FORMAS CUADRATICAS SOBRE CUERPOS TOTALMENTE P-ADICOS

P. Báyer

Introducción

Dado un cuerpo de números K y un conjunto finito P de primos de K, se clasifican las formas cuadráticas sobre el cuerpo totalmente P-ádico K_P. El anillo de Witt $W(K_P)$ resulta ser no finito. Su grupo aditivo es estudiado por medio del invariante de Clifford.

1. Cuerpos totalmente P-ádicos

En todo el trabajo K indicará un cuerpo de números. Las clases de los valores absolutos de K las denominaremos primos de K. El completado de K por la topología definida por un primo $\mathfrak{p}$ de K se representará por $\hat{K}_{\mathfrak{p}}$. Los primos correspondientes a valores absolutos no ultramétricos serán llamados primos del infinito, representándose con la notación $\mathfrak{p}_\infty$. Diremos que $\mathfrak{p}_\infty$ es un primo real o complejo, según que $\hat{K}_{\mathfrak{p}_\infty}$ sea isomorfo a $\mathbf{R}$ ó a $\mathbf{C}$, respectivamente.

Todas las extensiones algebraicas de K se supondrán incluidas en una misma clausura $\overline{Q}$.

<u>Definición 1.1</u>. Sea $P \neq \emptyset$ un conjunto finito de primos de K . Por <u>cuerpo totalmente P-ádico</u> sobre K (relativo a P) entenderemos la reunión filtrante de todas las extensiones finitas de K , en las que todos los primos de P descomponen completamente. Se indicará por K_P .

En el caso de que P conste de un único elemento, $\mathfrak{p}$, escribiremos $K_{\mathfrak{p}}$ en lugar de K_P .

Se verifica que:

i) $K_P = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} K_{\mathfrak{p}}$.

ii) Si $\mathfrak{p}_\infty$ es un primo complejo, entonces $K_{\mathfrak{p}_\infty} = \overline{Q}$.

iii) Un elemento $x \in \overline{Q}$ es de $K_{\mathfrak{p}}$ si y sólo si su polinomio minimal sobre K descompone en $\hat{K}_{\mathfrak{p}}$ en producto de factores lineales.

<u>Observación 1.2</u>. Si $K = Q$ y p_∞ es la clase del valor absoluto ordinario, el cuerpo Q_{p_∞} se obtiene adjuntando a Q el conjunto de los elementos totalmente reales en el sentido clásico. Ello justifica la denominación dada a los cuerpos K_P (*) .

(*) Para una mayor información sobre tales extensiones, véase [7] y [1] .

2. Formas cuadráticas sobre K_P

Una forma cuadrática diagonal $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2$ se representará por $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$. La forma $\langle a,\overset{n}{\dots},a\rangle$ se abreviará por $n\langle a\rangle$.

Si P es un conjunto de primos de K como en 1.1., escribiremos $P = P_f \cup P_\infty$ para poner de manifiesto su parte finita y su parte no finita. A su vez escribiremos $P_\infty = P_r \cup P_c$, siendo P_r el subconjunto de P formado por los primos del infinito reales y P_c el de los primos complejos.

<u>Lema 2.1.</u> <u>Si</u> $P = P_f$, <u>la forma</u> $5\langle 1\rangle$ <u>es isótropa en</u> K_P.

<u>Demostración</u>. Sea $P' = \left\{p \in \mathbb{Z},\ p>0 \ \middle|\ \exists\ \mathfrak{p} \in P \text{ tal que } \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}=(p)\right\}$ Puesto que $Q_{P'} \subset K_P$ bastará probar que $5\langle 1\rangle$ es isótropa en $Q_{P'}$. Sean $\{p_1,\dots,p_m\}$ los primos de P' congruentes con 1 (mod 4) y $\{p_{m+1},\dots,p_n\}$ los congruentes con 3 (mod 4). Sin restricción podemos suponer que ambos subconjuntos son no vacíos y que $p_0 = 2 \in P'$. Sea $a = \prod_{i=1}^{m} p_i$, $b = \prod_{i=m+1}^{n} p_i$ y tomemos $c = -a^2 + b^2 + 7(ab)^2$. Aumentando si es preciso el número de enteros primos congruentes con 3 (mod 4), podemos suponer que es $c > 0$. Teniendo en cuenta las reglas de descomposición en un cuerpo cuadrático, se sigue que

$-c \in Q_p^2$. En virtud del Teorema de Lagrange, existirán cuatro enteros a_i, de forma que $c = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$. Por tanto $((-c)^{1/2}, a_1, a_2, a_3, a_4)$ será una representación de cero de la forma considerada.

