POSICIONES DE EQUILIBRIO RELATIVO DEL PROBLEMA DE 4 CUERPOS

J. Llibre

Resumen.- Se demuestra la unicidad de las 50 p.e.r. con simetría del problema de 4 cuerpos con las masas iguales. Se dan todas las p.e.r. para los problemas de 1+3 cuerpos y de 2+2 cuerpos. Para el problema de 1+3 cuerpos se estudia el comportamiento cuando se aumentan las tres masas infinitesimales hasta tomar las cuatro el mismo valor.

Introducción: Sean $m_1, m_2, \ldots, m_n$ las masas no nulas de los n cuerpos; M el espacio vectorial de las posiciones en R^3 respecto del c.d.m.; esto es:

$$M = \left\{ r=(r_1,r_2,\ldots,r_n)\in (R^3)^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} m_i r_i = 0 \right\}$$

donde r_i indica la posición de la masa m_i.

Las p.e.r. son un tipo particular de soluciones del problema de n cuerpos en las que el movimiento se reduce a un giro con velocidad angular constante alrededor del c.d.m. Sea R_e el conjunto de las p.e.r.

El grupo de rotaciones del plano al actuar sobre M (si φ es una rotación y $r\in M$, $\varphi(r) = (\varphi(r_1), \varphi(r_2),\ldots,\varphi(r_n))$); deja invariante a R_e; la multiplicación en M por escalares no nulos también deja invariante a R_e. Se dice que $r, r'\in R_e$ son equivalentes si difieren en una rotación seguida de una multiplicación por un escalar no nulo. El conjunto de las clases de equivalencia se designa por $\overline{R}_e$.

En la proposición siguiente se hace un resumen de los resultados principales acerca de las p.e.r. Se prescinde de los resultados más recientes debidos a Palmore (3) Este resumen en su mayor parte fué dado por Smale en (7). Se completa con resultados dados por Hagihara (1).

Proposición: Los resultados siguientes son conocidos:

(i) R_e, $\overline{R}_e$ dependen unicamente de las masas.

(ii) $\overline{R}_e$ es el mismo para el problema de n cuerpos en el espacio que para el problema de n cuerpos en el plano con las mismas masas.

(iii) Si n=2, $\overline{R}_e$ posee un único elemento.

(iv) Si n=3, $\overline{R}_e$ posee cinco elementos. En el problema de 3 cuerpos dadas las masas m_1, m_2, m_3 existen tres p.e.r. colineales (Euler); y existen dos p.e.r. formadas por las r_i situadas en los vértices de un triángulo equilátero (Lagrange).

(v) Existen $n!/2$ p.e.r. colineales para cada n (Moulton).

(vi) En el problema de n cuerpos sobre el plano con masas m_1, $m_2, \ldots, m_n$, las condiciones para tener una p.e.r. no colineal, vienen dadas por las ecuaciones

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ k\neq i,j}} m_k \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} \left(r_{ik}^{-3} - r_{jk}^{-3}\right) = 0$$

al variar $1\leq i<j\leq n$, donde (x_i, y_i) es la posición de la masa m_i y r_{ij} es la distancia entre las masas m_i y m_j.

El problema de cuándo $\overline{R}_e$ es finito para cada elección de las masas $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ es un problema abierto. En cualquier caso para $n>3$, la naturaleza de una p.e.r. no está bien entendida y existen muchas preguntas por resolver en esta área. Dentro de esta linea se encuentran los recientes trabajos de Smale (6) y (7); Palmore (3) y (4); y Simó (5).

