Pub. Mat. UAB
Vol. 30 nº 2-3 Des. 1986

CONEXION POR CAMINOS Y DIMENSION

Joan Tarrés i Freixenet

INTRODUCCION

En [3] y [4] se definen, respectivamente, las dimensiones $t(X)$ y $K(X)$. La primera viene determinada por las componentes conexas del espacio X, mientras que la segunda está dada en función de sus cuasicomponentes. Asimismo, en [5] se establece la función de dimensión $M(X)$, definida por las componentes M-conexas del espacio dado (ver [5]).

El propósito de este trabajo es definir una nueva dimensión que tenga en cuenta la conexión por caminos del espacio, con propiedades semejantes a las de las dimensiones ya citadas. Designaremos esta nueva dimensión como $\mu(X)$.

El estudio de este nuevo invariante topológico se hace en el §1: Además de la definición, se dan algunas de sus propiedades esenciales, como el teorema de la invariancia por homeomorfismos, el teorema del subespacio y el del producto cartesiano. Los espacios cuya μ-dimensión es igual a cero quedan caracterizados por ser no vacíos y tener las componentes conexas por caminos formadas por conjuntos de un solo punto. Se obtiene también una caracterización de la μ-dimensión en función de las componentes conexas por caminos para espacios tales que todo elemento del mismo posee un entorno conexo por caminos.

En el §2 queda definida la dimensión $M'(X)$, completamente análoga a la función $M(X)$ de [5], con la diferencia de que los M-separadores utilizados en este caso deben ser conjuntos cerrados.

El §3 está dedicado al estudio de las relaciones existentes entre las distintas dimensiones ya enunciadas, así como con las dimensiones inductivas clásicas $ind(X)$ e $Ind(X)$, y la dimensión por recubrimientos $dim(X)$. La coincidencia de todas ellas se da en espacios metrizables, localmente compactos y localmente conexos por caminos. Esta propiedad permite enunciar el teorema fundamental de la dimensión para $\mu(X)$ y $M^*(X)$, según el cual, la dimensión del espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ es igual a n, para todo número entero $n \geq 1$. En este §3 obtenemos también una versión del teorema de la suma para las dimensiones $\mu(X)$ y $M^*(X)$.

§1. LA DIMENSION $\mu(X)$

Dados un espacio topológico X y dos elementos distintos x e y del mismo, diremos que un subconjunto cerrado L de X es un *c-separador* de X entre x e y si $X \setminus L$ no es conexo por caminos y los puntos x e y pertenecen a componentes conexas por caminos de $X \setminus L$ distintas.

1.1 DEFINICION. *Si X es un espacio topológico, definimos la μ-dimensión de X como un número entero $\mu(X) \geq -1$ tal que:*

a) $\mu(X)=-1$ si y sólo si $X=\emptyset$.

b) Si $|X|=1$, $\mu(X)=0$.

c) Para espacios X tales que $|X| \geq 2$ y números enteros $n \geq 0$, es $\mu(X) \leq n$ si y sólo si para todo par de elementos distintos x e y de X existe un c-separador L de X entre ellos tal que $\mu(L) \leq n-1$.

d) Si $\mu(X) \leq n$ y no es cierto que $\mu(X) \leq n-1$, diremos que $\mu(X)=n$.

e) Si para todo $n \geq -1$ es $\mu(X) > n$, se dice que $\mu(X)=\infty$.

1.2 PROPOSICION. *Dado un espacio topológico X, $\mu(X)=0$ si y sólo si X es un conjunto no vacío y sus componentes conexas por caminos contienen un único elemento.*

Demostración.- Supongamos que $\mu(X)=0$. En virtud de 1.1, $X \neq \emptyset$ y además, si X contiene dos elementos distintos x e y, éstos pertenecen a componentes conexas por caminos de X distintas, pues el conjunto vacío es un c-separador de X entre ellos. Por lo tanto, cualquier componente conexa por caminos de X está formada por un solo elemento.

