ANULACIÓN DE LA COHOMOLOGÍA CON VALORES EN UN FIBRADO VECTORIAL HOLOMORFO. (*)

Joan Girbau

Introducción.- El teorema de anulación de Le Potier [5] se apoya en dos resultados. De una parte en el isomorfismo de Le Potier (Lema 8 de [5]) y de otra en el teorema de anulación de Akizuki-Nakano para fibrados de linea [1]. Yo generalicé el teorema de anulación de Kodaira a fibrados de linea semi-negativos ([3] teorema B' y [2]). Pero esta generalización no era suficiente para dar un resultado análogo relativo a fibrados vectoriales de rango cualquiera a través del isomorfismo de Le Potier. En este trabajo se obtiene el teorema 1, relativo a fibrados de linea seminegativos, que generaliza el resultado de Akizuki-Nakano y que, a través del isomorfismo de Le Potier, da lugar al teorema 2 concerniente a fibrados vectoriales de rango cualquiera, que generaliza el teorema de Le Potier.

1.- Un teorema de anulación para fibrados de linea.- Sea M una variedad kähleriana compacta de dimensión n. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado de linea sobre M, holomorfo, dotado de una métrica hermítica h. Sea Ω la forma de curvatura de la única conexión de tipo $(1,0)$ en E compatible con h. Sea $\gamma = \sqrt{-1}\,\Omega$. Sea $s(\gamma)$ la forma hermítica definida por : $s(\gamma)(X,Y) = \gamma(X,JY)$. Sea $(U, z^1 \ldots z^n)$ una carta local tal que $E|U$ es trivial. Sea s una sección de $E|U$ que no se anula en ningún punto. Una (p,q)-forma con coeficientes en E se expresará en U:

$$(1,1) \qquad \varphi = \frac{1}{p!q!}\, \varphi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\iota}_1 \ldots \bar{\iota}_q}\, dz^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dz^{\lambda_p} \wedge \overline{dz^{\iota_1}} \ldots \overline{dz^{\iota_q}} \otimes s$$

El producto escalar local se expresará por :

$$(1,2) \qquad (\varphi, \psi) = \frac{h}{p!q!}\, \varphi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\iota}_1 \ldots \bar{\iota}_q}\, \overline{\psi^{\bar{\lambda}_1 \ldots \bar{\lambda}_p \iota_1 \ldots \iota_q}}$$

donde h indica, por abuso de lenguaje, la función $h(s,s)$. El producto escalar global se define por : $\langle\varphi,\psi\rangle = \int_M (\varphi,\psi)\eta$, siendo η el elemento de volumen. Sobre las (p,q)-formas con coeficientes en E tenemos la diferencial $d_E = d'_E + d''_E$, la codiferencial $\delta_E = \delta'_E + \delta''_E$ y las dos laplacianas $\Delta'_E = 2(d'_E\,\delta'_E + \delta'_E\,d'_E)$, $\Delta''_E = 2(d''_E\,\delta''_E + \delta''_E\,d''_E)$. Se sabe que la diferencia entre estas dos laplacianas viene dada por:

$$(1,3) \qquad \Delta'_E - \Delta''_E = 2(\Lambda e(\gamma) - e(\gamma)\Lambda)$$

donde $e(\gamma)$ significa el producto exterior por γ.

Haciendo un cálculo análogo al de la demostración del teorema de descomposición de Hodge-Lepage, se obtiene la siguiente expresión local:

$$(1,4) \qquad (\Lambda e(\gamma) - e(\gamma)\Lambda)\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} = \operatorname{tr} s(\gamma)\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}$$

$$- \frac{1}{(p-1)!}\, s(\gamma)^{\lambda}_{\nu}\, \varepsilon^{\nu\nu_2\ldots\nu_p}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}\, \varphi_{\lambda\nu_2\ldots\nu_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}$$

$$- \frac{1}{(q-1)!}\, s(\gamma)^{\bar{\mu}}_{\bar{\zeta}}\, \varepsilon^{\bar{\zeta}\bar{\zeta}_2\ldots\bar{\zeta}_q}_{\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}\, \varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p}{}^{\bar{\mu}\bar{\zeta}_2\ldots\bar{\zeta}_q}$$

