Pub. Mat. UAB
Vol. 28 Nº 2-3 Set. 1984

INYECTORES Y COCIENTES. EXTENSIONES INYECTIVAS.

A. Bolado Caballero

J. R. Martinez Verduch

1.- Introducción

Todos los grupos se suponen finitos. Utilizamos la "aproximación local" de una clase de Fitting (cf. [1]) para presentar un método constructivo, en imagenes epimorfas de un grupo, de tales aproximaciones que asegura la conservación del carácter de inyector en las imagenes de inyectores de subgrupos con sección-radical en la clase S de los grupos resolubles.

2.- Extensiones F-inyectivas.

Sea G un grupo. For un bloque de G entendemos una colección F de subgrupos de G , estable por Int(G) y a la que pertenece el subgrupo trivial. Dado un bloque F en un grupo G , queda inducido en cada $T \leq G$ un bloque $F_T = \{ L \leq T \mid L \in F \}$. For el concepto de F-subgrupo entendemos el de un elemento de F , por F-maximal en $T \leq G$ el de "maximal en F_T". Un subgrupo V de $T \leq G$ es un F-inyector de T , si $V \cap N$ es F-maximal en N $\forall N \trianglelefteq\trianglelefteq T$.

(2.1) Definición (cf. [1]) Sea F un bloque de un grupo G . F se dice bloque de Fitting de G si:

i) $N \trianglelefteq\trianglelefteq T \in F \Longrightarrow N \in F$

ii) $N_i \trianglelefteq N_1N_2$, $N_i \in F$ $i = 1,2 \Longrightarrow N_1N_2 \in F$

Observaciones. Sea F un bloque de Fitting de un grupo G:

(1) Notaremos por $G_F = \langle N \mid N \trianglelefteq G , N \in F \rangle$, $\forall N \trianglelefteq G$

$G_F \cap N = N_{F_N}$ que notaremos simplemente por N_F.

(2) Si K es una clase de Fitting , $F \cdot K = \{ T \leq G \mid T / T_F \in K \}$ es un bloque de Fitting de G. En particular $F \cdot S$ es un bloque de Fitting de G y se tiene $F \cdot S = \{ T \leq G \mid T^S \in F \}$ donde por T^S notamos el residual resoluble de T.

(3) "Cada $F \cdot S$-subgrupo de G posee una única clase conjugada de F-inyectores" (cf. (2.2) de [2]) .

Resulta inmediato:

(2.2) Proposición. Sea $N \trianglelefteq G$ y $\bar{F}$ un bloque de Fitting de G / N . Se verifica:

i) $F = \{ T \leq G \mid TN / N \in \bar{F} \}$ es un bloque de Fitting de G.

ii) Si V / N es un $\bar{F}$-inyector de un $\bar{F} \cdot S$-subgrupo T / N de G / N , entonces T es un $F \cdot S$-subgrupo y V es un F-inyector de T.

En lo que sigue F denota un bloque de Fitting de un grupo G. Mediante la aplicación reiterada de (2.5) de [2] se obtiene:

(2.3) Proposición. Sea T un $F \cdot S$-subgrupo de G y una serie de T $1 = T_o \trianglelefteq \dots \trianglelefteq T_n = T$, tal que los factores T_{i+1} / T_i , $i = o,\dots,n-1$ son nilpotentes o perfectos. Sea $V \leq T$, son equivalentes:

i) V es un F-inyector de T

ii) $T^S \leq V$ y $V \cap T_i$ es F-maximal en T_i $i = o,\dots,n$

Aplicando (2.3) a la serie principal de T pasando por M , obtenemos:

(2.4) Lema. (cf. [3]). Sea T un $F \cdot S$-subgrupo de G, $M \trianglelefteq T$ y V un F-subgrupo de T tal que $T = MV$. Son equivalentes:

i) V es un F-inyector de T

ii) $V \cap M$ es un F-inyector de M.

(2.5) Definición. Sea M un $F \cdot S$-subgrupo normal de G. Llamaremos extensión F-inyectiva de M a todo $F \cdot S$-subgrupo T de G tal que $T = MV$ donde V es un F-inyector de T.

