Pub. Mat. UAB
Vol. 29 Nº 1 Abril 1985

SEPARADORES DE PUNTOS Y DIMENSION

Joan Tarres i Freixenet

ABSTRACT

We define the K-dimension K(X) of a topological space X by means of separating-points. The zero K-dimensional spaces are those that your quasicomponents are the point sets. We establishes the theorem of topological invariance, the subspace theorem, the sum theorem in a restricted case and the cartesian product theorem. The relation with the classical dimension functions are also studied.

INTRODUCCION

En [3] se define una función de dimensión t(X) determinada por las componentes del espacio; se obtiene asi que t(X) = 0 si y sólo si las componentes conexas de X se reducen a puntos. En [1] se analizan distintos tipos de desconexión de un espacio X; entre los espacios tales que ind(X) = 0 y aquellos que t(X) = 0 se situan los que tienen sus cuasicomponentes formadas por conjuntos unitarios. Las tres clases de espacios son en general distintas, lo que permite considerar una nueva función de dimensión, K(X), que vendrá determinada por las cuasicomponentes del espacio y de manera que, ahora, los espacios cuya K-dimensión es cero serán aquellos que tienen sus cuasicomponentes formadas por conjuntos de un solo punto.

En este trabajo definimos la K-dimensión de un espacio X y se estudian diversas propiedades elementales de la misma, así como los teoremas de invariancia topológica y del subespacio en el § 1. En el § 2 se estudian las relaciones de la K-dimensión de un espacio topológico y las funciones clásicas de dimensión ind, Ind y dim; así-mismo, se establecen relaciones con la dimensión $t(X)$ definida en [3]. El teorema de la suma se enuncia en 2.10 para un caso particular. El §3 está dedicado al estudio del comportamiento de la K-dimensión respecto de aplicaciones continuas, obteniendo como consecuencia de ello el teorema del producto (3.7).

§1. DEFINICIONES Y RESULTADOS PRELIMINARES

Recordemos que dado un espacio topológico X y dos elementos $x \neq y$ del mismo, una separación en X entre x e y es un conjunto $L \subset X$ tal que:

a) $X - L = A \cup B$

b) $x \in A$; $y \in B$

c) $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset$

1.1 <u>DEFINICION</u>.- Sea X un espacio topológico arbitrario; se define la K-dimensión de X como un número entero $K(X) \geqslant -1$ tal que:

a) $K(X) = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$

b) Si $X = \{x\}$ es $K(X) = 0$

c) Si X tiene más de un punto, $K(X) \leqslant n$ $(n \geqslant 0)$ si par $x,y \in X$ arbitrarios y distintos existe una separación L entre x e y en X tal que $K(L) \leqslant n-1$.

d) $K(X) = n$ si $K(X) \leqslant n$ y $K(X) > n-1$

e) $K(X) = \infty$ si para todo $n = 1,2,\ldots$ es $K(X) > n$.

1.2 <u>LEMA</u>.- Si C es una cuasicomponente del espacio X, $K(C) = 0$ si y sólo si C es un conjunto unitario.

<u>Demostración</u>.- Evidentemente, si $C = \{x\}$ entonces $K(C) = 0$. Recíprocamente, supongamos que C consta de al menos dos puntos $x \neq y$. Si el conjunto $\emptyset$ fuese una separación en C entre x e y existiría un conjunto abierto y cerrado U en C tal que $x \in U$, $y \in C - U$. Ahora, $U = C \cap V$ con V un conjunto abierto y cerrado en X, por lo que $C \subset V$ y por lo tanto $U = C$, lo que es imposible.

Luego, si C tiene más de un punto, $K(C) > 0$.□

1.3. <u>PROPOSICION</u>.- $K(X) = 0$ si y sólo si $X \neq \emptyset$ y las cuasicomponentes de X son los conjuntos de un solo punto.