De (1,4) se obtiene:

$$(1,5) \qquad ((\Lambda e(\gamma) - e(\gamma)\Lambda)\varphi,\varphi) = \operatorname{tr} s(\gamma)(\varphi,\varphi) -$$

$$- \frac{h}{(p-1)!\,q!}\, s(\gamma)_{\delta\bar{\beta}}\, \varphi^{\beta}{}_{\zeta_2\ldots\zeta_p\bar{\mu}_1\ldots\bar{\mu}_q}\, \overline{\varphi^{\delta\zeta_2\ldots\zeta_p\mu_1\ldots\mu_q}}$$

$$- \frac{h}{p!\,(q-1)!}\, s(\gamma)_{\delta\bar{\beta}}\, \varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\delta}{}_{\bar{\mu}_2\ldots\bar{\mu}_q}\, \overline{\varphi^{\alpha_1\ldots\alpha_p\beta\mu_2\ldots\mu_q}}$$

<u>Proposición 1</u>.- Sea g una métrica kähleriana sobre M, h una métrica hermítica en E. Supongamos $s(\gamma) \leq 0$ y rango de

$s(\gamma)$ constante (=k) en todos los puntos de M. Sea m el menor valor absoluto de los valores propios no nulos de $s(\gamma)$ en todos los puntos de M. Sea δ un número real positivo menor que $m/(2n-1)$. Sea $\tilde{g}=\delta g-s(\gamma)$. Si φ es una (p,q)-forma con coeficientes en E con $p+q<k$, se tiene:

$$((\Lambda e(\gamma)-e(\gamma)\Lambda)\varphi,\varphi)\leq 0$$

en todo punto; donde el producto escalar (,) y el operador Λ están referidos a la métrica kähleriana $\tilde{g}$. Si en un punto $((\Lambda e(\gamma)-e(\gamma)\Lambda)\varphi,\varphi)=0$, $\varphi=0$ en dicho punto.

Demostración.- Sea x_0 un punto de M. Tomemos un sistema de coordenadas en un entorno de x_0 tal que la matriz de g en x_0 sea la identidad y la de $s(\gamma)$ sea

$$\begin{pmatrix} -\gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\gamma_n \end{pmatrix}$$

con $\gamma_i>0$ si $1\leq i\leq k$ y $\gamma_i=0$ si $i>k$. Tendremos:

$$(1,6)\qquad ((\Lambda e(\gamma)-e(\gamma)\Lambda)\varphi,\varphi)=\sum_{\substack{\lambda_1\ldots\lambda_p\\ t_1\ldots t_q}}\left\{-\frac{h}{p!q!}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\gamma_i+\delta}\right.$$

$$\left.+\frac{h}{(p-1)!q!}\ \frac{\gamma_{\lambda_1}}{\gamma_{\lambda_1}+\delta}+\frac{h}{p!(q-1)!}\ \frac{\gamma_{t_1}}{\gamma_{t_1}+\delta}\right\}\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1}{\gamma_{\lambda_j}+\delta}\right)\cdot$$

$$\prod_{u=1}^{q}\left(\frac{1}{\gamma_{t_u}+\delta}\right)\|\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{t}_1\ldots\bar{t}_q}\|^2=\sum_{\substack{\lambda_1<\ldots<\lambda_p\\ t_1<\ldots<t_q}}\left\{\sum_{j=1}^{p}\frac{\gamma_{\lambda_j}}{\gamma_{\lambda_j}+\delta}+\right.$$

$$\left.\sum_{u=1}^{q}\frac{\gamma_{t_u}}{\gamma_{t_u}+\delta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\gamma_i+\delta}\right\}\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1}{\gamma_{\lambda_j}+\delta}\right)\prod_{u=1}^{q}\left(\frac{1}{\gamma_{t_u}+\delta}\right)$$

$$\|\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{t}_1\ldots\bar{t}_q}\|^2.$$

