Pub. Mat. UAB
Vol. 28 Nº 2-3 Set. 1984

UN CRITERIO LOCAL DE REPRESENTABILIDAD

Pere PASCUAL i GAINZA

En esta nota se prueba un criterio local de representabilidad para funtores definidos en la categoría de los espacios algebraicos. Dicho criterio permite extender a los espacios algebraicos algunas construcciones bien conocidas en la categoría de esquemas, como son $\mathbb{G}rass_n(E)$ y $\mathbb{P}(E)$. El interés de este resultado reside por una parte en que hace innecesaria la utilización del criterio de representabilidad de M.Artin para tales funtores elementales, (cf. [1]), y por otra, en que generaliza notablemente el criterio de efectividad de las construcciones locales de Knutson, (cf.[4]), ya que, por ejemplo, éste no da la representabilidad de los funtores mencionados anteriormente.

En §2 usaremos la construcción $\mathbb{P}(E)$ para revisar la definición de morfismo proyectivo entre espacios algebraicos propuesta por Knutson. La definición aqui adoptada permite demostrar la existencia de explosiones de haces de ideales coherentes en este contexto, hecho que, aunque ha sido utilizado por diversos autores (cf. por ejemplo [9]), es de difícil formalización con las definiciones de [4], y que será utilizado en [7] en la demostración de los criterios de amplitud en este contexto.

Los resultados que aquí se exponen forman parte de la tesis del autor, (cf. [6]), redactada bajo la dirección de V.Navarro Aznar, al que quiero agradecer las numerosas conversaciones mantenidas sobre el tema. Asimismo agradezco a F.Guillén y F.Puerta las distintas discusiones mantenidas.

$\mathcal{E}sp.alg._{|X}$ denotará la categoría de los espacios algebraicos sobre un espacio base X. Nos remitiremos a [4] para las definiciones y propiedades elementales de los espacios algebraicos.

1. RESULTADO PRINCIPAL Y EJEMPLOS

El resultado principal de esta nota es

(1.1) Teorema: Sea X un espacio algebraico y

$$F : (\mathcal{E}sp.alg._{|X})^{\circ} \longrightarrow \mathcal{C}onj.$$

un funtor contravariante que es un haz para la topología étale global de $\mathcal{E}sp.alg._{|X}$. Si para todo esquema U sobre X el funtor $F_U = F\times_X U$ es representable, entonces F es representable.

Demostración: Consideremos un recubrimiento étale representable de X, $R \rightrightarrows U \longrightarrow X$, donde R y U son esquemas y se verifica $R = U\times_X U$, (cf. [4]). Dado que por hipótesis F_R y F_U son representables, sean Y_R e Y_U los espacios algebraicos que les representan. Por las propiedades elementales de los funtores representables, (cf. EGA 0 §1), el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y_R & \rightrightarrows & Y_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \rightrightarrows & U \end{array}$$

es cartesiano. Así, Y_R define una relación de equivalencia étale en Y_U ; sea X_U el espacio algebraico cociente, (cf.[4]

(II.3.14)), y comprobemos que X_U no depende (salvo isomorfismo canónico) de U, y que representa a F.

Para comprobar la independencia de X_U respecto de el recubrimiento étale representable escogido, sea $T \rightrightarrows V \longrightarrow X$, otro de tales recubrimientos. Substituyendo V por $V \times_X U$ si uera necesario, podemos suponer que existe un morfismo étale y exhaustivo $f: V \longrightarrow U$, (cf. [4],(II.1.7)). Sea X_V el espacio algebraico obtenido de forma análoga a X_U al usar la relación $T \rightrightarrows V$. Como f es un epimorfismo efectivo universal en la categoría de los espacios algebraicos sobre X, (cf. SGA 3, exp. IV p.213), de SGA 3 (IV.3.5.3) se deduce la existencia de un isomorfismo canónico

$$X_V \xrightarrow{\sim} X_U.$$

Sea pues $\tilde{X}$ el X-espacio algebraico así definido. $\tilde{X}$ representa a F: en efecto, sea Z un espacio algebraico sobre X definido por una relación de equivalencia étale representable $S \rightrightarrows W \longrightarrow Z$. Como $\mathrm{Hom}_X(-,\tilde{X})$ y F son haces para la topología étale global de la categoría de los X-espacios algebraicos, se tienen sucesiones exactas