§1 Posiciones de equilibrio relativo del problema de 4 cuerpos

De la proposición anterior resulta que las ecuaciones de las p.e.r. no colineales para el problema de 4 cuerpos se escriben:

$$m_3\, A_4\, S_{52} = m_4\, A_3\, S_{46} \qquad (1)$$
$$m_2\, A_4\, S_{12} = m_4\, A_2\, S_{43} \qquad (2)$$
$$m_2\, A_3\, S_{16} = m_3\, A_2\, S_{53} \qquad (3)$$
$$m_1\, A_4\, S_{15} = m_4\, A_1\, S_{63} \qquad (4)$$
$$m_1\, A_3\, S_{14} = m_3\, A_1\, S_{23} \qquad (5)$$
$$m_1\, A_2\, S_{54} = m_2\, A_1\, S_{26} \qquad (6)$$

donde $S_1 = r_{12}^{-3}$, $S_2 = r_{23}^{-3}$, $S_3 = r_{34}^{-3}$, $S_4 = r_{14}^{-3}$, $S_5 = r_{13}^{-3}$, $S_6 = r_{24}^{-3}$, $S_{ij} = S_i - S_j$, $A_1 = (234)$, $A_2 = (431)$, $A_3 = (241)$, $A_4 = (321)$ y $(ijk) = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}$.

Cualquier p.e.r. no colineal para el problema de 4 cuerpos consiste en un cuadrilátero, en cuyos vértices se encuentran las cuatro masas girando con velocidad angular constante. Si el cuadrilátero determinado por las cuatro masas es convexo, se dice que la p.e.r. es convexa. Análogamente, se habla de p.e.r. cóncavas.

A partir de ahora, cuando se hable de un cuadrilátero convexo hablaremos del cuadrilátero convexo de la figura 1. Y cuando se hable de un cuadrilátero cóncavo, lo haremos del de la figura 2.

(1.1) <u>Proposición</u>: (i) Dadas cuatro masas cualesquiera con un orden prefijado existe por lo menos una p.e.r. convexa.

(ii) Para cada $m_1 = m_2 > 0$ y $m_3 = m_4 > 0$, existe una única p.e.r. en forma de trapecio isósceles.

Esta proposición y la siguiente son debidas a Mac-Millan y Bartky (3).

(1.2) Proposición: Si un cuadrilátero convexo es una p.e.r. se tiene:

(i) Que el cociente entre las dos diagonales está comprendido entre $1/\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$.

(ii) Que cada ángulo interior del cuadrilátero es mayor que 60° y menor que 120°.

(iii) Que las diagonales dividen a cada ángulo interior del cuadrilátero en dos ángulos siendo cada uno de ellos menor que 60°. En particular, cada lado es menor que las dos diagonales.

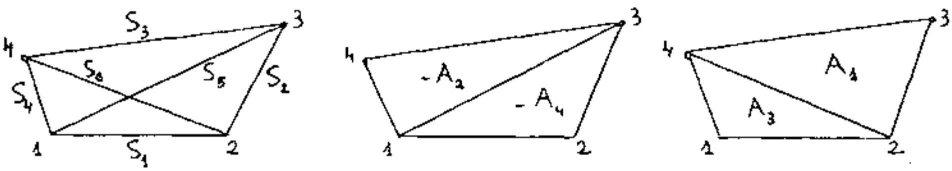

Fig. 1

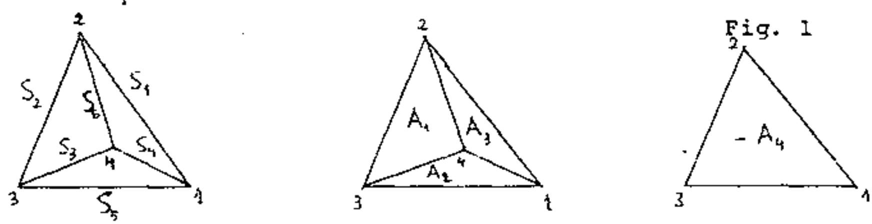

Fig. 2

(1.3) Proposición: Si el cuadrilátero convexo formado por cuatro masas cualesquiera es una p.e.r., se pueden reordenar las masas de modo que $S_3 \geqslant S_2$, $S_4 \geqslant S_1 > S_5$, S_6.