Si $\gamma_i \neq 0$ se tiene $1-\frac{\gamma_i}{\gamma_i+\delta} < \frac{1}{2n}$. Sea $\alpha_i = 1-\frac{\gamma_i}{\gamma_i+\delta}$. Fijados los índices $\lambda_1<\dots<\lambda_p, t_1<\dots<t_q$ estudiemos el signo del coeficiente:

$$A = \sum_{j=1}^{p} \frac{\gamma_{\lambda_j}}{\gamma_{\lambda_j}+\delta} + \sum_{u=1}^{q} \frac{\gamma_{t_u}}{\gamma_{t_u}+\delta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\gamma_i+\delta}$$

Supongamos que entre los índices $\lambda_1 \dots \lambda_p$ hay s entre los k primeros y entre $t_1 \dots t_q$ hay s' entre los k primeros. Se tendrá:

$$A = s + s' - k - \sum_{\lambda_i \leq k} \alpha_{\lambda_i} - \sum_{t_i \leq k} \alpha_{t_i} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$$

$s + s' - k$ es negativo ya que $p + q < k$. Se tiene pues:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i - \sum_{\lambda_i \leq k} \alpha_{\lambda_i} - \sum_{t_i \leq k} \alpha_{t_i} \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leq \frac{k}{2n} \leq \frac{1}{2}$$

y puesto que $s + s' - k$ es entero, se tiene $A < 0$. Ello prueba la primera parte de la proposición. Supongamos ahora $((\Lambda e(\gamma)\Lambda)\varphi,\varphi) = 0$ en x_0. Hemos obtenido en (1,6) una expresión de la forma siguiente:

$$(1,6') \qquad ((\Lambda e(\gamma) - e(\gamma)\Lambda)\varphi,\varphi) = \sum_{\substack{\lambda_1<\dots<\lambda_p \\ t_1<\dots<t_q}} B_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar{t}_1\dots\bar{t}_q} \|\varphi_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar{t}_1\dots\bar{t}_q}\|^2$$

En dicha expresión todos los coeficientes numéricos $B_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar{t}_1\dots\bar{t}_q}$ son negativos. Ello implica $\varphi = 0$ en x_0.

<u>Teorema 1</u>.- Sea M una variedad kähleriana compacta. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado de linea holomorfo. Supongamos que existe

$\frac{\gamma}{2\pi} \in c_1(E)$ tal que $s(\gamma) \leq 0$ con rango de $s(\gamma)$ constante ($=k$) en todos los puntos de M. Se tiene $H^{p,q}(E) = 0$ si $p+q < k$.

Demostración.- Tomemos $\tilde{g}$ como en la proposición precedente. Si $\varphi \in_1 H^{p,q}(E)$ se tiene $:2 \langle (\Lambda e(\gamma) - e(\gamma)\Lambda)\varphi, \varphi \rangle = \langle \Lambda_E' \varphi, \varphi \rangle \geq 0$. La proposición precedente implica entonces $((\Lambda e(\gamma) - e(\gamma)\Lambda)\varphi, \varphi) = 0$ y $\varphi = 0$ en todo punto.

Conjetura 1.- El teorema 1 sigue verificándose si se sustituye la hipótesis rg $s(\gamma)$ constante ($=k$) por : en un punto x_0 de M rg $s(\gamma) = k$.

La conjetura es cierta en el caso $p=0$ (Ver [3]teorema B' y [2]).

2. Isomorfismo de Le Potier [5].- Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial holomorfo sobre una variedad compleja M. Sea E^* el fibrado dual y $P(E^*) \xrightarrow{p} M$ la proyectivización de E. Consideremos:

$$\begin{array}{ccc} p^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ p(E^*) & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

donde $p^*(E)$ indica el fibrado imagen inversa de E por p. Sea $x \in M$, $u_x \in E_x = \pi^{-1}(x)$, $z_x \in E_x^*$ y sea $\tilde{z}_x$ la proyectivización de z_x. $\tilde{z}_x \in P(E^*)_x$. $p^*(E)$ estará formado por todos los pares $(\tilde{z}_x, u_x)$. Sea F el sub-fibrado de $p^*(E)$ formado por los pares $(\tilde{z}_x, u_x)$ tales que $z_x \langle u_x \rangle = 0$. Sea Q(E) el fibrado cociente $p^*(E)/F$. Le Potier ha probado el siguiente isomorfismo:

$$H^{p,q}(M,E) \cong H^{p,q}(P(E^*), Q(E)).$$

3. Estudio de $c_1(Q(E))$ [4].- Con las mismas notaciones que en el apartado precedente, supongamos $E \xrightarrow{\pi} M$ dotado de una métrica hermítica h. Sea $\overset{*}{h}$ la métrica hermítica induci-

da por h en E^*. Si $(\tilde{z}_x, u_x) \in p^*(E)$, designaremos por $\widetilde{(\tilde{z}_x, u_x)}$ su clase en $Q(E) = p^*(E)/F$.

Definimos una métrica hermítica H en Q(E) de la siguiente manera:

$$(3,1) \qquad H(\widetilde{(\tilde{z}_x, v_x)}, \widetilde{(\tilde{z}_x, u_x)}) = \frac{z_x\langle v_x\rangle \overline{z_x\langle u_x\rangle}}{\overset{*}{h}(z_x, z_x)}$$

La definición no depende ni del representante z_x de $\tilde{z}_x$ elegido ni de los representantes $(\tilde{z}_x, v_x)$ y $(\tilde{z}_x, u_x)$ de $\widetilde{(\tilde{z}_x, v_x)}$ y $\widetilde{(\tilde{z}_x, u_x)}$ elegidos.

Vamos a hallar la expresión local de H en una carta local en que el fibrado trivialice. Sea U un abierto de M tal que $E|U$ es trivial. Consideremos una trivialización de $E|U$ dada por un sistema de r secciones $\{s_A\}$ de $E|U$. Sea $\{s^A\}$ la base dual, que constituirá una trivialización de $E^*|U$:

$$E^*|U \longrightarrow U\times C^r$$

$$z_x \longrightarrow (x, z_1 \dots z_r)$$

donde $z_x = \sum z_A s^A(x)$. Consideremos la trivialización de $P(E^*)|U$:

$$P(E^*)|U \longrightarrow U\times P_{r-1}(C)$$

$$\tilde{z}_x \longrightarrow (x, \widetilde{(z_1 \dots z_r)})$$

Sea V el abierto de $P(E^*)|U$ dado por $z_r \neq 0$. Pongamos en V:

$t_A(z) = \dfrac{z_A}{z_r}$, $A = 1 \dots r$, $t_r(z) = 1$. $t(z)$ indicará un elemento de $P(E^*)$. $Q(E)|V$ admite la siguiente trivialización:

$$Q(E)|V \longrightarrow V \times C$$

$$(\overbrace{\tilde{z}_x, v_x}) \longrightarrow (x,(\overbrace{t_1(z_x)\dots t_{r-1}(z_x),1}),t(z_x)\langle v_x\rangle)$$

La métrica H se expresará en esta trivialización :

$$(3,2) \qquad H((x,(\overbrace{t_1\dots t_{r-1},1}),\lambda),(x,(\overbrace{t_1\dots t_{r-1},1}),\mu))=\frac{\lambda\bar{\mu}}{\overset{*}{h}(t,t)} =$$

$$= \frac{\lambda\bar{\mu}}{h^{AB}(x)t_A\bar{t}_B} \; .$$

Los índices A y B varían de 1 a r conviniendo que $t_r = 1$. En notación matricial $h^{AB}(x)t_A\bar{t}_B = {}^t\bar{t}h^*(x)t$, donde

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{r-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

La métrica H vendrá determinada en V por la matriz de un solo elemento $\dfrac{1}{{}^t\bar{t}h^*(x)t}$. Designemos esta función por

$H(x,z)$.