$$\mathrm{Hom}_X(Z,\tilde{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(W,\tilde{X}) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_X(S,\tilde{X})$$

$$F(Z) \longrightarrow F(W) \rightrightarrows F(S).$$

Ahora bien, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_W \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{X} \arrow[d] \\ W \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

es cartesiano, y por consiguiente si T es un W-espacio algebraico se tienen las igualdades

$$\mathrm{Hom}_X(T,\tilde{X}) = \mathrm{Hom}_W(T,\tilde{X}_W) = F_W(T) = F(T) \quad ,$$

de donde se deduce que en las sucesiones anteriores los dos conjuntos finales coinciden. Así, finalmente, se verifica

$$\mathrm{Hom}_X(Z,\tilde{X}) = F(Z) \quad ,$$

i.e. $\tilde{X}$ representa a F. ///

(1.2) Observaciones: i) Este resultado es la versión para los espacios algebraicos de EGA 0 (4.5.4). Un resultado análogo para espacios analíticos fué probado por A.Grothendieck en el seminario Cartan 1960/61.

ii) En los ejemplos que siguen F_U es representable, de hecho, por un U-esquema. Es en este sentido que el teorema anterior generaliza el criterio de efectividad de las construcciones locales de Knutson (cf. [4] (I.1.12)).

iii) Este resultado podría interpretarse como condiciones suficientes para que un X-esquema relativo en el sentido de Hakim, (cf. [2]), sea efectivo.

(1.3) Como aplicación del resultado anterior vamos a demostrar la existencia de los fibrados de banderas. Recordemos la definición de bandera (cf. EGA I§9): Sea X un espacio algebraico y $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo cuasi-coherente, y sea $\underline{m} = (m_i)$, $1 \leq i \leq p$, una sucesión creciente de enteros no negativos. Se llama bandera de tipo $\underline{m}$ de $\mathcal{E}$ a toda sucesión de cocientes de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_p \quad ,$$

$\mathcal{E}_i$ localmente libres, $1 \leq i \leq p$, y de rangos respectivos $m_1, \ldots,$

m_p, y tales que si $F_i = \mathrm{Nuc}(E \to E_i)$, se tengan inclusiones

$$F_{i+1} \subset F_i \qquad\qquad 1 \leq i \leq p \ .$$

Si notamos $\mathrm{Band}_{\underline{m}}(E)$ el conjunto de banderas de E de tipo $\underline{m}$, se define el funtor

$$\mathcal{B}and_{\underline{m}}(E) : (\mathcal{E}sp.alg._{|X})^{\circ} \longrightarrow \mathcal{C}onj.$$

que asigna a cada X-espacio algebraico Y el conjunto de banderas de tipo $\underline{m}$ de E_Y (pull-back de E sobre Y), y a cada morfismo $g: Y' \longrightarrow Y$, la aplicación

$$\mathrm{Band}_{\underline{m}}(E_Y) \longrightarrow \mathrm{Band}_{\underline{m}}(E_{Y'})$$

definida mediante g^*, pues al ser el funtor imagen inversa exacto por la derecha transforma módulos localmente libres de rango n en módulos localmente libres del mismo rango.

(1.4) Corolario: Con las notaciones anteriores, el funtor $\mathcal{B}and_{\underline{m}}(E)$ es representable por un X-espacio algebraico propio $\mathbb{B}\mathrm{and}_{\underline{m}}(E)$.

Demostración: Es inmediato comprobar que $\mathcal{B}and_{\underline{m}}(E)$ define un haz para la topología étale global de $\mathcal{E}sp.alg._{|X}$, por lo que en virtud de (1.1) será suficiente ver que $\mathcal{B}and_{\underline{m}}(E)_U = \mathcal{B}and_{\underline{m}}(E_U)$ es representable para todo esquema U sobre X.