Demostración: Por ser cada lado menor que las dos diagonales resulta $S_3, S_2, S_4, S_1 > S_5, S_6$. Teniendo en cuenta que A_1 y A_3, A_2 y A_4 tienen el mismo signo respectivamente las ecuaciones (2) y (5) dan lugar a los casos siguientes:

$$S_1 = S_4 = S_2 = S_3$$
$$S_1 = S_4 > S_2 = S_3$$
$$S_1 = S_4 < S_2 = S_3$$
$$S_1 > S_4 \;,\; S_2 > S_3$$

$$S_4 > S_1 \ , \ S_3 > S_2$$
$$S_3 > S_2 \ , \ S_4 > S_1$$
$$S_2 > S_3 \ , \ S_1 > S_4$$

Es claro que calquiera de estos casos, reordenando las masas si es necesario, se reduce al caso $S_3 \geqslant S_2$, $S_4 \geqslant S_1$.

//

Sobre las p.e.r. cóncavas se tiene la proposición siguiente también debida a Mac-Millan y a Bartky (3).

(1.4) Proposición: Si el cuadrilátero cóncavo formado por cuatro masas cualesquiera es una p.e.r. entonces:

(i) Se pueden reordenar las masas de modo que

$$S_3 \ , \ S_6 \ , \ S_4 > S_1 \ , \ S_5 \ , \ S_2$$

(ii) Existe un S_0 tal que $(S_1-S_0)(S_3-S_0)=(S_2-S_0)(S_4-S_0)=(S_5-S_0)(S_6-S_0)$.

En el libro de Hagihara (1) se mejora el primer apartado de la porposición anterior en la forma siguiente:

(1.5) Corolario: En las hipotesis de la proposición anterior se pueden reordenar las masas de manera que

$$S_3 \geqslant S_6 \geqslant S_4 > S_1 \geqslant S_5 \geqslant S_2$$

Consecuencia del segundo apartado de la proposición anterior se tiene:

(1.6) Corolario: En las hipotesis de la proposición anterior se verifica que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_1+S_3 & S_2+S_4 & S_5+S_6 \\ S_1S_3 & S_2S_4 & S_5S_6 \end{vmatrix}$$

es cero.

§ 2 Posiciones de equilibrio relativo del problema de 4 cuerpos con masas iguales

Una p.e.r. con simetría es una p.e.r. en la que el cuadrilátero determinado por los cuatro cuerpos es tal que el grupo de los movimientos del plano que lo dejan invariantes no es el trivial. Las p.e.r. sin simetría las llamaremos p.e.r. asimétricas.

En la proposición siguiente se resumen todas las p.e.r. conocidas para el problema de 4 cuerpos con masas iguales.

(2.1) Proposición: Se conocen un total de 146 p.e.r. del problema de 4 cuerpos con masas iguales. De estas, 50 poseen simetría y se reparten de la siguiente forma:
12 en las que los cuatro cuerpos están alineados.
6 en las que los cuatro cuerpos están sobre los vértices de un cuadrado.
8 en las que tres de los cuerpos están sobre los vértices de un triángulo equilátero y el cuarto está en su baricentro.
24 en las que tres de los cuerpos están sobre los vértices de un triángulo isósceles y el cuarto sobre su eje de simetría. Las dimensiones de uno de estos triángulos isósceles son: si la base es el lado desigual que vale 2, la altura vale 1.81723939472383..y la cuarta masa esta sobre dicha altura a una distancia de la base igual a 0.6503784729520665...

Las 96 p.e.r. asimetricas se reparten en cuatro posiciones; dos de las cuales se obtienen por simetría axial a partir de las otras dos y en cada una de las cuales tres masas están en los vértices de un triángulo escaleno y la cuarta en su interior.

Las p.e.r. alineadas y las que tienen forma de cuadrado o triángulo equilátero son clásicas, véase Hagihara (1). Las restantes son debidas a Palmore (3).