<u>Demostración</u>.- Si $K(X) = 0$ es $X \neq \emptyset$ y además, dados $x \neq y$ en X existe U abierto y cerrado tal que $x \in U$, $y \notin U$; es decir, la cuasicomponente C_x de x coincide con $\{x\}$ para todo $x \in X$.

Recíprocamente, si X es un espacio no vacío cuyas cuasicomponentes son los puntos, dados $x \neq y$ en X, como C_x y C_y son distintas existe un conjunto abierto y cerrado U en X tal que $x \in U$, $y \notin U$, por lo que $K(X) = 0$.□

1.4. <u>TEOREMA</u>.- (Invariancia por homeomorfismos). Si X e Y son dos espacios topológicos no vacíos y existe un homeomorfismo de X sobre Y, $K(X) = K(Y)$.

<u>Demostración</u>.- Sea $f: X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Si $K(X) = 0$, obviamente es $K(Y) = 0$ en virtud de 1.3.

Supongamos el teorema demostrado para espacios de K-deimensión menor que n $(n \geqslant 1)$ y sea $K(X) = n$. Si x', y' son elementos distintos de Y con $x' = f(x)$, $y' = f(y)$, será $x \neq y$ y en consecuencia existe una separación L en X entre x e y con $K(L) \leqslant n-1$. Ahora, $L' = f(L)$ es una separación en Y entre x' e y' y por la hipótesis de inducción es $K(L') \leqslant$ $\leqslant n-1$. Por lo tanto, $K(Y) \leqslant n$.

Como existen $a, b \in X$ distintos y una separación L_1 entre ellos con $K(L_1) = n-1$, $L_1' = f(L_1)$ es una separación entre $f(a)$ y $f(b)$ en Y de manera que $K(L_1') = n-1$. Luego, $K(Y) = n$.□

1.5. <u>TEOREMA</u>.- (Teorema del subespacio). Dado el espacio topológico X y el subespacio $A \subset X$ se tiene $K(A) \leqslant$ $\leqslant K(X)$.

<u>Demostración</u>.- Si $A \subset X$ y $K(X) = 0$, o bien es $A =$ $= \emptyset$ o bien las cuasicomponentes de A son los puntos. Así, es $K(A) < 0 = K(X)$.

Supuesto el teorema cierto para espacios de K-dimensión menor que n $(n \geqslant 1)$ sea X tal que $K(X) = n$. Para

$x,y \in A$ $(x \neq y)$ existe una separación L en X entre ellos tal que $K(L) \leq n - 1$. El conjunto $L \cap A$ es una separación en A entre los puntos x e y, y como $L \cap A \subset L$, por la hipótesis de inducción se tiene que $K(L \cap A) \leq K(L) \leq n-1$. En consecuencia, $K(A) \leq n = K(X)$.□

1.6. PROPOSICION.- Sea X un espacio topológico no vacío. Si $\{C_i\}_{i\in I}$ es la familia de las cuasicomponentes de X,

$$K(X) = \sup_{i\in I} \left[K(C_i)\right]$$

Demostración.- Por (1.5), $\sup_{i\in I} [K(C_i)] \leq K(X)$. Para demostrar la desigualdad contraria:

$$(1) \qquad K(X) \leq \sup_{i\in I} [K(C_i)]$$

lo haremos por inducción respecto a $n = \sup_{i\in I} [K(C_i)]$.

Si $n = 0$, por (1.2) las cuasicomponentes C_i se reducen a un punto para todo $i \in I$, y por (1.3) es $K(X) = 0$ y la desigualdad (1) se cumple en este caso.

Supongamos probada la desigualdad (1) para $n \leq k$ con $k \geq 1$, y sea X un espacio tal que $n = k$. Sin restricción de la generalidad podemos suponer que cada cuasicomponente C_i tiene más de un punto. Si $x,y \in X$ con $x \neq y$ de tal forma que ambos pertenecen a cuasicomponentes distintas, el conjunto vacío es una separación entre ellos; si x e y pertenecen a la misma cuasicomponente C_{i_0} y si para cada $i \in I$ es $K(C_i) = n_i$, existe una separación L_{i_0} en C_{i_0} entre x e y con $K(L_{i_0}) \leq n_{i_0} -1$. Elegimos ahora, para cada $i \in I-\{i_0\}$ un par de puntos distintos $x_i,y_i \in C_i$ y consideramos la separación L_i entre ellos tal que $K(L_i) \leq n_i - 1$.