(2.6) Teorema. Sea $M \trianglelefteq G$ y T un $F \cdot S$-subgrupo de G tal que $M \leq T$. Se verifica:

i) $\bar{F} = \{ H / M \mid H$ es una extensión F-inyectiva de M $\}$ es un bloque de Fitting de G / M .

ii) T / M es un $\bar{F}\cdot S$-subgrupo.

iii) Si V es un F-inyector de T, VM / M es un $\bar{F}$-inyector de T / M.

Demostración. i) Se sigue facilmente que $\bar{F}$ es un bloque de G / M. Suponer $K / M \trianglelefteq H / M$, H / M un $\bar{F}$-subgrupo y sea V un F-inyector de H: $K = K \cap (MV) = M.(K \cap V)$, luego K es una extensión F-inyectiva de M. Finalmente sean $H_i / M \trianglelefteq H_1H_2 / M$, H_i / M $\bar{F}$-subgrupos $i = 1,2$ y V un F-inyector de H_1H_2, dado que $H_i = M.(V \cap H_i)$ $i = 1,2$ concluimos $H_1H_2 = MV$ es decir H_1H_2 / M es un $\bar{F}$-subgrupo.
ii) Probaremos que $(T / M)^S = T^SM / M$ es un $\bar{F}$-subgrupo. Sea V un F-inyector del $F\cdot S$-subgrupo T^SM, puesto que $T^S \leq V$ se sigue $T^SM = MV$.
iii) Suponer $K / M \trianglelefteq\trianglelefteq T / M$ y sea $H / M = (VM / M) \cap (K / M)$. Se tiene $H = M.(V \cap K)$ y dado que $K^S \leq V \cap K \leq (V \cap K).M \leq K$ concluimos que H es una extensión F-inyectiva de M. Probaremos finalmente que H / M es $\bar{F}$-maximal en K / M. Sea R / M un $\bar{F}$-subgrupo tal que

$$H / M \leq R / M \trianglelefteq K / M$$

puesto que por (2.7) de [2] es $V \cap K$ un F-inyector de R y R / M un $\bar{F}$-subgrupo se tiene $R = M.(V \cap K) = H$.

Finalizamos este trabajo haciendo observar el carácter "transitivo" de la construcción dada en (2.6) i), concretamente :
Sean N_i $(i = 1,2)$ subgrupos normales de G, tales que $N_1 \leq N_2 \in F\cdot S$, denotamos para $i = 1,2$ por

$$\bar{F}_i = \{ E / N_i \mid E \text{ es una extensión } F\text{-inyectiva de } N_i \}.$$

Por (2.6) ii), $N_2 / N_1 = \bar{N} \in \bar{F}_1 \cdot S$.
Denotando por:

$$(\overrightarrow{\bar{F}_1}) = \{ \bar{T} / \bar{N} \mid \bar{T} \text{ es una extensión } \bar{F}_1\text{-inyectiva de } \bar{N} \}$$

se sigue facilmente que se corresponden los bloques de Fitting $\bar{F}_2$ y $(\overline{\bar{F}_1})$ bajo el isomorfismo natural $G / N_2 \cong (G / N_1) / (N_2 / N_1)$.

REFERENCIAS

1.- ANDERSON W, "Injectors in finite solvable groups". J. Alg. 36 333-338 (1975)

2.- BOLADO CABALLERO A., MARTINEZ VERDUCH J.R., "The Fitting class F·S" Arch. Math. (Pendiente Publicación).

3.- DARK R. S. , "Some examples in the theory of injectors of finite soluble groups" . Math. Z. 127 , 145-156 (1972).

A. Bolado Caballero
Dep. de Geometría y Topología
F. de Ciencias
Universidad de Santander
ESPAÑA

J.R. Martinez Verduch
Dep. de Algebra y Fundamentos.
F. de Matemáticas
Universidad de Valencia
ESPAÑA

Rebut el 6 de febrer del 1984