Como E_U es cuasi-coherente, proviene de un haz cuasi-coherente para la topología de Zariski de U, (cf. [5](II.1.6)), haz que notaremos G_U. De EGA I (9.9.3) resulta que $\mathcal{B}and_{\underline{m}}(G_U)$ es representable, y por tanto la demostración se acaba observando que

$$\mathrm{Band}_{\underline{m}}(E_U) = \mathrm{Band}_{\underline{m}}(G_U) \ ,$$

ya que el morfismo $\mathcal{O}_{U,x} \longrightarrow \mathcal{O}^{sh}_{U,x}$ es fielmente plano (cf.

[8], VIII th. 3).

El hecho de que $\mathbb{B}\mathrm{and}_{\underline{m}}(\mathcal{E})$ sea un espacio algebraico propio sobre X se deduce de la estabilidad de los morfismos propios, (cf. [4],(II.7.2)). ///

Como es habitual, si $\underline{m} = (m)$ escribiremos $\mathbb{G}\mathrm{rass}_m(\mathcal{E}) = \mathbb{B}\mathrm{and}_m(\mathcal{E})$, y para $m=1$, pondremos $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{G}\mathrm{rass}_1(\mathcal{E})$.

Una vez conocida la representabilidad de los funtores en grassmannianas, se pueden establecer facilmente la existencia de los morfismos de Plücker y de Segre, verificandose las propiedades usuales; concretamente se obtiene:

(1.5) Proposición: i) Para todo haz cuasi-coherente $\mathcal{E}$ sobre X, el morfismo de Plücker

$$\mathbb{G}\mathrm{rass}_m(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\overset{m}{\wedge}\mathcal{E})$$

es una inmersión cerrada.

ii) Si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son haces cuasi-coherentes sobre X, el morfismo de Segre

$$\mathbb{P}(\mathcal{E})\times_X \mathbb{P}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})$$

es una inmersión cerrada. ///

Para más detalles y cuestiones relacionadas, ver [6].

2. APLICACION A LOS MORFISMOS PROYECTIVOS

(2.1) Definición: Diremos que un morfismo de tipo finito $f:X \longrightarrow Y$ entre espacios algebraicos es cuasi-proyectivo (resp. proyectivo) si existe un $\mathcal{O}_Y$-módulo cuasi-coherente y de tipo finito $\mathcal{E}$ tal que f se factoriza en la forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[r, "i"] & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[dl] \\ Y & \end{tikzcd}$$

donde i es una inmersión (resp. una inmersión cerrada).

Así, por ejemplo, si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_Y$-módulo de tipo finito y cuasi-coherente, la existencia del morfismo de Plücker y (1.5) aseguran que los morfismos estructurales $\mathbb{G}\mathrm{rass}_m(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$ son proyectivos para cualquier m. Análogamente, los morfismos $\mathbb{B}\mathrm{and}_{\underline{m}}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$ son también proyectivos.

(2.2) <u>Observaciones</u>: i) Si Y es un esquema y $f:X \longrightarrow Y$ es un morfismo cuasi-proyectivo entonces X es también un esquema, recurerándose así la definición de morfismo cuasi-proyectivo de EGA II.

ii) En la definición de morfismo proyectivo de EGA II se usa además de la construcción $\mathbb{P}(-)$, la construcción Proj. Esta se puede recuperar en la categoría de los espacios algebraicos de la forma siguiente: sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{O}_X$-álgebra graduada cuasi--coherente tal que $\mathcal{A}_1$ sea de tipo finito y engendre $\mathcal{A}$. Si $U \rightrightarrows X$ es un recubrimiento étale representable y $S(\mathcal{A})$ denota el álgebra simétrica de $\mathcal{A}$, se tiene un morfismo exhaustivo

$$S(\mathcal{A}_U) \longrightarrow \mathcal{A}_U \ ,$$

que corresponde a la identidad sobre $\mathcal{A}_1$. Así, por EGA II (3.6.4), existe una inmersión cerrada

$$\mathrm{Proj}(\mathcal{A}_U) \longrightarrow \mathrm{Proj}(S(\mathcal{A}_U)) = \mathbb{P}(\mathcal{A}_U) \ ,$$

(cf. EGA II (4.1.1)). Como los esquemas $\mathbb{P}(\mathcal{A}_U)$ forman una clase cofinal de recubrimientos étales representables de $\mathbb{P}(\mathcal{A})$, se obtiene de esta forma una construcción local que, dado que los morfismos anteriores son inmersiones cerradas, es efectiva, (cf. [4] (I.1.12) y (I.3.4)), i.e. existe un espacio algebraico sobre X, $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$, y una inmersión cerrada

$$\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{A}) \ .$$

Además, al igual que en la categoría de esquemas, se verifica $\mathrm{Proj}(S(\mathcal{A})) = \mathbb{P}(\mathcal{A})$, (cf. EGA II §4).