Recíprocamente, si X es un conjunto no vacío y sus componentes conexas por caminos son los puntos, el conjunto $\emptyset$ es un c-separador de X entre todo par de elementos distintos del mismo. Es decir, $\mu(X)=0$.#

1.3 TEOREMA. (Invariancia por homeomorfismos). *Si los espacios X e Y son homeomorfos, $\mu(X)=\mu(Y)$.*

Demostración.- Probaremos el teorema por inducción respecto a $\mu(X)$: Si $\mu(X)=0$, las componentes conexas por caminos de X son los conjuntos unitarios; si Y es homeomorfo a X, sus componentes conexas por caminos serán también los conjuntos de un solo punto, y así $\mu(Y)=0$.

Consideremos probado el teorema para espacios cuya μ-dimensión es menor que n $(n\geq 1)$. Sean X un espacio tal que $\mu(X)=n$ y $f\colon X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Si x' e y' son elementos distintos de Y, de manera que $x'=f(x)$, $y'=f(y)$, como $\mu(X)=n$, existe un c-separador L de X entre x e y tal que $\mu(L)\leq n-1$. El subconjunto $L'=f(L)$ es un c-separador de Y entre x' e y' tal que $\mu(L')\leq n-1$, por la hipótesis de inducción; luego, $\mu(Y)\leq n$.

Puesto que $\mu(X)=n$, existen pares de elementos distintos en X y un c-separador del espacio entre ellos cuya μ-dimensión es igual a $n-1$. La imagen por f de este c-separador de X es también un c-separador de Y entre las imágenes de los elementos considerados y cuya μ-dimensión es igual a $n-1$. En consecuencia, $\mu(Y)=n$.#

1.4 TEOREMA. (Teorema del subespacio). *Para todo subespacio A de un espacio topológico X es $\mu(A)\leq\mu(X)$.*

Demostración.- Aplicaremos inducción completa respecto a $\mu(X)$: Si $\mu(X)=0$, las componentes conexas por caminos de X son los puntos; si A está contenido en X es $A=\emptyset$, o bien sus componentes conexas por caminos son conjuntos unitarios. Luego, $\mu(A)=0$.

Si suponemos cierto el teorema para espacios con μ-dimensión menor que n $(n\geq 1)$, sea X un espacio tal que $\mu(X)=n$. Para $x\neq y$ en A, existe un c-separador L de X entre ellos con $\mu(L)\leq n-1$. El conjunto $L\cap A$ es un c-separador de A entre x e y, y como $L\cap A\subset L$, por la hipótesis de inducción es $\mu(L\cap A)\leq\mu(L)\leq n-1$. En consecuencia, $\mu(A)\leq n$.#

Como vemos, la μ-dimensión viene dada en relación con la conexión por caminos del espacio considerado. Esta relación queda puesta de manifiesto en la proposición siguiente, que expresa la μ-dimensión del espacio total en función de la de sus componentes conexas por caminos:

1.5 PROPOSICION. *Si X es un espacio topológico no vacío tal que todo elemento del mismo tiene un entorno conexo por caminos y $(C_i)_{i\in I}$ es la familia de las componentes conexas por caminos de X, se tiene:*

$$\mu(X)=\sup\{\mu(C_i)\mid i\in I\}$$

Demostración.- Por el teorema 1.4, para todo $i\in I$ es $\mu(C_i)\leq\mu(X)$, por lo que $\sup\{\mu(C_i)\mid i\in I\}\leq\mu(X)$.

Probemos ahora la desigualdad $\mu(X)\leq\sup\{\mu(C_i)\mid i\in I\}$: Llamaremos $k=\sup\{(C_i)\mid i\in I\}$; dados $x,y\in X$ distintos, si pertenecen a componentes conexas por caminos diferentes, el conjunto vacío es un c-separador del espacio entre dichos puntos; si x e y son elementos de la misma componente conexa por caminos C_i de X, como $\mu(C_i)\leq k$, existe un c-separador L_i de C_i entre ellos tal que $\mu(L_i)\leq k-1$. teniendo en cuenta que C_i es un conjunto cerrado en X, L_i es un c-separador de X entre x e y, por lo que $\mu(X)\leq k$.#

1.6 PROPOSICION. *Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, es $\mu(\prod_{i\in I}X_i)=0$ si y sólo si para cada $i\in I$ es $\mu(X_i)=0$.*

Esta última proposición es consecuencia de que las componentes conexas por caminos de $\prod_{i\in I}X_i$ son los conjuntos de un solo punto si y solo si lo son las componentes conexas por caminos de X_i, para cada $i\in I$.

