GRUPOS LIBRES PROFINITOS Y GRAFOS TOPOLOGICOS

Luis Ribes

Introducción

Estas notas, constituyen una versión detallada de una serie de conferencias dadas en la Universidad Autónoma de Barcelona, en marzo de 1977.

La motivación principal de nuestro trabajo es, tratar de encontrar un método general, que permita describir la estructura de ciertos subgrupos cerrados de grupos profinitos libres. En el caso de grupos discretos, Serre y Bass [8], han inventado una teoría que permite describir los grupos discretos que operan sobre árboles (discretos). En particular, demuestran que un grupo discreto G es libre, si y sólo si G opera libremente sobre un árbol. Como consecuencia, obtienen, de manera inmediata, la estructura de los subgrupos de grupos (discretos) libres : son libres (Teorema de Schreier). La situación en el caso profinito es, por fuerza, más complicada. El ideal hubiera sido, poder afirmar que los subgrupos cerrados de grupos profinitos libres de una cierta clase, son libres de esa clase (por ejemplo, para la clase de los prorresolubles). Pero ésto es, evidentemente, falso, a no ser que estemos tratando de grupos pro-p) : basta fijarse en los p-subgrupos de Sylow del grupo dado. Surge, por tanto, el problema de determinar, qué subgrupos cerrados de un grupo libre profinito de una cierta clase, son también libres de esa clase. Pues bien, en las secciones 6-9, de estas notas, expongo una teoría de grupos profinitos que operan de manera continua sobre cierto tipo de grafos topológicos, que permite dar una respuesta a esta pregunta , en un buen número de casos. Esta teoría es el resultado de una colaboración con Dion Gildemhuys [3].

En las secciones 1-5, he introducido, por una parte, las definiciones y resultados, sobre grupos profinitos, que son necesarios posteriormente; y por otra, resultados que sirven de motivación para el estudio de estas cuestiones.

Por último, quiero hacer patente aquí mi agradecimiento a la joven y entusiasta Sección de Matemáticas de La Universidad Autónoma de Barcelona por su acogida, y, en especial, a los Profesores Manuel Castellet y Pilar Báyer, por su exquisita amabilidad.

1. Límites proyectivos

Sea $(I,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado dirigido (es decir, impondremos que $i, j \in I \Rightarrow \exists\, k \in I$ con $k \geq i,j$). Sean G_i, $i \in I$, grupos topológicos indiciados por I, y supongamos que siempre que $i \geq j$, existe un homomorfismo continuo $\phi_{ij} : G_i \to G_j$, de manera que

$\phi_{jk}\,\phi_{ij} = \phi_{ik}$, cuando $i \geq j \geq k$. Decimos que los grupos G_i, junto con los homomorfismos ϕ_{ij}, forman un <u>sistema proyectivo</u>. Un grupo topológico G, junto con homomorfismos continuos $\phi_i : G \to G_i$, es un <u>límite proyectivo</u> de los grupos G_i, $i \in I$, si

1) $\phi_{ij}\,\phi_i = \phi_j$, cuando $i \geq j$;

2) Si H es otro grupo topológico, $\psi_i : H \to G_i$ ($i \in I$) son homomorfismos continuos con $\phi_{ij}\,\psi_i = \psi_j$ cuando $i \geq j$, entonces existe un único homomorfismo continuo $\psi : H \to G$ con $\psi\,\psi_i = \phi_i$ ($i \in I$).

Le sigue inmediatamente de esta definición, que si el límite proyectivo existe, ha de ser único en un sentido obvio. Veamos que siempre existe. Sea G el subgrupo del producto cartesiano $\prod_{i \in I} G_i$ que consiste en aquellos elementos (g_i) tales que $\phi_{ij}(g_i) = g_j$, siempre que $i \geq j$. Definamos $\phi_j : G \to G_j$ como la restricción a G de la proyección canónica $\prod G_i \to G_j$.

Dotamos a $\prod_{i \in I} G_i$ de la topología producto, y a G de la topología inducida. Entonces cada ϕ_i es un homomorfismo continuo, y es fácil comprobar que G, junto con los homomorfismos ϕ_i, es el límite proyectivo de los G_i. Utilizaremos la notación $G = \varprojlim G_i$, donde los homomorfismos que intervienen están sobrentendidos. Es importante notar que G es un subgrupo cerrado de $\prod_{i \in I} G_i$.