(2.2) Teorema: Para el problema de 4 cuerpos con masas iguales no hay más p.e.r. con simetría que las 50 de la proposición anterior.

Veamos unas lemas previos a la demostración de este teorema.

(2.3) Lema: Dadas cuatro masas cualesquiera, si el cuadrilátero formado por ellas es una solución de equilibrio relativo; se tiene:

(i) $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$

(ii) $A_i \neq 0 \quad i=1,2,3,4$

Demostración: (i) Es consecuencia de que $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ es igual al determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 1 \\ 1 & x_3 & y_3 & 1 \\ 1 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

(ii) Si $A_1=0$, los cuerpos 2,3 y 4 están alineados. Y de las ecuaciones (4),(5) y (6) se tiene respectivamente:

$$S_1 = S_5 \quad ó \quad A_4 = 0$$
$$S_1 = S_4 \quad ó \quad A_3 = 0$$
$$S_5 = S_4 \quad ó \quad A_2 = 0$$

No puede ser que algún A_i sea cero con $i\neq 1$; puesto que, o habría una colisión entre los cuerpos, o bien los cuerpos estarían alineados como se deduce fácilmente con ayuda de las figuras 1 y 2. Tampoco es posible que $S_1=S_4=S_5$ puesto que, al estar los cuerpos 2,3 y 4 alineados obligaría a tener una colisión. En definitiva, $A_1\neq 0$. Análogamente, se razonaría que $A_i\neq 0$ para $i=2,3,4$.

//

(2.4) Lema: Dadas cuatro masas iguales, si el cuadrilátero formado por ellos es una solución de equilibrio relativo, se tiene: $S_{16}S_{54}(S_{63}+S_{15})+S_{15}S_{26}(S_{53}+S_{16})=0$

<u>Demostración</u>: Por el lema (2.3) se tiene:

$$A_i \neq 0 \quad i=1,2,3,4 \qquad (7)$$

y que $A_1+A_3=-(A_2+A_4)=A\neq 0$

Sustituyendo $A_3=A-A_1$ y $A_4=-(A+A_2)$ en las ecuaciones (3), (4) y (6) se tiene el sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} -S_{16}\,A + S_{16}\,A_1 + S_{53}\,A_2 &= 0 \\ S_{15}\,A + S_{63}\,A_1 + S_{15}\,A_2 &= 0 \\ S_{26}\,A_1 - S_{54}\,A_2 &= 0 \end{aligned}$$

en las incógnitas A, A_1 y A_2. La condición (7) nos dice que el determinante del sistema es cero. Esto es:

$$S_{16}S_{54}(S_{63}+S_{15})+S_{15}S_{26}(S_{53}+S_{16})=0$$

//

<u>Demostración del teorema (2.2)</u>: Es claro que una p.e.r. simétrica es tal que por lo menos dos de las S_i son iguales.

Si la p.e.r. simétrica es convexa, puede ser que tenga iguales:

(a) Dos lados opuestos.

(b) Dos diagonales.

(c) Dos lados contiguos.

No puede tener iguales una diagonal y un lado en virtud de la proposición (1.3).

En el caso (a). Si $S_1=S_3$, de (1.3) se tiene $S_1=S_2=S_3=S_4$ y de las ecuaciones (1)-(6), $S_5=S_6$, luego la p.e.r. es un cuadrado.

Si $S_2=S_4$, las ecuaciones (2) y (5) se escriben:

$$\begin{aligned} A_4\,S_{12} &= A_2\,S_{23} \\ A_3\,S_{12} &= A_1\,S_{23} \end{aligned}$$

sumándolas miembro a miembro, se tiene:

$$(A_3+A_4)\,S_{12}=(A_1+A_2)S_{23} \qquad (8)$$

Por el lema (2.3), $A_3+A_4=-(A_1+A_2)$. Si $A_3+A_4\neq 0$, de

(8) se deduce $S_1 = S_3$ y estamos en el caso anterior. Si $A_3 + A_4 = 0$, entonces $A_3 = -A_4$ y $A_1 = -A_2$. Luego la p.e.r. es un trapecio isósceles. La proposición (1.1), nos dice que existe un único trapecio isósceles, luego se trata del cuadrado.