1.7 TEOREMA. (Teorema del producto cartesiano). *Si X e Y son espacios topológicos no vacíos, $\mu(X\times Y)\leq\mu(X)+\mu(Y)$.*

Demostración.- Llamemos $m=\mu(X)+\mu(Y)$; probaremos el teorema por inducción respecto a m: Si $m=0$, es $\mu(X)=\mu(Y)=0$ y ahora, el teorema es consecuencia de 1.6.

Si el teorema es cierto para valores $m<k$ $(k\geq1)$, sean X e Y espacios tales que $\mu(X)+\mu(Y)=k$. Si (x,y) y (x',y') son elementos distintos de $X\times Y$, supongamos que es $x\neq x'$ (análogamente para $y\neq y'$). Existe enton-

ces un c-separador L de X entre x y x' con $\mu(L)\leq\mu(X)-1$. El conjunto LxY es un c-separador de XxY entre (x,y) y (x',y') de manera que:

$$\mu(L)+\mu(Y)\leq\mu(X)+\mu(Y)-1=k-1$$

Por la hipótesis de inducción, tenemos, $\mu(LxY)\leq\mu(L)+\mu(Y)\leq k-1$, por lo que $\mu(XxY)\leq k$.#

1.8 **COROLARIO.** *Para toda familia finita de espacios* $\{X_i / i=1,2,...,n\}$ *es*

$$\mu(X_1 x X_2 x ... x X_n)\leq\mu(X_1)+\mu(X_2)+...+\mu(X_n)$$

1.9 **PROPOSICION.** *Si* $f: X \longrightarrow Y$ *es una aplicación inyectiva y continua entre dos espacios topológicos y* $\mu(Y)=0$, *entonces* $\mu(X)=0$.

Demostración.- Si $\mu(Y)=0$, las componentes conexas por caminos de Y son los conjuntos de un solo punto. Como f es una aplicación inyectiva, las componentes conexas por caminos de X serán también conjuntos de un solo elemento. Es decir, $\mu(X)=0$.#

1.10 **PROPOSICION.** *Si* $f: X \longrightarrow Y$ *es una aplicación biyectiva y continua entre dos espacio topológicos,* $\mu(X)\leq\mu(Y)$.

Demostración.- Aplicaremos inducción respecto a $\mu(Y)$: Si $\mu(Y)=0$, en virtud de 1.9, $\mu(X)=0$ y la proposición es cierta en este caso.

Supongamos cierto el enunciado para espacios con μ-dimensión menor que n ($n\geq1$) y sea Y tal que $\mu(Y)=n$. Si $x\neq x'$ en X, también es $f(x)\neq f(x')$ en Y, por lo que existirá un c-separador L' de Y entre f(x) y f(x') con $\mu(L')\leq n-1$. Ahora, $L=f^{-1}(L')$ es un c-separador de X entre x y x', y por la hipótesis de inducción se verifica que $\mu(L)\leq\mu(L')\leq n-1$. Por lo tanto, $\mu(X)\leq n$.#

1.11 **COROLARIO.** *Si X es un conjunto no vacío y T y T' son topologías de X tales que* $T\subset T'$, *se cumple que* $\mu(X,T')\leq\mu(X,T)$.

La desigualdad del corolario 1.11 puede ser estricta, como puede comprobarse en el ejemplo siguiente:

1.12 **EJEMPLO.** En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales consideraremos la toplogía usual T_u y la topología T cuya base es la familia:

$$B=\{[a,b) \mid a,b\in\mathbb{R} \; ; \; a<b\}$$

Evidentemente, $T_\omega \subset T$ y además, $\mu(R,T)=0$ y $\mu(R,T_\omega)=1$ (ver 3.10).