Calculemos en V $d'd''\log H(x,t)$.

$$(3,3) \qquad d'\log H(x,t) = -d'\log({}^t\bar{t}h^*(x)t) = -\frac{{}^t\bar{t}(d'h^*)t + {}^t\bar{t}h^*dt}{{}^t\bar{t}h^*t}$$

$$(3,4) \qquad d''d'\log H(x,t) = -\frac{{}^td\bar{t}\wedge(d'h^*)t + {}^t\bar{t}(d''d'h^*)t + {}^td\bar{t}\wedge h^*dt}{{}^ttht}$$

$$-\frac{{}^t\bar{t}d''h^*\wedge dt}{{}^t\bar{t}h^*t} + \frac{({}^td\bar{t}h^*t + {}^t\bar{t}(d''h^*)t)\wedge({}^t\bar{t}(d'h^*)t + {}^t\bar{t}h^*dt)}{({}^t\bar{t}h^*t)^2}$$

Sea $(x^1 \dots x^n)$ un sistema de coordenadas complejas en U.

Tomemos en V las coordenadas $(x^1 \dots x^n, t_1 \dots t_{r-1})$. Convendremos en que los índices griegos $\alpha, \beta \dots$ varían de 1 a n, los índices latinos a,b... varían de 1 a r-1 y los índices A,B,... varían de 1 a r. Abreviaremos ∂_α en vez de $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $\partial_{\bar\alpha}$ en lugar de $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha}$, ∂_{n+a} en lugar de $\frac{\partial}{\partial t^a}$ y $\partial_{\overline{n+a}}$ en lugar de $\frac{\partial}{\partial \bar{t}^a}$. De (3,4) deducimos :

$$(3,5)\quad \begin{cases} \partial_\alpha \partial_{\bar\beta} \log H = - \dfrac{{}^t\bar{t}(\partial_{\bar\beta}\partial_\alpha h^*)t}{{}^t\bar{t}h^*(x)t} + \dfrac{({}^t\bar{t}(\partial_{\bar\beta}h^*)t)({}^t\bar{t}(\partial_\alpha h^*)t)}{({}^t\bar{t}h^*t)^2} \\[2em] \partial_{n+a}\partial_{\overline{n+b}} \log H = - \dfrac{h^{*ab}}{{}^t\bar{t}h^*t} + \dfrac{(h^{*Ab}t_A)(h^{*aB}\bar{t}_B)}{({}^t\bar{t}h^*t)^2} \\[2em] \partial_\alpha \partial_{\overline{n+b}} \log H = - \dfrac{\partial_\alpha h^{*Ab}}{{}^t\bar{t}h^*t} + \dfrac{(h^{*Ab}t_A)({}^t\bar{t}(\partial_\alpha h^*)t)}{({}^t\bar{t}h^*t)^2} \end{cases}$$

4. <u>Estudio de $C_1(Q(E))$ cuando $E \geq 0$</u> .- Seguimos con las mismas notaciones que en los apartados 2 y 3. Supongamos $E \overset{\pi}{\to} M$ dotado de una métrica hermítica h. A dicha métrica le asociamos el tensor de Nakano N definido por:

$$N(s,X,s',Y) = h(\Omega(X,\bar{Y})s,s')$$

donde X,Y son campos sobre M y s,s' secciones de E. Ω indica la curvatura de la única conexión de tipo (1,0) en E determinada por h. Se verifica fácilmente la siguiente propiedad: $N(s,X,s',Y)=\overline{N(s',Y,s,X)}$. De aquí se desprende que $N(s,X,s,X)$ es siempre real.

<u>Definición</u>.- Se dice $E \geq 0$ si existe una métrica hermítica h en E cuyo tensor de Nakano N verifica $N(s,X,s,X) \geq 0$ para todo par (s,X). Diremos entonces también que $N \geq 0$. Fijada s de $\Gamma(E)$, designemos por N_s la forma hermítica definida por: $N_s(X,Y) = N(s,X,s,Y)$.

Proposición 2.- Supongamos $E \geq 0$. Existe $\frac{\gamma}{2\pi} \in c_1(Q(E))$ tal que $s(\gamma) \geq 0$. Sea h la métrica hermítica en E cuyo tensor de Nakano $N \geq 0$. Si se supone que rg N_s es constante $(=k) \forall$ s en todo punto de M, entonces puede tomarse $(\gamma/2\pi) \in c_1(Q(E))$ tal que $s(\gamma) \geq 0$ y rg $s(\gamma) = k + r - 1$.