En el caso (b), $S_5 = S_6$ y el lema (2.4) se reduce a $S_{15} S_{13} S_{24} = 0$, como $S_{15} \neq 0$, se tiene que $S_{13} = 0$ ó $S_{24} = 0$. Luego este caso se reduce al anterior.

En el caso (c), se distinguen dos subcasos.

(c_1) Si $S_1 = S_4$, de (5) se tiene $S_2 = S_3$. Análogamente, si $S_2 = S_3$.
(c_2) Si $S_1 = S_2$, de (2) se tiene $S_3 = S_4$. Análogamente, si $S_3 = S_4$.

En ambos subcasos, la p.e.r. forma un rombo (cuadrilátero que tiene sus dos diagonales perpendiculares, cortándose, por lo menos en una de ellas, en su punto medio). Veremos que la única p.e.r. en forma de rombo es el cuadrado. Previamente estudiaremos las p.e.r. simétricas y cóncavas.

Si se tiene una p.e.r. simétrica y cóncava, en virtud del corolario (1.5) y de las ecuaciones (1)-(6), se verifica uno de los casos siguientes:

(a) $S_1 = S_2 = S_5$ y $S_3 = S_4 = S_6$
(b) $S_1 = S_5$ y $S_3 = S_6$
(c) $S_2 = S_5$ y $S_4 = S_6$

En cualquiera de estos casos, la p.e.r. tiene forma de triángulo isósceles.

Las p.e.r. en forma de rombo ó de triángulo isósceles, son un caso particular de las p.e.r. con simetria axial. Las ecuaciones (1)-(6) se reducen para una p.e.r. con simetria axial a las dos ecuaciones siguientes:

$$F(x,y) = 2x\left[1/8 - (1+x^2)^{-3/2}\right] + |x+y|\left[(1+y^2)^{-3/2} - |x+y|^{-3}\right] = 0$$

$$G(x,y) \equiv F(y,x) = 0$$

siendo x e y las longitudes definidas en la figura 3. El sentido de la flecha en dicha figura indica el signo de x e y.

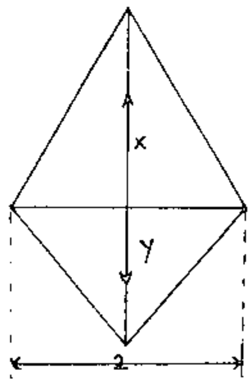

Fig. 3

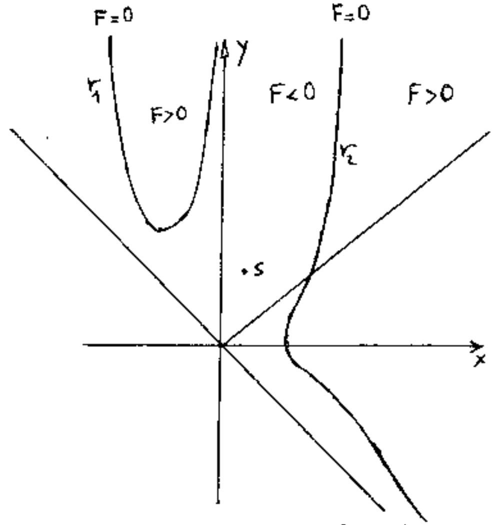

Fig. 4

No es restrictivo suponer que $x>0$ y que $x\geq|y|$. Si $y>0$ se trata de una p.e.r. convexa, y en caso contrario cóncava. Por el lema (2.3), $y\neq 0$. Dada la simetría de F y G basta disponer de la gráfica de $F(x,y)=0$, y no es restrictivo suponer que $x+y>0$. Dicha gráfica aparece en la figura 4, y contiene dos ramas, r_1 y r_2. Sean r_1' y r_2' las simétricas respecto de la recta $y=x$; $r_2\cap r_2'$ nos da la p.e.r. correspondiente al cuadrado; $r_2\cap r_1'$ da dos puntos (muy próximos) correspondientes al triángulo equilátero y al isósceles. En la figura 4 se indican las regiones (dentro de $x+y>0$) en que F es positivo ó negativo y el punto $s(.44612465, 1.39936013)$ en que F vale -0.4989512 y que es de silla.

