Pub. Mat. UAB
Vol. 30 Nº 1 Maig 1986

OPERADORES CERRADOS A-FREDHOLM

Teresa Alvarez

1. INTRODUCCION

Sean C la clase de todos los operadores lineales cerrados entre espacios de Banach arbitrarios, $C(X,Y)$ el espacio de todos los operadores lineales cerrados entre los espacios de Banach X e Y. La clase de todos los operadores lineales continuos entre espacios de Banach arbitrarios será denotada por L y $L(X,Y)$ es el espacio de todos los operadores lineales continuos de X en Y. Para $T\in C(X,Y)$, $D(T)$, $N(T)$ y $R(T)$ denotarán el dominio, el núcleo y la imagen de T respectivamente, $D(T)$ con la norma $\|\ \|_T$ definida por (\$) $\|x\|_T:=\|x\| + \|Tx\|$, $x\in D(T)$ es un espacio de Banach denotado por D_T y $T_D:= T|_{D(T)}\in L(D_T,Y)$.

Sea B la clase de todos los espacios de Banach. Para $X,Y\in B$ escribimos $X \underset{c}{\subset} Y$ si existe un subespacio cerrado M de Y tal que $X = Y/M$. Un ideal de espacios es una subclase $A\subset B$ verificando las siguientes condiciones:

(i) Los espacios de dimensión finita pertenecen a A.

(ii) Si $X,Y\in A$ entonces $X \times Y\in A$

(iii) A es estable por isomorfismos topológicos.

(iv) Si M es un subespacio complementado de $X\in A$ entonces $M\in A$.

Para información y notaciones acerca de ideales de espacios e ideales de operadores remitimos a [6].

Un ideal de espacios A se dice tres espacios si satisface la propiedad:

(v) Si M es un subespacio cerrado de $X\in B$ tal que $M, X/M\in A$ entonces $X\in A$.

Los ideales de espacios que verifican el reciproco de (v) son ideales inyectivos y suprayectivos. Es simple probar que un ideal de espacios A inyectivo, suprayectivo y tres espacios está caracterizado por la siguiente propiedad:

(vi) Si $X \xrightarrow{V} Y \xrightarrow{U} Z$ es una sucesión exacta de espacios de Banach y operadores lineales continuos tales que $R(U)$ es cerrado y $X, Z \in A$, entonces $Y \in A$.

Diremos que un ideal de espacios A es exacto si satisface la propiedad (vi) y biyectivo si es inyectivo y suprayectivo.

Escribimos

$NS := \{T \in C : T \text{ normalmente soluble}\}$

$Se := \{T \in L : R(T) \text{ separable}\}$

$Fi := \{T \in L : R(T) \text{ finito}\}$

En este trabajo se estudian los operadores lineales cerrados cuya imagen es un conjunto cerrado y con núcleo o conúcleo en un ideal de espacios arbitrario A. El ideal de operadores Fi de la teoría de Fredholm clásica será reemplazado por el ideal de operadores Op(A),

2. OPERADORES A-FREDHOLM

Consideraremos las siguientes clases de operadores:

$SF_{A+} := \{T \in NS : N(T) \in A\}$

$SF_{A-} := \{T \in NS : CON(T) \in A\}$

$F_A := SF_{A+} \cap SF_{A-}$

$\overline{SF}_{A+} := \{T \in C : N(T) \in A\}$

$\overline{SF}_{A-} := \{T \in C : \overline{CON}(T) \in A\}$

$\overline{F} := \overline{SF}_{A+} \cap \overline{SF}_{A-}$

Observemos en primer lugar que los resultados sobre perturbación obtenidos en [1; prop. (2.3), th. (2.4), th. (2.5), prop. (2.6)] para el caso de operadores lineales continuos son igualmente válidos para operadores lineales cerrados (con dominio denso en aquellas situaciones en que se considere el operador conjugado). La demostración se basa en aplicar los correspondientes resultados de [1] a los operadores restricción a sus dominios dotados de la norma dada por ($).

Asimismo, con identico razonamiento al seguido en [1; prop. (2.1)] se prueba el mismo resultado para el caso de operadores lineales cerrados con dominio denso.

Para el ideal S de todos los espacios de Banach separables se obtiene el siguiente teorema

(2.1) Teorema. Sean $T \in C(X,Y)$, $K \in Se(X,Y)$. Entonces

(i) Si $T \in SF_{S\pm}(X,Y)$ es $T + K \in \overline{SF}_{S\pm}(X,Y)$. En particular

$$T \in F_S(X,Y) \text{ implica } T + K \in \bar{F}_S(X,Y).$$

Demostración. Es suficiente probarlo para operadores lineales acotados.