El conjunto:

$$L = \bigcup_{i\in I} L_i$$

es una separación en X entre x e y. Por la hipótesis de inducción, $K(L) \leq k-1$ y por tanto, $K(X) \leq k$ y la proposición queda demostrada□

§ 2. RELACION CON OTRAS FUNCIONES DE DIMENSION

Estudiamos a continuación la relación entre la K-dimensión y las funciones clásicas de dimensión ind, Ind, dim, asi como la función $t(X)$ definida en [3].

2.1 PROPOSICION.- Si X es un espacio T_3, $K(X) \leq \operatorname{ind}(X)$.

Demostración.- Supondremos $\operatorname{ind}(X) \leq \infty$ y probamos la proposición por inducción respecto a $\operatorname{ind}(X)$:

Si $\operatorname{ind}(X) = -1$ entonces $X = \emptyset$ y también $K(X) = -1$ por lo que en este caso la proposición es cierta.

Consideremos probado el enunciado para espacios tales que su dimensión débilmente inductiva es $\leq n-1$ $(n \geq 1)$ y supongamos que $\operatorname{ind}(X) = n$. Si $x,y \in X$ con $x \neq y$, como $\{y\}$ es cerrado en X con $x \notin \{y\}$, por (1.1.4) de [1] existe una separación L entre x e $\{y\}$ tal que $\operatorname{ind}(L) \leq n-1$. Por la hipótesis de inducción, tenemos $K(L) \leq \operatorname{ind}(L) \leq n-1$ por lo que es $K(X) \leq n$ y se cumple la desigualdad buscada.□

Si X es un espacio T_4 entonces $\operatorname{ind}(X) \leq \operatorname{Ind}(X)$ por (1.6.3) de [1] por lo que:

2.2 COROLARIO.- Si X es un espacio T_4, $K(X) \leq \operatorname{ind}(X) \leq \operatorname{Ind}(X)$.

La desigualdad de la proposición 2.1 no es, en general, una igualdad, como lo muestra el siguiente ejemplo:

2.3. EJEMPLO.- Sea $H_0 = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \mid x_i \in Q,\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$ el subespacio del espacio de Hilbert H formado por los puntos de componentes racionales del mismo.

Si $(x_i)_{i=1}^{\infty} \neq (y_i)_{i=1}^{\infty}$ en H_0, existe $i_0 \in N$ tal que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Supongamos que es $x_{i_0} < y_{i_0}$ y sea $\alpha \in R - Q$ tal que $x_{i_0} < \alpha < y_{i_0}$; si es $U_{i_0} = (-\infty,\alpha) \cap Q$, el conjunto:

$$U = \Big(\prod_{i=1}^{\infty} U_i\Big) \cap H_0$$

con $U_i = \mathbb{R}$ para $i \neq i_0$ es un abierto y cerrado en H_0 tal que

$(x_i)_{i=1}^{\infty} \in U$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty} \notin U$. Es decir, $K(H_0) = 0$, mientras que $ind(H_0) = 1$ (ver [1]).

2.4. PROPOSICION.- Para todo espacio topológico X es $t(X) \leq K(X)$.

La proposición (2.4) es consecuencia inmediata del hecho de que las componentes conexas de cualquier espacio están contenidas en las cuasicomponentes del mismo y de (1.5) y (1.6) así como de [3] (proposición 1.2). No obstante, la desigualdad no es en general una igualdad, como queda puesto de manifiesto en [1] (ejemplo 1.4.7) donde se describe un espacio Y tal que $t(Y) = 0$ mientras que $K(Y) > 0$.