<u>Proposición 2.2</u>. <u>Bajo las condiciones del Lema, toda forma cuadrática de K_p de rango mayor o igual que cinco, es isótropa</u>.

<u>Demostración</u>. Sea q una forma cuadrática definida en K_p. Teniendo en cuenta 2.1. puede obtenerse un cuerpo de números L totalmente imaginario, tal que $K \subset L \subset K_p$ y q esté definida en L . Basta entonces aplicar el principio de Hasse al cuerpo L .

<u>Proposición 2.3</u>. <u>Si $P = P_\infty$ el cuerpo K_p es pitagórico (es decir, se verifica que $K_p^2 + K_p^2 = K_p^2$)</u> .

<u>Demostración</u>. Sean $x, y \in K_p$ y sea $z \in \overline{Q}$ un elemento tal que $z^2 = x^2 + y^2$. Sea t un elemento primitivo de la extensión K/Q y sean $t_1, \ldots, t_{r_1}$ los conjugados reales de t . Cada primo real $p_{\infty, i}$ está asociado a un monomorfismo $f_i : K \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $f_i(t) = t_i$. Para toda extensión de f_i a un monomorfismo $\overline{f}_i : \overline{Q} \longrightarrow \mathbb{C}$ se verificará

que $\bar{f}_i(x)$, $\bar{f}_i(y) \in \mathbb{R}$ y por tanto, que $\bar{f}_i(z) \in \mathbb{R}$. Ello prueba que $z \in K_P$.

Dada una forma cuadrática q se designarán por $\dim(q)$, $d(q)$, $s(q)$ y $\sigma(q)$ su dimensión, la clase de su determinante, su invariante de Hasse y su signatura total, respectivamente.

<u>Teorema 2.4</u>. <u>Sea</u> K_P <u>un cuerpo totalmente P-ádico</u>. <u>Para que dos formas cuadráticas</u> q_1 <u>y</u> q_2 <u>definidas en</u> K_P <u>sean equivalentes, es necesario y suficiente que</u> :

1) $\dim(q_1) = \dim(q_2)$, $\sigma(q_1) = \sigma(q_2)$, <u>si</u> $P = P_\infty$.

2) $\dim(q_1) = \dim(q_2)$, $d(q_1) = d(q_2)$, $s(q_1) = s(q_2)$, <u>si</u> $P = P_f$.

3) $\dim(q_1) = \dim(q_2)$, $d(q_1) = d(q_2)$, $s(q_1) = s(q_2)$, $\sigma(q_1) = \sigma(q_2)$, <u>si</u> $P_f \neq \emptyset$ y $P_\infty \neq \emptyset$.

<u>Demostración</u>. 1) Si $P = P_\infty$ y $P_r = \emptyset$, es trivial (en este caso $\sigma = 0$) . Si $P_r \neq \emptyset$, el cuerpo K_P es entonces formalmente real, por lo que el resultado se sigue de 2.3 y del Principio local-global de Pfister ([5], Cap.VIII).

2) A partir de 2.2 es un resultado clásico.

3) Si $P_r = \emptyset$, se reduce al caso 2) . Supongamos pues $P_r \neq \emptyset$. En virtud del Teorema 3 de [3] , de manera equiva-

lente, basta probar que las formas $\langle 1,a,b,ab\rangle$ $(a,b\in \dot{K}_p)$ representan todos los elementos de K_p totalmente positivos. Sea $x\in K_p$ un tal elemento. La forma $q = \langle 1,a,b,ab,-x\rangle$ será totalmente indefinida. Sea $L = K(a,b,x)$. La forma q representará cero en todos los completados $\hat{L}_{\mathfrak{p}}$ de L. Será por tanto isótropa en L.

3. El anillo de Witt de K_p

Se indicará por F un cuerpo (no necesariamente de números) de característica distinta de dos. Sean $W(F)$, $B(F)$ y $BW(F)$ el anillo de Witt, el grupo de Brauer y el grupo de Brauer - Wall, respectivamente, de dicho cuerpo.