§2. LA DIMENSION $M^*(X)$

En [5] se definen los espacios M-conexos como aquellos en los que para todo par de elementos del mismo existe un continuo K del espacio que contiene dichos puntos. Asimismo, se definen las componentes M-conexas de un espacio como sus conjuntos M-conexos maximales.

Si X es un espacio topológico y x e y dos elementos distintos de dicho espacio, diremos que un subconjunto L de X es un *M-separador* de X entre x e y si L es cerrado en X, X\L no es M-conexo y los elementos x e y pertenecen a componentes M-conexas de X\L distintas.

De manera análoga a [5] definimos la dimensión $M^*(X)$ como:

2.1 **DEFINICION.** *Si X es un espacio topológico, $M^*(X)$ es un número entero mayor o igual que -1 que verifica:*

a) $M^*(X)=-1$ si y sólo si $X=\emptyset$.

b) Si $|X|=1$, $M^*(X)=0$.

c) Para espacios X tales que $|X|\geq 2$ y números enteros $n\geq 0$, $M^*(X)\leq n$ si y sólo si para todo par de elementos distintos $x,y\in X$ existe un M-separador L de X entre ellos tal que $M^*(L)\leq n-1$.

Igual que en 1.1 se define $M^*(X)=n$ y $M^*(X)=\infty$.

Igual que para la dimensión $\mu(X)$, se obtienen con facilidad los resultados siguientes:

2.2 **PROPOSICION.** *Si X es un espacio topológico, $M^*(X)=0$ si y sólo si las componentes M-conexas de X son los puntos.*

2.3 **TEOREMA.** (Invariancia por homeomorfismos). *Si los espacios X e Y son homeomorfos, $M^*(X)=M^*(Y)$.*

2.4 **TEOREMA.** (Teorema del subespacio). *Para todo subespacio A de un espacio topológico X es $M^*(A)\leq M^*(X)$.*

2.5 PROPOSICION. *Si X es un espacio no vacío tal que todo elemento del mismo tiene un entorno M-conexo y $(C_i)_{i\in I}$ son las componentes M-conexas de X, se tiene:*

$$M^*(X) = \sup\{ M^*(C_i) \mid i\in I \}$$

Puesto que todo M-separador de X es un c-separador de este espacio, podemos asegurar:

2.6 PROPOSICION. *Para todo espacio X se verifica que $\mu(X)\leq M^*(X)$.*

La desigualdad de 2.6 puede ser estricta:

2.7 EJEMPLO. Si X es un conjunto infinito numerable con la topología T de los complementarios de los conjuntos finitos, (X,T) es un espacio conexo y compacto, por lo que $M^*(X)>0$, mientras que las componentes conexas por caminos de (X,T) son los puntos, y así, $\mu(X)=0$.

§3. LAS DIMENSIONES $\mu(X)$ Y $M^*(X)$ Y OTRAS FUNCIONES DE DIMENSION

En [3] y [4] se definen, respectivamente, las dimensiones $t(X)$ y $K(X)$. La primera de ellas viene definida en función de separadores de conjuntos, mientras que la segunda lo está en función de separadores entre pares de puntos distintos. De acuerdo con [4], para todo espacio X es $t(X)\leq K(X)$.

Si X es un espacio T_3, todo separador de X contiene un separador cerrado, y teniendo en cuenta que si L es un separador del espacio X también es un M-separador del mismo, podemos afirmar:

3.1 PROPOSICION. *Si X es un espacio T_3:*

$$\mu(X)\leq M^*(X)\leq t(X)\leq K(X)\leq \operatorname{ind}(X)$$

3.2 COROLARIO. *Para todo espacio T_4:*

$$\mu(X)\leq M^*(X)\leq t(X)\leq K(X)\leq \operatorname{ind}(X)\leq \operatorname{Ind}(X)$$

En virtud de [1], 1.4.5, tenemos:

3.3 **PROPOSICION**. *Si X es un espacio localmente compacto, son equivalentes:*

$$ind(X)=0 \quad ; \quad K(X)=0 \quad ; \quad t(X)=0 \quad ; \quad H^*(X)=0$$

3.4 **COROLARIO**. *Si X es localmente compacto y T_2 y todo elemento de X tiene un entorno conexo por caminos, son equivalentes:*

$$ind(X)=0 \quad ; \quad K(X)=0 \quad ; \quad t(X)=0 \quad ; \quad H^*(X)=0 \quad ; \quad \mu(X)=0$$

3.5 **LEMA**. *Si X es un espacio localmente conexo por caminos, todo c-separador de X es un separador de dicho espacio.*

Demostración.- Si L es un c-separador de X, como $X \setminus L$ es un conjunto abierto, también es localmente conexo por caminos. Luego, las componentes conexas de $X \setminus L$ coinciden con sus componentes conexas por caminos. Así, L es un separador del espacio X.#

Como consecuencia del lema 3.5, podemos enunciar la siguiente:

3.6 **PROPOSICION**. *Para todo espacio topológico X, localmente conexo por caminos, $K(X) \leq \mu(X)$.*

3.7 **COROLARIO**. *Si X es un espacio T_3 localmente conexo por caminos:*

$$\mu(X)=H^*(X)=t(X)=K(X).$$

Teniendo en cuenta 2.6 y 2.7 de [3] y 3.6 y 3.7 de este trabajo, se obtiene:

3.8 **PROPOSICION**. *Si X es un espacio compacto, T_2 y localmente conexo por caminos:*

$$dim(X)=\mu(X)=H^*(X)=t(X)=K(X) \leq ind(X) \leq Ind(X)$$

3.9 **TEOREMA**. (Teorema de coincidencia). *Si X es un espacio metrizable, localmente compacto y localmente conexo por caminos:*

$$dim(X)=\mu(X)=H^*(X)=t(X)=K(X)=ind(X)=Ind(X)$$

Puesto que el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ verifica todas las hipótesis de 3.9, podemos asegurar:

3.10 **TEOREMA**. (Teorema fundamental de la dimensión). *Para todo número entero* $n \geq 1$ *es:*

$$\mu(R^n)=M^*(R^n)=n$$

Asimismo, por la proposición 2.9 de [3]:

3.11 **PROPOSICION**. *Si* X *es un espacio localmente metrizable, localmente compacto,* T_2 *y localmente conexo por caminos:*

$$\mu(X)=M^*(X)=t(X)=K(X)=ind(X)$$

La proposición 3.11 nos permite enunciar una versión del teorema de la suma:

3.12 **TEOREMA**. (Teorema de la suma). *Sea* X *un espacio localmente compacto y* T_2 *tal que:*

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

donde F_i *es cerrado en* X *para* $i=1,2,\ldots$, *localmente conexo por caminos y localmente metrizable, con* $\mu(F_i)\leq n$ *(resp.* $M^*(F_i)\leq n$*). En estas condiciones,* $\mu(X)\leq n$ *(resp.* $M^*(X)\leq n$*).*

Demostración.- Por 3.11, $ind(F_i)\leq n$ $(i=1,2,\ldots)$ y ahora (ver [1]), $ind(X)\leq n$. Luego, por 3.1, $\mu(X)\leq M^*(X)\leq n$.#

REFERENCIAS

[1]. R. ENGELKING. *"Dimension Theory"*. North Holland Publ. Co. 1978.

[2]. A.R. PEARS. *"Dimension Theory of General Spaces"*. Cambridge Univ. Press. 1975.

[3]. G. STEINKE. *"A New Dimension by Means of Separating Sets"*. Arch. Math. 40(1983), 273-282.

[4]. J. TARRES. *"Separadores de Puntos y Dimensión"*. Pub. Mat. UAB 29 (1985), 21-30.

[5]. J. TARRES. *"Espacios M-conexos y M-dimensión"*. Aparecerá en "Contribuciones Matemáticas en Honor del Prof. D. Francisco Botella Raduán". Universidad Complutense. Madrid.

Rebut el 30 de gener de 1986

Universidad Complutense de Madrid
Fac. de Ciencias Matemáticas
Dpto. de Geometría y Topologia
28040 MADRID
ESPAÑA