Como en un espacio compacto y T_2 las componentes conexas y las cuasicomponentes coinciden, podemos asegurar:

2.5. PROPOSICION.- Si X es un espacio compacto y T_2 entonces $t(X) = K(X)$.

Como consecuencia de los resultados dados en [3] (4.6) y(4.7) asi como de las proposiciones (2.1), (2.2), (2.4) y (2.5) del presente trabajo,se obtiene:

2.6. PROPOSICION.- Si X es un espacio compacto y T_2:

$$\dim(X) \leq t(X) = K(X) \leq ind(X) \leq Ind(X)$$

2.7. PROPOSICION.- Si X es un espacio localmente compacto y metrizable:

$$\dim(X) = t(X) = K(X) = ind(X) = Ind(X)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbb{R}^n$ es un espacio localmente compacto y metrizable, tenemos:

2.8. COROLARIO.- (Teorema fundamental de la dimensión).

$$K(\mathbb{R}^n) = n \quad (n \geq 1)$$

2.9. PROPOSICION.- Si X es un espacio localmente compacto, T_2 y localmente metrizable, $K(X) = ind(X)$.

En virtud de los resultados anteriores podemos enunciar:

2.10. TEOREMA DE LA SUMA.- Sea X un espacio localmente compacto y T_2 tal que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

donde F_i es cerrado en X, localmente metrizable con $K(F_i) \leq n$ para n = 1,2,... Entonces, $K(X) \leq n$.

Demostración.- Por (2.9), $ind(F_i) \leq n$ ($i = 1,2,\ldots$) y ahora (ver [1]) $ind(X) \leq n$. Luago, por (2.1), $K(X) \leq ind(X) \leq n$.□

§ 3. K-DIMENSION Y APLICACIONES CONTINUAS

Sean $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre los espacios topológicos no vacíos X e Y, y $\{C'_j\}_{j\in J}$ la familia de las cuasicomponentes de Y. Llamamos:

$$K(f) = \sup_{j\in J} [K(f^{-1}(C'_j))]$$

3.1. PROPOSICION.- Dada la aplicación continua f entre los espacios topológicos X e Y se tiene: $K(X) = K(f)$.

Demostración.- Para cada $j \in J$, $f^{-1}(C'_j)$ es intersección de abiertos y cerrados de X. Si C es una cuasicomponente de X tal que $C \cap f^{-1}(C'_j) \neq \emptyset$ entonces $C \subset f^{-1}(C'_j)$ y así:

$$(2) \qquad K(C) \leq K[f^{-1}(C'_j)] \leq K(X)$$

Por (1.6), si $\{C_i\}_{i\in I}$ son las cuasicomponentes de X, y como consecuencia de (2) obtenemos:

$$K(X) = \sup_{i\in I} [K(C_i)] \leq \sup_{j\in J} [K(f^{-1}(C'_j))] \leq K(X)$$

y la proposición queda demostrada.□

3.2. COROLARIO.- Si $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación biyectiva y continua y $K(Y) = 0$ entonces $K(X) = 0$.

Podemos dar un enunciado más general del corolario (3.2) para aplicaciones biyectivas y continuas:

3.3. PROPOSICION.- Si $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación biyectiva y continua, $K(X) \leq K(Y)$.

Demostración.- Vamos a probar la proposición por inducción respecto de $K(Y)$:

Si $K(Y) = 0$, por el corolario (3.2) es $K(X) = 0$ y la proposición es cierta en este caso.