Recordemos que el invariante de Clifford $\Gamma : W(F) \longrightarrow BW(F)$ es el homomorfismo de grupos definido por $\Gamma(q) = [C(q)]$, siendo $[C(q)]$ la clase en $BW(q)$ del álgebra de Clifford de q. Los elementos de $BW(q)$ están en correspondencia biyectiva con las ternas $(D, \epsilon, a) \in B(F)\times \mathbb{F}_2 \times \dot{F}/\dot{F}^2$. Por transporte de estructura se obtiene entonces la siguiente ley de composición de ternas ([5], Cap.V) :

$$(D, 1, a)(E, 1, b) = (D\cdot E\cdot(\tfrac{a,b}{F}), o, -ab)$$

$$(D , o , a)(E , o , b) = (D\cdot E\cdot(\frac{a,b}{F}), o , ab) ,$$

$$(D , o , a)(E , 1 , b) = (D\cdot E\cdot(\frac{a,-b}{F}), 1 , ab) ,$$

en donde por $(\frac{a,b}{F})$ se indica la F - álgebra de cuaterniones de generadores i,j y relaciones $i^2 = a$, $j^2 = b$ e $ij=-ji$.

Si q es una F - forma de dimensión n , por la representación anterior se obtiene que $\Gamma(q) = (c(q), \dim_o(q), d_{\pm}(q))$, siendo $c(q)$ el invariante de Witt de q , $\dim_o(q)$ la $\dim(q) \pmod 2$ y $d_{\pm}(q) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d(q)$, el determinante con signo de q .

Sea $Q(F)$ el subgrupo de $B(F)$ generado por las clases de las álgebras de cuaterniones y $B_2(F)$ el subgrupo de $B(F)$ formado por los elementos de orden ≤ 2 . Entonces $Q(F) \subset B_2(F)$ e $\mathrm{Im}\,\Gamma \subset Q(F) \times \mathbb{F}_2 \times \dot{F}/\dot{F}^2$.

<u>Proposición 3.1. Si F es un cuerno en el cual las clases de las álgebras de cuaterniones constituyen un subgrupo del grupo de Brauer $B(F)$, se verifica que</u>

$$\mathrm{Im}\,\Gamma = Q(F) \times \mathbb{F}_2 \times \dot{F}/\dot{F}^2 .$$

<u>Demostración.</u> Veamos que los elementos $((\frac{a,b}{F}), 1 , t)$ y $((\frac{a,b}{F}), o , t)$ $(a,b,t \in \dot{F})$ pertenecen a $\mathrm{Im}\,\Gamma$. Puesto que

$c\,\langle a,b,-ab\rangle = s\,\langle a,b,-ab\rangle\left(\frac{-1,1}{F}\right) = \left(\frac{a,b}{F}\right) \in Q(F)$ y si $\dim_o q = 1$, se verifica que $c(\langle t\rangle \otimes q) = c(q)$, se tendrá

$\Gamma\,(\langle t\rangle \otimes \langle a,b,-ab\rangle) = \left(\left(\frac{a,b}{F}\right), 1, t\right)$. Tomemos

$q = \langle -t\rangle \perp \langle a,b,-ab\rangle$. Entonces

$c(q) = c\,\langle -t\rangle \cdot c\,\langle a,b,-ab\rangle \cdot \left(\frac{-t,1}{F}\right) = \left(\frac{a,b}{F}\right)$. Por tanto

$\Gamma\,(\langle -t\rangle \perp \langle a,b,-ab\rangle) = \left(\left(\frac{a,b}{F}\right), o, t\right)$.

<u>Lema 3.2. El invariante de Hasse de un espacio hiperbólico viene dado por</u>

$$s(n\langle 1,-1\rangle_F) = \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]},-1}{F}\right) .$$

<u>Demostración</u>. Ya que $s(q_1 \perp q_2) = s(q_1)\cdot s(q_2)\cdot\left(\frac{d(q_1),d(q_2)}{F}\right)$, la fórmula anterior se obtiene fácilmente por inducción sobre n.

<u>Proposición 3.3. Si</u> s, dim, d <u>clasifican completamente las formas cuadráticas definidas sobre un cuerpo</u> F , <u>el invariante de Clifford</u> $\Gamma : W(F) \longrightarrow BW(F)$ <u>es inyectivo</u> (*) .