Demostración.- Evaluemos $\partial_i \, \partial_{\bar{j}} \log H$ en un punto cualquiera $\tilde{z}_{x_0}$ de $P(E^*)$. Para ello utilizaremos las fórmulas (3,5). Dado x_0 de U, elijamos la trivialización $\{s^A\}$ $A = 1 \ldots r$ de $E^*|U$ de modo que $(h^{*AB}(x_0)) =$ identidad y que $(d'h^{*AB}(x_0))$ sea la matriz nula. Pongamos $\gamma = \sqrt{-1}\, d'd'' \log H$. $\frac{\gamma}{2\pi} \in c_1(Q(E))$. $\gamma_{i\bar{j}} = -\sqrt{-1}\, \partial_i \partial_{\bar{j}} \log H$. $s(\gamma)_{i\bar{j}} = -\sqrt{-1}\, \gamma_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \log H$. Utilizando las fórmulas (3,5) se tendrá en el punto (x_0, t):

$$s(\gamma)_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{{}^t\bar{t}(\partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} h^*(x_0)) t}{\Sigma\, t_c \bar{t}_c}$$

$$(4,1) \qquad s(\gamma)_{\alpha,\overline{n+b}} = 0$$

$$s(\gamma)_{n+a,\overline{n+b}} = \frac{\delta_{ab}}{\Sigma\, t_c \bar{t}_c} - \frac{t_a \bar{t}_b}{(\Sigma\, t_c \bar{t}_c)^2}$$

$(s(\gamma)_{n+a,\overline{n+b}})$ es siempre definida positiva por tratarse de la métrica de Fubini en $P_{r-1}(C)$.

Designemos por $\overset{*}{\Omega}$ la curvatura de h^* y por Ω la de h. Se tiene: $\Omega = -{}^t\overset{*}{\Omega}$.

$\overset{*}{\Omega} = (d''d'h^*)h^{*-1} + h^{*-1}(d'h^*)h^{*-1}$. En x_0 se tendrá: $\overset{*}{\Omega} = d''d'h^*$.

$\Omega = -{}^t d''d'h^*$. $(N_t)_{\alpha\bar{\beta}} = N_t\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = N\left(t, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, t, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) =$

$= h\left(\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) t, t\right) = t^A \overline{t^B} h_{CB} \Omega^C_A \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) =$

$= -t^A \overline{t^B} h_{CB} \overset{*}{\Omega}{}^A_C \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = -t^A \overline{t^B} h^{*BC} \overset{*}{\Omega}{}^A_C \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$. En x_0 se tendrá: $(N_t)_{\alpha\bar{\beta}} = -(d''d'h^{*BA})\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) t^A \overline{t^B} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} h^{*BA}(x_0)\, t^A \overline{t^B}$.

Vemos pues que $(s(\gamma)_{\alpha\bar{\beta}})$ es ≥ 0 y que su rango es el de N_t, es decir, k. En x_0 se tiene:

$$(4,2) \qquad s(\gamma) = \begin{pmatrix} (s(\gamma)_{\alpha\bar{\beta}}) & 0 \\ 0 & (s(\gamma)_{n+a,\overline{n+b}}) \end{pmatrix}$$

Por tanto $s(\gamma)\geq 0$ y el rango de $s(\gamma)$ es $k+r-1$.

Proposición 3.- Sea $E \overset{\pi}{\to} M$ un fibrado vectorial holomorfo sobre una variedad compleja compacta M. Consideremos el fibrado $P(E^*) \overset{p}{\to} M$. Si M es variedad kähleriana, $P(E^*)$ también.

Demostración.- Sea $\frac{\gamma}{2\pi} \in c_1(Q(E))$. Podemos expresar $s(\gamma)$ en cada punto x_0 mediante (4,2), donde $(s(\gamma)_{n+a,\overline{n+b}})$ representa la métrica de Fubini sobre la fibra. Sea g una métrica kähleriana sobre M y k un número positivo. $s(\gamma) + kp^*(g)$ se expresará en x_0 por:

$$\begin{pmatrix} (s(\gamma)_{\alpha\bar{\beta}} + kg_{\alpha\bar{\beta}}) & 0 \\ 0 & (s(\gamma)_{n+a,\overline{n+b}}) \end{pmatrix}$$

Por ser M compacta, podemos elegir k suficientemente grande para que $s(\gamma)+kp^*(g)$ sea definida positiva en todo punto. La forma de Kähler de $s(\gamma)+kp^*(g)$ será $\gamma + p^*(F)$, donde F es la forma de Kähler de g. Por tanto será cerrada. Así pues $s(\gamma) + kp^*(g)$ es una métrica kähleriana en $P(E^*)$.

