pot trobar-se entre les dues corbes o entre una d'elles i l'eix. Fent disjunció de casos i majorant s'obté:

$$P\{\nu>n\} \leq P\{r_n > t_n^{\delta}\}+P\{t_n>r_n^{\delta}\}+P\{\{t_n^{1/\delta} \leq r_n \leq t_n^{\delta}\}\cap\{\nu>n\}\}. \qquad (1)$$

Degut a la simetria entre els dos primers sumands de (1) serà suficient veure que

$$P(\{t_n^{1/\delta} \leq r_n \leq t_n^{\delta}\}\cap\{\nu>n\}) \to 0, \quad i \text{ que } \quad P\{r_n>t_n^{\delta}\} \to 0.$$

Escrivim:

$$P\{r_n>t_n^{\delta}\} = P\{n>t_n+t_n^{\delta}\} = P\{1>(t_n/n)+(t_n/n)^{\delta}n^{\delta-1}\}. \qquad (2)$$

Donat que

$$t_n = \sum_{i=0}^{n} (I_{\{X_{r_i t_i} \in B^c\}});$$

tenint en compte la proposició 1.1 i per la Llei Forta dels Grans Nombres es té que $(t_n/n) \to q$ (q.s.), aplicant-ho a (2) s'obté

$$P\{r_n > t_n^{\delta}\} \to 0.$$

Ens queda per comprovar que $P(A_n) \to 0$, on

$$A_n = \{\nu > n\} \cap \{t_n^{1/\delta} \leq r_n \leq t_n^{\delta}\}.$$

Direm $K_n = \{k=(0,k_1,k_2,\ldots,k_n) : k_{i+1}-k_i = 0 \text{ ó } 1\}$, aleshores

$$P(A_n) = \sum_{k \in K_n} P[A_n \cap \{|S_{r_n t_n}| \leq a\} \cap \{r_0=0, r_1=k_1,\ldots,r_n=k_n\}] =$$

$$= \sum_{k \in K_n} P[A_n \cap \{|S_{k_n, n-k_n}| \leq a\} \cap G_k],$$

on $G_k = \{r_0=0,\ldots,r_n = k_n\}$.

Si considerem la següent descomposició de Ω: per $\alpha > 0$

$$\Omega = \{|\sum_{i=0}^{n} X_{k_i, i-k_i}| \leq n^{\frac{1}{2}+\alpha}\} \cup \{\sum_{i=0}^{n} |X_{k_i, i-k_i}| > n^{\frac{1}{2}+\alpha}\} \qquad (3)$$

i diem:

$$S'_{k_n, n-k_n} = S_{k_n, n-k_n} - \sum_{i=0}^{n} X_{k_i, i-k_i} \quad ;$$

això ens permet escriure

$$P(A_n) \leq \sum_{k \in K_n} P[A_n \cap G_k \cap \{|S'_{k_n, n-k_n}| \leq a+n^{\frac{1}{2}+\alpha}\} \cap \{|\sum_{i=0}^{n} X_{k_i, i-k_i}| \leq n^{\frac{1}{2}+\alpha}\}] +$$

$$+ \sum_{k \in K_n} P[A_n \cap G_k \cap \{|S_{k_n, n-k_n}| \leq a\} \cap \{|\sum_{i=0}^{n} X_{k_i, i-k_i}| > n^{\frac{1}{2}+\alpha}\}] \qquad (4)$$

Pel segon sumatori, que notarem $\sum_2^n$, fem l'afitació:

$$\sum_2^n \leq \sum_{k \in K_n} P[G_k \cap \{|\sum_{i=0}^{n} X_{k_i, i-k_i}| > n^{\frac{1}{2}+\alpha}\}] \leq$$

$$\leq (1/(n^{1+2\alpha}))\cdot\sum_{k\in K_n}\int_{G_k}|\sum_{i=0}^{n} X_{k_i,i-k_i}|^2\,dP = (1/(n^{1+2\alpha}))(n+1)\sigma^2, \qquad (5)$$

deguda al fet que les v.a. (X_{ij}) són i.i.d., centrades, amb variància σ^2, i que els G_k són dos a dos disjunts i recobreixen Ω.