(2.3) La existencia del morfismo de Segre, (1.5), permite demostrar las "sorite" de los morfismos proyectivos de forma análoga a EGA II (5.5.5). Se verifica también:

(2.4) Proposición: Sea $f:X \longrightarrow Y$ un morfismo cuasi-proyectivo entre espacios algebraicos y supongamos que Y es noetheriano. Entonces f es proyectivo si, y sólo si, es propio.

Demostración: Si f es proyectivo será propio por ser composición de una inmersión cerrada y un morfismo propio, $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$, según (1.4).

El recíproco se deduce del lema siguiente (ver EGA II (5.4.4)):

Lema: Si X es un Y-espacio algebraico propio y $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_Y$-módulo cuasi-coherente y de tipo finito, todo morfismo $g: X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ es propio (y, en particular, cerrado). ///

(2.5) Aunque la definición (2.1) es más general que la dada por Knutson, quién impone una factorización de f a través de $\mathbb{P}^N_Y$ para algún N conveniente, (cf. [4] II§7), siguen siendo válidos en este contexto el teorema de finitud de Serre y el lema de Chow, (cf. [4], [9]). Una de las ventajas de la definición (2.1) es que permite demostrar la siguiente

(2.6) Proposición: Sea X un espacio algebraico noetheriano e I un haz de ideales coherente. Existe un morfismo proyectivo

$$\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$$

tal que

i) π es birracional,

ii) $\pi^{-1}I.\mathcal{O}_X$ es inversible,

iii) π es universal respecto i),ii),

morfismo que llamaremos la explosión de X respecto I.

Demostración: Como en el caso de esquemas, (cf. [3] (II. 7.13), basta tomar $\tilde{X} = \mathrm{Proj}(\underset{d\geq 0}{\oplus} I^d)$, lo que tiene sentido según la observación (2.2)i), y como π, el morfismo estructural, verificandose las propiedades i)-iii) por descenso étale. ///

De la demostración anterior y de la construcción de Proj, (2.2.ii), se deduce que las explosiones de haces de ideales cuasi-coherentes son locales para la topología étale de los espacios algebraicos.

BIBLIOGRAFIA

EGA I : Grothendieck,A-Dieudonné,J.: Eléments de Géométrie Algébrique I. Springer V. (1971).

EGA II : Grothendieck,A.-Dieudonné,J.: Eléments de Géométrie Algébrique II. Publ. Math. I.H.E.S. nº8 (1961).

SGA 3 : Demazure,M. et alt.: Schémas en groupes I. LNM 151 Springer V. (1970).

1. Artin,M. : Algebraization of formal moduli I. En "Global Analysis" Princeton U.P. (1970), pp. 21-71.

2. Hakim,M. : Topos annelés et schémas relatifs. Springer V. (1972).

3. Hartshorne,R. : Algebraic geometry. Springer V. (1977).

4. Knutson,D. : Algebraic spaces. LNM 203. Springer V. (1971).

5. Milne,J.S. : Etale cohomology. Princeton U.P. (1980).

6. Pascual-Gainza,P. Contribucions a la teoria d'espais algebraics. Tesi, desembre 1983. Universitat Autònoma de Barcelona.

7. Pascual-Gainza,P. Ampleness' criteria for algebraic spaces. Pre-publicación. Universitat Politècnica de Catalunya. Juny 1984.

8. Raynaud,M. : Anneaux locaux henséliens. LNM 169. Springer V. (1970).

9. Raynaud,M-Gruson,L. : Critères de platitude et projectivité. Inv. math. 13 (1971), pp. 1-89.

Rebut el 13 de febrer del 1984

Dept. de Matemàtiques ETSEIB
Univ. Politècnica de Catalunya
Diagonal, 647
08028 Barcelona
ESPANYA