Así, supongamos $T \in SF_{S+}(X,Y) \cap L(X,Y)$, $K \in Se(X,Y)$,

$M := \overline{N(T) + N(T+K)}$, $T_M := T|_M$, $K_M := K|_M$. Como $M/N(T_M + K_M) \in S$, $R(T_M) \subset R(K_M) + R(T_M + K_M)$ es $R(T_M)$ separable. Además $N(T_M) \in S$, T_M es normalmente soluble puesto que $N(T) + M$ es cerrado, por tanto, $N(T_M)$, $M/N(T_M) \in S$, luego $M \in S$ de donde se sigue $N(T + K) \in S$. Si $T \in SF_{S-}(X,Y) \cap L(X,Y)$, $K \in Se(X,Y)$, $N := \overline{R(K) + R(T+K)}$ entonces

$$(Y/R(T)) \big/ (N/R(T)) \simeq Y/N, \quad (Y/\overline{R(T+K)}) \big/ (N/\overline{R(T+K)}) \simeq Y/N$$

luego $Y/\overline{R(T+K)} \in S$

Al estudiar el comportamiento del operador composición de dos operadores cerrados A-Fredholm se encuentran dificultades para que sea un operador cerrado; en el próximo teorema damos condiciones suficientes para asegurarlo.

(2.2) Teorema. Sean $S \in NS(X,Y)$, $T \in NS(Y,Z)$ tales que $R(TS)$ es cerrado. Entonces $TS \in NS(X,Z)$ si y sólo si $N(TS)$ es cerrado.

Demostración. Evidentemente, $N(TS)$ es cerrado si $TS \in C(X,Z)$. Supongamos ahora que $N(TS)$ es cerrado, y sea $(x_n) \subset D(TS)$ tal que $x_n \longrightarrow x$, $Tx_n \longrightarrow z \in Z$. Como $R(TS)$ es cerrado, existe $x' \in D(TS)$ tal que $TSx_n \rightarrow TSx' \in Z$. Consideremos el operador $T_S: y \in D(T_S) := D(T) \cap R(S) \longrightarrow T_S y := Ty \in Z$ que es cerrado por ser T cerrado, y su rango $R(T_S) = R(TS)$ es cerrado.

Sea el operador $\hat{T}_S$ definido por :

$$\hat{T}_S: \widehat{Sx} \in D(\hat{T}_S) := \{Sx + N(T_S) : x \in D(T_S)\} \subset R(S)/N(T_S) \longrightarrow \hat{T}_S \widehat{Sx} := TSx \in Z$$

Sabemos que $\hat{T}_S$ es cerrado, inyectivo y con rango cerrado, luego $\hat{T}_S^{-1}$ es acotado, de donde se sigue que $TS\, x_n = \hat{T}_S \widehat{Sx_n} \longrightarrow TSx' = \hat{T}_S \widehat{Sx'}$, y así $\widehat{Sx_n} \longrightarrow \widehat{Sx'}$ si y sólo si

$\inf \{||Sx_n - Sx' + Su|| : Su \in N(T_S)\} \longrightarrow 0$; por tanto existe una sucesión $(Su_n) \subset N(T_S)$ tal que $Sx_n - Sx' + Su_n \longrightarrow 0$ si y sólo si $S(x_n + u_n) \rightarrow Sx'$, donde x', x_n, $u_n \in D(TS)$, $n \in \mathbb{N}$, $TSu_n \longrightarrow 0$.

El operador $\hat{S}: \hat{x} \in D(\hat{S}) := \{x + N(S) : x \in D(S)\} \subset X/N(S) \longrightarrow \hat{S}\hat{x} := Sx \in R(S)$ es cerrado, inyectivo y con rango cerrado, luego $\hat{S}^{-1}$ acotado. Así,

$\hat{S}(\widehat{x_n + u_n}) \longrightarrow \hat{S}\,\widehat{x'}$, y por tanto $\widehat{x_n + u_n} \longrightarrow \widehat{x'}$, luego existe una sucesión $(v_n) \subset N(S)$ tal que $x_n + u_n + v_n \longrightarrow x'$, de donde se sigue $u_n + v_n \in D(TS) \longrightarrow x' - x \in N(TS)$; además $x' \in D(TS)$. Por tanto $x \in D(TS)$ y $TSx = TSx'$, así $TS \in C(X,Z)$.

(2.3) Teorema. <u>Sea A un ideal tres espacios y biyectivo, $S \in NS(X,Y)$, $T \in NS(Y,Z)$, $R(S) \subset D(T)$, $R(TS)$ y $N(TS)$ cerrados. Entonces</u>:

(i) <u>Si $S \in SF_{A+}$, $T \in SF_{A+}$ entonces $TS \in SF_{A+}$</u>

(ii) <u>Supongamos A completamente simétrico, $\overline{D(S)} = X$, $\overline{D(T)} = Y$, $(TS)' = S'T'$, $R(T') \subset D(S')$. Si $S \in SF_{A-}$, $T \in SF_{A-}$ entonces $TS \in SF_{A-}$ con dominio denso. En particular, $S \in F_A$, $T \in F_A$ implica $TS \in F_A$ con dominio denso.</u>

<u>Demostración</u>. Por el teorema (2.2) $TS \in NS$. (i) Consideramos los siguientes operadores: $i: Sx \in R(S) \cap D(T) \subset Y \longrightarrow Sx \in R(S) \cap D(T) \subset D_T$, A_o la inclusión de $N(S_D)$ en $N(T_D\, iS_D)$, B_o la restricción de iS_D a $N(T_D\, iS_D)$.