L'afitació (5) demostra que el sumatori, $\sum_2^n$, convergeix cap a zero quan n tendeix a infinit.

El primer sumatori, $\sum_1^n$, el majorem de la següent manera:

$$\sum_1^n \leq \sum_{k\in K_n} P[\{|S'_{k_n,n-k_n}| \leq a+n^{\frac{1}{2}+\alpha}\}\cap G_k\cap\{t_n^{1/\delta}\leq r_n\leq t_n^{\delta}\}]. \qquad (6)$$

Si indiquem per β_k^n el nombre de variables aleatòries que sumem dins $S'_{k_n,n-k_n}$, és fàcil comprovar que fixat n, i quan ens mantenim dins la regió $\{t_n^{1/\delta}\leq r_n\leq t_n^{\delta}\}$, aquest nombre està comprès (uniformement respecte k) entre els següents límits:

$$(n/2)^{(1/\delta)+1} \leq \beta_k^n \leq (n/2)^2; \qquad (7)$$

de manera que per a tot $\varepsilon > 0$ es pot trobar un $n_0\in N$ tal que, si $n\geq n_0$ es compleixi:

$$(a+n^{\frac{1}{2}+\alpha})/\sqrt{\beta_k^n} < \varepsilon, \quad \text{sempre que } 1/(2\delta) > \alpha > 0.$$

Per tant, per a tot $n\geq n_0$, i per α i δ que satisfacin l'anterior relació, es compleix:

$$\sum_1^n \leq \sum_{k\in K_n} P\{(|S'_{k_n,n-k_n}|/\sqrt{\beta_k^n}) < \varepsilon\}\cdot P(G_k), \qquad (8)$$

ja que les variables que sumen dins $S'_{k_n,n-k_n}$ són independents de les variables aleatòries que determinen el conjunt G_k.

Fixat $\varepsilon' > 0$, el Teorema Central del Límit ens diu que existeix un

n_1 tal que per tot $n \geq n_1$ i per tot conjunt $U_n \subseteq N^2$ de Card.=n,

$$P\{(1/\sqrt{n}) \cdot |\sum_{(i,j)\in U_n} X_{ij}| < \varepsilon\} \leq \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) + \varepsilon',$$

on Φ representa la funció de distribució d'una llei $N(0,\sigma^2)$.

Degut a l'afitació uniforme respecte k donada per (7) tindrem: per a tot $n \geq m_o = \mathrm{Max}(n_o, 2([n_1^{(1/\delta+1)^{-1}}]+1))$ es compleix:

$$P\{|S'_{k_n,n-k_n}| / \sqrt{\beta_k^n} < \varepsilon\} \leq \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) + \varepsilon'.$$

En conseqüència,

$$\sum\nolimits_1^n \leq \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) + \varepsilon', \quad \text{per a tot } n \geq m_o.$$

Com ε i ε' són arbitraris, queda demostrada la convergència cap a zero de $\sum_1^n$, i per tant de $P(A_n)$.

B) $|\mu| > 0$.

L'esquema general de la demostració és anàleg al del cas $\mu=0$. No obstant cal precisar certs detalls que hem de tractar de manera diferent.

La partició donada per (3) no és ara adequada, ja que a (5) obtindríem, per $|\mu| > 0$:

$$(1/(n^{1+2\alpha}))((n+1)\sigma^2 + n(n+1)\mu^2)$$

que no convergeix cap a 0. Considerem la següent partició:

$$\Omega = \{|\sum_{i=o}^{n} X_{k_i,i-k_i}| \leq n^{1+\lambda/2}\} \cup \{|\sum_{i=o}^{n} X_{k_i,i-k_i}| > n^{1+\lambda/2}\}, \quad \lambda > 0.$$