//

§ 3. Las soluciones de equilibrio relativo del problema de 1+3 cuerpos.

El problema de 1 3 cuerpos es el problema de 4 cuerpos cuando tres de ellos tienen masa infinitesimal. El siguiente teorema resume nuestros resultados sobre las p.e.r. del problema de 1+3 cuerpos.

(3.1) Teorema: El problema de 1+3 cuerpos tiene 26 p.e.r., que se distribuyen de la siguiente forma:

(a) 12 en las que los cuatro cuerpos estan alineados. De éstas hay dos clases esencialmente distintas; véanse en la figura 5, A y A´. Las demás clases se obtienen a partir de éstas por permutación de las masas infinitesimales. Cada una de estas clases proviene de una de las clases de Moulton del problema de 4 cuerpos con masas iguales al hacer tender tres masas a cero.

(b) 6 como las de la figura 5 C. De estas solo hay una esencialmente distinta, las demás se obtienen a partir de ésta por permutación de las masas infinitesimales. Cada una de estas p.e.r. proviene de una de las clases en forma de cuadrado del problema de 4 cuerpos con masas iguales,al hacer tender a cero las tres masas de los vértices.

(c) 2 clases como las de la figura 5 T. Consisten en un triángulo equilátero en cuyos vértices se encuentran las masas infinitesimales y en su baricentro la masa restante. Una clase se difiere de la otra por permutación de sus masas infinitesimales. Cada una de estas clases proviene de cuatro de las clases en forma de triángulo equilátero del problema de 4 cuerpos con masas iguales al hacer tender a cero las tres masas de los vértices.

(d) 6 clases como las de la figura 5 T´. Las clases difieren entre sí por permutación de las masas infinitesimales. Cada una de estas clases proviene de cuatro de las clases en forma de triángulo isósceles del problema de 4 cuerpos con masas iguales al hacer tender a cero las tres masas de los vértices.

Existen otras p.e.r. del problema de 1+3 cuerpos en los que dos de los cuerpos infinitesimales están en las proximidades de una colisión. Estos casos no se han tenido en cuenta aquí.

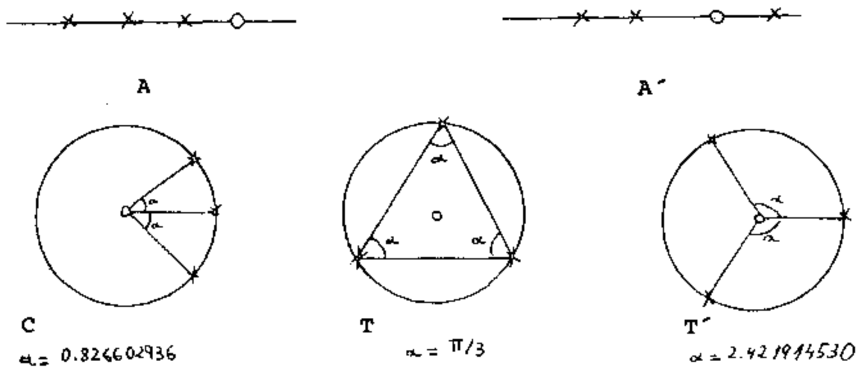

Fig. 5

Demostración: De las ecuaciones (1)-(6) se deduce que cualquier solución de equilibrio relativo del problema de 1+3 cuerpos consiste en tener los tres cuerpos infinitesimales sobre una circunferencia de radio arbitrario y de centro el cuerpo no infinitesimal. Supondremos que el cuerpo no infinitesimal es el de masa m_1. Salvo un cambio de unidades se puede tomar $m_1=1$ y hacer que el radio de la circunferencia de una p.e.r. determinada sea 1. Entonces, de la figura 6, es claro que conocer una solución de equilibrio relativo del problema de 1+3 cuerpos es conocer los ángulos α y β.