(*) Sea IF el ideal fundamental de W(F) . La inyectividad de Γ , en el caso de que $I^3F = o$, se ha probado en [2] , Teor. 3. lo. Es usada a su vez para demostrar que $I^3F = o$, si y sólo si s , dim y d clasifican ([2] , Teor. 3. 11).

En relación con la inyectividad de Γ véase también [4] .

Demostración. Sea q un elemento del $\ker \Gamma$. Entonces $c(q)=1$, $\dim_o(q)=o$, $d_{\pm}(q)=1$. Para el cálculo de $s(q)$ deben distinguirse los siguientes casos :

Caso 1. $\dim q \equiv 2 \pmod 8$. Puesto que $c(q) = s(q)$ y $d_{\pm}(q) = -d(q)$, se tendrá que $s(q)=1$ y $d(q) = -1$.

Caso 2. $\dim q \equiv 4 \pmod 8$. Se tendrá que $d_{\pm}(q) = d(q) = +1$, por lo que $c(q) = s(q)(\frac{-1,-1}{F})$ y en consecuencia, $s(q) = (\frac{-1,-1}{F})$.

Caso 3. $\dim q \equiv 6 \pmod 8$. Ahora $d_{\pm}(q) = -d(q) = -1$ y $c(q) = s(q)(\frac{-1,-1}{F})$. Así $s(q) = (\frac{-1,-1}{F})$.

Caso 4. $\dim q \equiv o \pmod 8$. De $d_{\pm}(q) = d(q) = +1$, se obtiene que $c(q) = s(q)(\frac{-1,1}{F}) = s(q)$.

Si $\dim q = 2n$, de 3.2 y a partir de los resultados anteriores, se obtiene que $s(q) = s(n\langle 1,-1\rangle)$, $\dim q = \dim(n\langle 1,-1\rangle)$ y $d(q) = d(n\langle 1,-1\rangle)$. Por tanto $q \simeq n\langle 1,-1\rangle = o \in W(F)$.

En el caso particular que nos ocupa, a partir de 2.4, 3.1 y 3.3 se obtiene el siguiente

Teorema 3.4. Sea K_P un cuerpo totalmente P-ádico. Si $P = P_f$, se verifica que

$$\Gamma : W(K_P) \simeq B_2(K_P) \times F_2 \times \dot{K}_P/\dot{K}_P^2 \quad ,$$

en un isomorfismo de grupos aditivos, siendo la estructura del segundo miembro la inducida por $BW(K_P)$.

Veremos a continuación que los grupos $\dot{K}_P/\dot{K}_P^2$ y $B_2(K_P)$ son ambos no finitos. En este último nos limitaremos al caso no diádico.

Proposición 3.5. Si $P \neq P_c$, el índice $[\dot{K}_P : \dot{K}_P^2]$ es infinito.

Demostración. Caso 1. $\emptyset = P_f \subset P$. La infinitud de $[\dot{K}_P : \dot{K}_P^2]$ se obtiene directamente al tener en cuenta que $K_P = K_{P_r}$ es un cuerpo pitagórico que posee infinitas ordenaciones.

Caso 2. $P_f \neq \emptyset$. En este caso construiremos una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ de elementos de $\dot{K}_P$ no congruentes mod $\dot{K}_P^2$. En general, sea ε_n una raíz primitiva n-ésima de la unidad de $\overline{Q}$. De las reglas de descomposición en un cuerpo ciclotómico se deduce la existencia de un entero $s \geq 1$, tal que $\varepsilon_{2^s} \in K_P$ y $\varepsilon_{2^{s+1}} \notin K_P$. Designemos por $P_{(2)}$ el subconjunto de P_f formado por los primos diádicos. Si $P_{(2)} \neq \emptyset$ sea

$$e = \max \left\{ e_p(K/Q) \mid p \in P_{(2)} \right\} .$$

Sea $m = m_o m_1$ un entero elegido de la forma siguiente:

$m_o = 1$ si $P_f = P_{(2)}$.

$m_o = \prod p_i$ si $P_f - P_{(2)} \neq \emptyset$, siendo $(p_i) = \mathfrak{p}_i \cap \mathbb{Z}$, $p_i > 0$, los primos obtenidos al recorrer $\mathfrak{p}_i$ el conjunto $P_f - P_{(2)}$.

$m_1 = 1$ si $P_{(2)} = \emptyset$.