Supongamos probado el resultado para espacios cuya dimensión es $\leq n-1$ y sea Y un espacio tal que $K(Y) = n$. Si $x_1 \neq x_2$ en X, por ser f biyectiva es $f(x_1) \neq f(x_2)$ y en consecuencia, existe una separación L' en Y entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ con $K(L') \leq n-1$. Ahora, $L = f^{-1}(L')$ es una separación entre x_1 y x_2 en el espacio X y por la hipótesis de inducción es $K(L) \leq K(L') \leq n-1$; luego, $K(X) \leq n = K(Y)$.□

3.4. COROLARIO.- Dado el conjunto no vacío X, si T y T' son dos topologías de X tales que $T \subset T'$ tenemos:

$$K(X,T') \leq K(X,T)$$

La desigualdad de (3.3) y (3.4) no es en general una igualdad, como queda de manifiesto en el siguiente ejemplo:

3.5. EJEMPLO.- Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales la topología usual T_u y la topología T cuya base es la familia:

$$\mathcal{B} = \{ [a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \ ; \ a < b \}$$

Es obvio que $T_u \subset T$ siendo $K(\mathbb{R},T) = 0$ y $K(\mathbb{R},T_u) = 1$ en virtud de (2.8).

Dados los espacios no vacíos X e Y y la aplicación continua $f: X \longrightarrow Y$ llamaremos:

$$h(f) = \sup_{y \in Y} [K(f^{-1}(y))]$$

3.6. PROPOSICION.- Si $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, $K(X) \leq K(Y) + h(f)$.

Demostración.- Probaremos la proposición por inducción respecto de $K(Y)$:

Si $K(Y) = 0$, las cuasicomponentes de Y son los puntos, por lo que $\{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ es la familia de las imágenes recíprocas de las cuasicomponentes de Y; es decir, $K(f) = h(f)$, y por (3.1) es $K(X) = h(f)$ y la proposición es cierta en este caso.

Si suponemos cierto el resultado en el caso en que la K-dimensión del segundo espacio es $\leq n-1$, sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación continua con $K(Y) = n$ $(n \geq 1)$:

Dados $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, de manera que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $y_1 \neq y_2$, existe una separación L' entre y_1 e y_2 en Y tal que $K(L') \leq n-1$. Ahora, $L = f^{-1}(L')$ es una separación entre x_1 y x_2 en X, y por la hipótesis de inducción tenemos:

(3) $K(L) \leq K(L') + h(f|_L) \leq K(L') + h(f) \leq h(f) + n - 1$

Sean ahora $x_1 \neq x_1'$ en el espacio X con $f(x_1) = f(x_1') = y_1$. Si x_1 y x_1' pertenecen a una misma cuasicomponente C de X, existe una sepacación L_C en C entre x_1 y x_1' con $K(L_C) \leq K(C)-1$ y además:

$$K[L_C \cap f^{-1}(y_1)] \leq K[f^{-1}(y_1)] - 1$$

Procediendo de manera semejante a la demostración de la proposición (1.6) obtenemos una separación L entre x_1 y x_1' tal que:

(4) $$K(L) \leq \sup_{y \in Y} [K(f^{-1}(y))] - 1 \leq h(f) + n - 1$$

Luego, a la vista de (3) y (4) es $K(X) \leq h(f) + n = K(Y) + h(f)$.□

Este último resultado permite demostrar el siguiente teorema:

3.7. TEOREMA DEL PRODUCTO.- Si X e Y son dos espacios topológicos no vacíos, $K(X\times Y) \leq K(X) + K(Y)$.

Demostración.- Consideremos la aplicación continua:

$$pr_1 : X\times Y \longrightarrow X$$

Aplicando (3.6) se obtiene:

$$K(X\times Y) < K(X) + h(pr_1)$$

y como para todo $x \in X$, $pr_1^{-1}(x)$ es homeomorfo a Y, se tiene $h(pr_1) = K(Y)$ de donde $K(X\times Y) \leq K(X) + K(Y)$.□

BIBLIOGRAFIA

[1]. R. ENGELKING. Dimension Theory. North. Holland Publ. Co. 1978.

[2]. K. KURATOWSKI. Topology. Vol. II. New York. 1968.

[3]. G. STEINKE. A new dimension by means of separating sets. Arch. Math. 40(1983)273-282.

Rebut el 27 de juny del 1984

Universidad Complutense
Facultad de Ciencias Matemáticas
Dpto. de Geometria y Topología
Ciudad Universitaria

Madrid

ESPAÑA