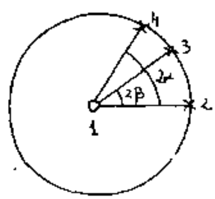

Fig. 6

Las ecuaciones (2) y (3) se escriben:

$$A_4\ (1-S_2) = A_2\ (1-S_3)$$
$$A_3\ (1-S_6) = A_2\ (1-S_3)$$

Sustituyendo:

$A_2 = \mathrm{sen}(2\beta - 2\alpha)/2$, $A_3 = \mathrm{sen}\ (2\alpha)/2$, $A_4 = -\mathrm{sen}(2\beta)/2$

y $S_2 = (2\operatorname{sen}\beta)^{-3}$, $S_3 = (2\operatorname{sen}(\alpha-\beta))^{-3}$, $S_6 = (2\operatorname{sen}\alpha)^{-3}$
se obtiene:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) - \cos\alpha/4\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}(2\beta) - \cos\beta/4\operatorname{sen}^2\beta = 0 \qquad (\gamma)$$
$$\operatorname{sen}(2\beta) - \cos\beta/4\operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}(2\alpha-2\beta) - \cos(\alpha-\beta)/4\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)=0 \quad (\delta)$$

La figura 9, nos muestra la gráfica de estas dos curvas en la región $\{(\alpha,\beta) \mid 0\leq\beta\leq\alpha\leq\pi\}$.

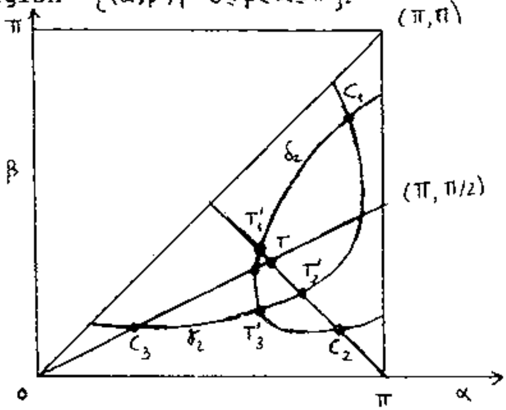

Fig. 9

La curva (γ) tiene dos ramas, la recta $\alpha+\beta=\pi$ y la curva γ_2. La curva (δ) también tiene dos ramas: $2\alpha+\beta=\pi$ y la curva δ_2. Las dos curvas se cortan en siete puntos. Estos puntos solo dan lugar a tres p.e.r. distintas del problema de 1+3 cuerpos, ya que las p.e.r. que provienen de los puntos T_1', T_2' y T_3' pertenecen a la misma clase. Lo mismo sucede para las p.e.r. que provienen de los puntos C_1, C_2 y C_3.

//

El estudio de la evolución se ha hecho numéricamente. Si se parte de una p.e.r. del problema de 4 cuerpos con masas iguales en forma de triángulo equilátero o isósceles haciendo tender tres masas a cero y siendo una de ellas la masa situada en el interior del triángulo entonces no tienden a una p.e.r. del problema de 1+3 cuerpos, sino que tienden a una p.e.r. del problema de 1+2 cuerpos, ya que en el límite dos de los cuerpos infinitesimales colisionan.

§4 Las soluciones de equilibrio relativo del problema de 2+2 cuerpos.

El problema de 2+2 cuerpos es el problema de 4 cuerpos cuando dos de ellos tienen masa infinitesimal. El siguiente teorema resume nuestros resultados sobre las p.e.r. del problema de 2+2 cuerpos.