Es simple probar que $i \in L \cap NS$, $A_o \in L \cap NS$, $B_o \in L \cap NS$, y $0 \longrightarrow N(S_D) \xrightarrow{A_o} N(T_D iS_D) \xrightarrow{B_o} N(T_D)$ es una sucesión exacta. Como A es tres espacios y biyectivo es exacto, por tanto $N(T_D iS_D) \in A$ luego $N(TS) \in A$.

ii) $(TS)' \in NS$ puesto que $TS \in NS$, así aplicando (i) a los operadores S' , T' se sigue que $(TS)' \in SF_{A+}$ luego $TS \in SF_{A-}$

3. <u>OPERADORES MODULO INVERTIBLE Op (A)</u>

Sean $X, Y \in B$, $T \in C(X,Y)$. Un operador $U \in L(X,Y)$ se dice regularizador a izquierda (derecha) de T si $I_X - UT \in Op(A)(X)$ ($R(U) \subset D(T)$, $I_Y - TU \in Op(A)(Y)$). Escribimos

$I_{Ai}(X,Y) := \{T \in C(X,Y)$: T posee regularizador a izquierda$\}$

$I_{Ad}(X,Y) := \{T \in C(X,Y)$: T posee regularizador a derecha$\}$

$I_A(X,Y) := I_{Ai}(X,Y) \cap I_{Ad}(X,Y)$.

Con identico razonamiento al seguido en [1; th. (3.1)] se prueba el mismo resultado para el caso de operadores lineales cerrados, Observaciones.

(1) Sea A completamente simétrico. Referente a las propiedades de dualidad de las clases I_{Ai}, I_{Ad}, I_A observamos que si para $T \in C(X,Y)$, $S \in C(Y;X)$ densamente definidos es $T'S' = (ST)'$, esta igualdad asegura que: "Si S es regularizador a izquierda (derecha) de T entonces S' es regularizador a derecha (izquierda) de T'". Puesto que $(ST)' = T'S'$ si y sólo si S es acotado en Y [2; th 4], y por tanto si S es regularizador a izquierda de T entonces S' es regularizador a derecha de T' ya que, es obvio que si ST es acotado entonces $R(S') \subset D(T')$.

(2) Relativo a las propiedades de la composición, se tienen los siguientes resultados:

(i) $S \in C(X,Y)$, $T \in C(Y,Z)$, $TS \in I_{Ai}(X,Z)$ (resp. $TS \in I_{Ad}(X,Z)$) entonces, en general, $S \notin I_{Ai}(X,Y)$ (resp. $T \notin I_{Ad}(Y,Z)$).

(ii) $S \in I_{Ai}(X,Y)$, $T \in I_{Ai}(Y,Z)$ (resp. $S \in I_{Ad}(X,Y)$, $T \in I_{Ad}(Y,Z)$) entonces, en general, $TS \notin I_{Ai}(X,Z)$ (resp. $TS \notin I_{Ad}(X,Z)$).

(iii) $S \in C(X,Y)$, $T \in L(Y,Z)$, $TS \in I_{Ai}(X,Z)$ implica $S \in I_{Ai}(X,Y)$.

(iv) $S \in L(X,Y)$, $T \in C(Y,Z)$, $TS \in I_{Ad}(X,Z)$ implica $T \in I_{Ad}(X,Z)$.

(v) $S \in I_{Ai}(X,Y) \cap L(X,Y)$, $T \in I_{Ai}(Y,Z)$ implica $TS \in I_{Ai}(X,Z)$

(vi) $S \in I_{Ad}(X,Y)$, $T \in I_{Ad}(Y,Z) \cap L(Y,Z)$ implica $TS \in I_{Ad}(X,Z)$

REFERENCIAS

[1] T. ALVAREZ and V. ONIEVA. Generalized Fredholm operators. Arkiv der Mathematik. Vol. 44, (1985).

[2] J.A.W. van CASTEREN and S. GOLDBERG. The conjugate of the produc of operators. Studia Math. T. XXX VIII (1970).

[3] S.GOLDBERG. Unbounded linear operators. McGraw-Hill, (1966).

[4] T. KATO. Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, (1976).

[5] V. M. ONIEVA. Notes on Banach spaces ideals. Math. Nachr. (to appear).

[6] A. PIETSCH. Operator ideals. North-Holland, Amsterdam and New York, (1980).

[7] M. SCHECHTER. Principles of Functional Analysis. Academic Press, (1971).

Rebut el 30 d'octubre del 1985

Teresa Alvarez
Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias
Universidad de Santander
Santander, ESPAÑA.