També obtindrem la separació de $P(A_n)$ en dos sumatoris:

$$P(A_n) = \sum\nolimits_1^n + \sum\nolimits_2^n,$$

i la convergència cap a zero del segon, $\sum_2^n$, es demostra utilitzant els mateixos arguments que en l'apartat A). No és així pel primer sumatori:

$$\sum_1^n \leq \sum_{k \in k_n} P[\{|S'_{k_n,n-k_n}| \leq a+n^{1+\lambda/2}\} \cap G_k \cap \{t_n^{1/\delta} \leq r_n \leq t_n^{\delta}\}],$$

que estudiarem considerant el conjunt

$$\{|S'_{k_n,n-k_n}| / (\beta_k^n)^d \leq (a+n^{1+\lambda/2})/(\beta_k^n)^d\},$$

on $d < 1$ ha de ser tal que

$$d > ((2+\lambda)\,\delta \,/\, 2(1+\delta)), \quad \delta > 1, \; \lambda > 0.$$

Amb la condició anterior, i per l'afitació uniforme (7):

$$\lim_n [(a+n^{1+\lambda/2})/(\beta_k^n)^d] = 0.$$

Aleshores, per a tot $\epsilon > 0$, i per n més gran o igual que un cert n_o obtenim:

$$\sum_1^n \leq \sum_{k \in K_n} [P\{|S'_{k_n,n-k_n}| / (\beta_k^n)^d < \epsilon\} \cdot P(G_k)] =$$

$$= \sum_{k \in k_n} [P\{|S'_{k_n,n-k_n}| / \beta_k^n < \epsilon (\beta_k^n)^{d-1}\} \cdot P(G_k)] \leq$$

$$\leq \sum_{k \in K_n} [P\{|S'_{k_n,n-k_n}| / \beta_k^n < \epsilon (2/n)^{(1-d)(\delta+1)/\delta}\} \cdot P(G_k)]; \tag{9}$$

aquí hem aplicat altre cop l'afitació uniforme (7) i els arguments d'independència de les S'_{ij} respecte els G_k que ja utilitzàrem pel cas μ nul.la.

Per la Llei Feble dels Grans Nombres sabem que: $\forall\varepsilon' > 0$, $\forall\gamma > 0$, $\exists m_o$ tal que $\forall m \geq m_o$ i per a tot conjunt $U_m \subset N \times N$ de cardinal m

$$P\{|\mu| - \varepsilon' \leq (1/m) \cdot |\sum_{(i,j)\in U_m} X_{ij}| \leq |\mu| + \varepsilon'\} \geq 1-\gamma.$$

Si prenem $n \geq 2([m_o^{(1/\delta\ +1)^{-1}}]+1) = n_1$, es satisfà que $\beta_k^n \geq m_o$, per tant

$$P\{|S'_{k_n,n-k_n}| / \beta_k^n < |\mu| - \varepsilon'\} < \gamma. \tag{10}$$

D'altra banda, per a tot $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon' < |\mu|$, a partir d'un cert n_2, $\forall n \geq n_2$:

$$\epsilon(2/n)^{(1-d)(\delta+1)/\delta} < |\mu| - \varepsilon'. \tag{11}$$

Per tant, per a tot $n \geq \max(n_o, n_1, n_2)$, aplicant simultàniament (9), (10) i (11) s'obtè:

$$\sum\nolimits_1^n < \gamma \sum_{k\in K_n} P(G_k) = \gamma, \quad \gamma > 0 \text{ arbitrari.}$$

I això acaba la demostració. ■

REFERÈNCIES

[1] Krengel, U. and Sucheston, L. "Stopping Rules and Tactics for Processes Indexed by a Directed Set". Journal Mult. Anal. 11, 199-299 (1981).

[2] Walsh, John B. "Stopping Points and Optional Increasing Paths". Lecture Notes in Math. 863 (172-201). Proceedings, Paris 1980.

Rebut el 13 d'octubre del 1984

Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques
Departament d'Estadística Matemàtica.
Plaça Universitat
Barcelona - 7
ESPANYA