$m_1 = 2^{2se+1}$ si $P_{(2)} \neq \emptyset$.

En virtud del Teorema de Dirichlet, se podrá tomar una sucesión de enteros primos positivos $q_1, q_2, \ldots$ de modo que, para cada $i \geq 1$, se verifique que $q_i \equiv 1 \pmod{m}$. Sea $q = q_i$ un término arbitrario de la sucesión anterior. Consideremos la ecuación $X^{2^s} - q$. Puesto que si $\mathfrak{p} \in P_f - P_{(2)}$, es $v_{\mathfrak{p}}(1-q) > 0 = v_{\mathfrak{p}}(2^{2s})$ y si $\mathfrak{p} \in P_{(2)}$, es $v_{\mathfrak{p}}(1-q) \geq v(m_1) = e_{\mathfrak{p}}(K/Q)(2se+1) \geq 2se+1 > 2se(K/Q) = v_{\mathfrak{p}}(2^{2s})$, por aplicación del Lema de Hensel ([6], Cap.II) , se obtiene que $q \in \dot{K}_{\mathfrak{p}}^{2^s}$ para cada $\mathfrak{p} \in P_f$. (Si $\emptyset \neq P_r \subset P$, entonces $s = 1$ y obviamente $q \in \dot{K}_{\mathfrak{p}}^2$, para todo $\mathfrak{p} \in P$) . Ya que por hipótesis las raíces 2^s - ésimas de la unidad están en K_P , se tendrá que $q \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} \dot{K}_{\mathfrak{p}}^{2^s} = \dot{K}_P^{2^s}$ (cf. [1] ,Cap.IV) . Sean $a_1, a_2, \ldots,$ elementos de K_P tales que $a_i^{2^s} = q_i$, $i \geq 1$. Probaremos que, salvo a lo sumo en un número finito de casos, los elementos así obtenidos no son congruentes mod $\dot{K}_P^2$. Sean $b_{ij} = q_i q_j$ y $f_{ij}(X) = X^{2^{s+1}} - b_{ij}$. Si f_{ij} reduce en el cuerpo K se sigue que, necesariamente $b_{ij} \in \mathring{K}^2$, o bien $-4^{-1} b_{ij} \in \mathring{K}^4$. Puesto que sólo un número finito de cuerpos de la forma $Q(b_{ij}^{1/2})$, o bien $Q((-4^{-1}b_{ij})^{1/4})$ pueden estar contenidos en K, prescindiendo en la sucesión $q_1, q_2, \ldots$ de un número finito de términos, podemos suponer que todos los polinomios f_{ij} son K-irreducibles. Si $a_i a_j = x^2$ para cierto $x \in K_P$, se tendría que $(a_i a_j)^{2^s} = x^{2^{s+1}}$ y f_{ij} tendría un cero en K_P. Ya que la extensión K_P / K es de Galois, ello estaría en contradicción con la elección de s.

Definición 3.6. Sean $\mathfrak{p} \in P_f \subset P$ y $U_{\mathfrak{p}}$ el conjunto de los elementos $x \in K_P$ tales que $v_{\mathfrak{P}}(x) = 0$, para toda valoración $v_{\mathfrak{P}}$ de K_P que extienda la valoración de K, $v_{\mathfrak{p}}$, asociada a $\mathfrak{p}$. El grupo $U = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P_f} U_{\mathfrak{p}}$ será llamado de las *unidades* de K_P.

3.7. Obsérvese que la demostración de 3.5 implica que si $P_f \neq \emptyset$, el índice $[U : U \cap K_P^2]$ es no finito.

El siguiente resultado, necesario para la demostración de 3.9, se obtiene sin dificultad.

Lema 3.8. Sea K un cuerpo de números, $\mathfrak{p}$ un primo de K

y W una clausura algebraica de $\hat{K}_p$. Un elemento $x \in K_p$ es $x \in K_p^2$ si y sólo si para todo K-monomorfismo $f : \overline{Q} \longrightarrow W$, se verifica que $f(x) \in \hat{K}_p^2$.

Proposición 3.9. Sea P un conjunto finito de primos de K, no diádicos. Si $P \neq P_c$, el subgrupo del grupo de Brauer formado por las álgebras de cuaterniones, $B_2(K_P)$, es no finito.