Teorema 2.- Sea M una variedad kähleriana compacta, $E \overset{\pi}{\to} M$ un fibrado vectorial holomorfo de rango r. Se supone $E\leq 0$. Sea h la métrica hermítica en E cuyo tensor de Nakano N es ≤ 0. Se supone que $\forall$ t, rg $N_t = k$ en todo punto. Se verifica $H^{p,q}(E) = 0$ si $p+q < k-r+1$.

Demostración.- Por la fórmula de dualidad se tiene: $H^{p,q}(M,E) \cong H^{n-p,n-q}(M,E^*)$, donde n es la dimensión compleja de M. Por el isomorfismo de Le Potier, $H^{n-p,n-q}(M,E^*) \cong H^{n-p,n-q}(P(E),Q(E^*))$. De nuevo por la fórmula de dualidad, $H^{n-p,n-q}(P(E),Q(E^*)) \cong$ $\cong H^{r+p-1,r+q-1}(P(E),Q(E^*)^*)$. Por tanto $H^{p,q}(M,E) \cong$ $\cong H^{r+p-1,r+q-1}(P(E),Q(E^*)^*)$. Por la proposición anterior P(E) es una variedad kähleriana compacta. Si $E \leq 0$, $E^* \geq 0$, por la proposición 2, $c_1(Q(E^*)) \geq 0$ y por tanto $c_1(Q(E^*)^*) \leq 0$. Además puesto que rg $N_t = k$, la proposición 2 nos asegura la existencia de $\frac{\gamma}{2\pi} \in c_1(Q(E^*)^*)$ tal que $s(\gamma) \leq 0$ y rg $s(\gamma)$ constante $(= k + r - 1)$. Puesto que $Q(E^*)^*$ es un fibrado de linea, podremos aplicarle el teorema 1. Se tendrá $H^{r+p-1,r+q-1}(P(E),Q(E^*)^*) = 0$ si $p+q < k-r+1$ lo que concluye la demostración.

Si la conjetura 1 fuera cierta, de la demostración que hemos hecho del teorema 2, se desprendería la validez del siguiente resultado:

Teorema 2' .- Sea M una variedad kähleriana compacta, $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial holomorfo de rango r. Se supone $E \leq 0$. Sea h la métrica hermítica en E cuyo tensor de Nakano N es ≤ 0. Se supone que en un punto $x_0 \in M$ existe un t de la fibra E_{x_0} tal que rg $N_t = k$. Se verifica $H^{p,q}(E) = 0$ si $p+q \quad k-r+1$.

Le Potier [5] obtiene, como consecuencia de su teorema de anulación, un resultado concerniente a la dimensión de un proyectivo complejo en el que se puede sumergir analíticamente una variedad compleja, comapacta, paralelizable, de dimensión dada. Por un procedimiento similar, del teorema 2', puede obtenerse:

Si M es una variedad compleja, paralelizable, de dimensión compleja n, M no puede sumergirse analíticamente en un producto de proyectivos $P_p(C) \times P_q(C)$ si $p+q < 2n$.

B I B L I O G R A F I A

[1] AKIZUKI-NAKANO, Proc.Japan Akad. 30, 1954, pp 266-272.

[2] GIRBAU, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t.273,1971, pp 461-462.

[3] GIRBAU, Ann. di Mat. Pura ed Appl., t.101,1974,pp.171-183.

[4] GRIFFITHS,"Positive vector bundles". Global Analysis. Edited by Spencer and Iyanaga. Princeton University Press, 1969.

[5] LE POTIER, Math. Ann., t.218,1975, pp. 35-53.

(*) Un resumen de dicho trabajo ha sido publicado en Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, t. 283(1976) pp. 355-358.