(4.1) Teorema: El problema de 2+2 cuerpos tiene 26 p.e.r., que se distribuyen de la siguiente forma:

(a) 12 en las que los cuatro cuerpos están alineados. De estas hay cuatro clases esencialmente distintas, véanse las figuras 8,A-B-C-D . Las demás clases se obtienen a partir de éstas permutando entre sí las masas infinitesimales y las masas no infinitesimales.

(b) 12 en las que tres de los cuatro cuerpos están alineados. De éstas hay tres esencialmente distintas, véanse las figuras 8,E-F-G. Las demás clases se obtienen a partir de éstas permutando entre sí las masas infinitesimales y las masas no infinitesimales.

(c) 2 clases como la de la figura 8,H. Una clase difiere de la otra por permutación.

Existen otras p.e.r. del problema de 2+2 cuerpos en las que 2 de los cuerpos infinitesimales, están en las proximidades de una colisión. Estos casos no se han tenido en cuenta aquí.

La demostración es consecuencia de que el problema de

2+2 cuerpos equivale a dos problemas de 2+1 cuerpos superpuestos. El problema de 2+1 cuerpos es el problema de 3 cuerpos cuando uno de ellos es infinitesimal se conoce normalmente como el problema restringido.

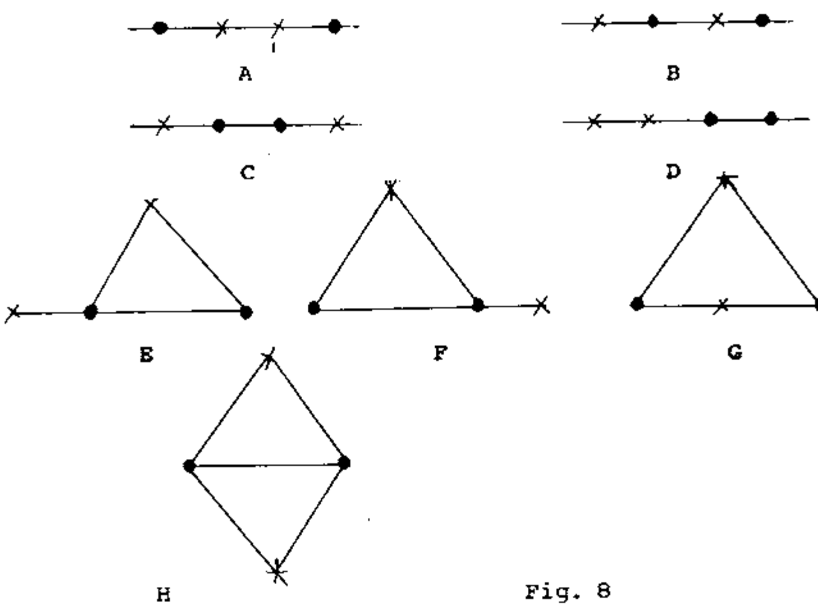

Fig. 8

Bibliografia.

(1) Hagihara,Y.:"Celestial Mechanics". Vol.1,MIT Press,1970.

(2) Mac-Millan,W.D.,Bartky,W.:"Permanent configurations in the problem of four bodies", Trans.Amer.Math.Soc. 34 (1932), 838-875.

(3) Palmore,J.I.:"Classifying Relative Equilibria I".Bull. Amer.Math. Soc. 79 (1973),904-908.

(4) --------:"Clas.Relat.Equil.II"; B.A.M.S. 81 (1975),489-491.

(5) Simó,C.:"Posiciones de equilibrio relativo del problema de 3 1 cuerpos y su evolución". Presentado a la RAME, 1976.

(6) Smale, S.: "Problems on the nature of relative equilibria in celestial mechanics". Manifolds-Amsterdan 1970, Lect. Notes in Math. 197, Springer, 1971.

(7) ----: "Topology and Mechanics II", Invent. Math. 11 (1970) 45-64.