Demostración. *Caso 1.* $P_f = \emptyset$. Sea $g : \dot{K}_P \longrightarrow B_2(K_P)$ el homomorfismo definido por $g(x) = \left(\frac{-1,x}{K_P}\right)$. Veremos que su núcleo es $\dot{K}_P^2$, con lo cual el resultado de la Proposición se obtendrá de 3.5. La inclusión $\dot{K}_P^2 \subset \ker g$ es trivial. Sea pues $x \in \ker g$; sean p_∞ un elemento de $P_r \subset P$ y $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ el monomorfismo asociado. Para toda extensión de f a un monomorfismo $\overline{f} : \overline{Q} \longrightarrow \mathbb{C}$ se tendrá que $1 = \left(\frac{-1,x}{K_P}\right) \otimes \mathbb{R} = \left(\frac{-1,\overline{f}(x)}{\mathbb{R}}\right)$. En consecuencia, $\overline{f}(x)$ será un número real positivo y $x \in K_{p_\infty}^2$. Puesto que p_∞ era arbitrario, $x \in K_P^2$.

Caso 2. $P_f \neq \emptyset$. El Teorema de aproximación para valores absolutos permite disponer de un elemento $\pi \in K$, negativo para todas las ordenaciones de K asociadas a los primos de P_r, y tal que $v_p(\Pi) = 1$, para todo $p \in P_f$. Sea U el grupo de las unidades de K_P y $h : U \longrightarrow B_2(K_P)$ el homomorfismo definido por $h(x) = \left(\frac{\Pi, x}{K_P}\right)$. Veremos que $\ker h = U \cap K_P^2$, por lo que bastará tener en cuenta 3.7 . Sea $x \in \ker h$. Para todo $\mathfrak{p} \in P$ y para todo K-monomorfismo $f : K_P \longrightarrow \hat{K}_{\mathfrak{p}}$ se tendrá que $1 = \left(\frac{f(\Pi), f(x)}{\hat{K}_{\mathfrak{p}}}\right)$. Dado $\mathfrak{p} \in P_f$, sea $u \in \hat{K}_{\mathfrak{p}}$ una unidad $\mathfrak{p}$-ádica tal que $u \notin \hat{K}_{\mathfrak{p}}^2$. Puesto que $\mathfrak{p} \nmid 2$, el conjunto $\{1, u, f(\Pi), uf(\Pi)\}$ será un sistema completo de representantes de $\hat{K}_{\mathfrak{p}}^* / \hat{K}_{\mathfrak{p}}^{*2}$. Teniendo en cuenta que $v_{\mathfrak{p}}(f(x))=0$, necesariamente será $f(x) \equiv 1 \pmod{\hat{K}_{\mathfrak{p}}^{*2}}$ o bien $f(x) \equiv u \pmod{\hat{K}_{\mathfrak{p}}^{*2}}$. Ya que el álgebra de cuaterniones $\left(\frac{f(\Pi), u}{\hat{K}}\right)$ no descompone en $\hat{K}_{\mathfrak{p}}$, ésta última posibilidad no puede darse. Puesto que f y $\mathfrak{p}$ son arbitrarios, de 3.8 se deduce que $x \in K_{P_f}^2$. Análogamente al caso anterior se obtiene que $x \in K_{P_r}^2$ y por tanto $x \in K_P^2$.

Bibliografía

[1] Báyer, P. : Extensiones maximales de un cuerpo global en las que un divisor primo descompone completamente. Tesis. Universidad de Barcelona, 1976.

[2] Elman, R., Lam, T.Y. : On the quaternion symbol homomorphism $g_F : k_2F \longrightarrow B(F)$. Proc. of Seattle Algebraic K-Theory Conference. Springer, Lecture Notes in Maths. 342 (1972), 447-463.

[3] Elman, R., Lam, T.Y. : Classification Theorems for Quadratic Forms over Fields. Comment. Math. Helv. 49 (1974), 373-381.

[4] Laborde, O. : Formes quadratiques et algèbres de Clifford. Bull. Sc. math., 2ª série, 96 (1972), 199-208.

[5] Lam, T.Y. : The algebraic Theory of Quadratic Forms. Benjamin, 1973.

[6] Lang, S. : Algebraic Number Theory. Addison-Wesley, 1970.

[7] Tomás, F. : Sobre los normalizados de los grupos de descomposición. Anales del Inst. de Mat. U.N.A.M., 1973.