2. Grupos profinitos

Sea $\underline{C}$ una clase de grupos finitos que supondremos satisface las siguientes condiciones:

(i) si $A \in \underline{C}$, y B es un subgrupo de A, entonces $B \in \underline{C}$;

(ii) si B es un subgrupo normal de A, y $A \in \underline{C}$, entonces $A/B \in \underline{C}$.

Diremos que un grupo topológico G es un grupo pro-$\underline{C}$ si es límite proyectivo de grupos en $\underline{C}$, donde cada grupo $A \in \underline{C}$ se supone con la topología discreta.

2.1. Ejemplos

1) Si la clase $\underline{C}$ consiste en todos los grupos finitos, un grupo pro-$\underline{C}$, se denomina profinito.

2) Si $\underline{C}$ es la clase de los p-grupos finitos, donde p es un cierto número primo, un grupo pro-$\underline{C}$, se denomina pro-p.

3) Si $\underline{C}$ es la clase de todos los grupos finitos resolubles, un grupo pro-$\underline{C}$, se denomina pro-resoluble.

4) Sea G un grupo cualquiera, y sea $\underline{C}$ una clase de grupos finitos, que satisfaga las condiciones (i) y (ii). Entonces, la compleción pro-$\underline{C}$ de G es el grupo pro-C,

$$\varprojlim G/N,$$

donde N varía sobre los subgrupos normales de G tales que $G/N \in \underline{C}$.

2.2. Teorema

Un grupo pro-$\underline{C}$ es compacto, Hausdorff y totalmente discontinuo.(Totalmente discontinuo significa que la componente conexa de cada punto consiste solamente en ese punto).

Demostración:

Digamos que $G = \varprojlim G_i$, donde $G_i \in \underline{C}$. Como hemos visto, G es un subgrupo cerrado de $\prod_{i\in I} G_i$; pero este grupo es compacto, Hausdorff y totalmente discontinuo, puesto que cada G_i lo es. De donde se sigue que G también lo es.

2.3. Se puede refinar más el teorema 2.2 : si U es un sub grupo normal abierto de G, entonces $G/U \in \underline{C}$. Basta notar que el conjunto ker ϕ_i, $(i \in I)$, es una base fundamental de entornos abiertos de 1. Digamos que $U \supseteq \ker \phi_i$. Entonces G/U es un cociente de $G/\ker \phi_i$ que es un elemento de $\underline{C}$, y por tanto $G/U \in \underline{C}$.

2.4. Teorema

Recíprocamente, si G es un grupo topológico compacto, Hausdorff y totalmente discontinuo, de manera que $G/U \in \underline{C}$, para todo subgrupo normal y abierto U de G, entonces G es pro-$\underline{C}$.

Demostración:

Los subgrupos abiertos normales de tal grupo forman una base fundamental de entornos de G (cf. [6], p. 56). Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de todos esos subgrupos. Consideraremos a $\mathcal{U}$ como un conjunto parcialmente ordenado dirigido mediante la relación

$$U \geq V \quad \Leftrightarrow \quad U \subseteq V .$$

Con cada elemento $U \in \mathcal{U}$ asociamos el grupo $G/U \in \underline{C}$. Si $U \subseteq V$ consideremos la proyección canónica

$$\phi_{UV} : G/U \rightarrow G/V.$$

Podemos, pues, formar el límite proyectivo de los grupor G/U, $(U \in \mathcal{U})$.

Veamos que

$$G = \varprojlim G/U$$

Consideremos el homomorfismo continuo

$$\psi \;:\; G \;\to \varprojlim G/U$$

inducido por los homomorfismos naturales

$$\psi_u \;:\; G \;\to\; G/U.$$

Está claro que $\ker \psi = \bigcap U = 1$.

Puesto que cada ψ_u es sobre, veamos que ψ también lo es.

Puesto que G es compacto, $\psi(G)$ también lo es. Basta, pues, demostrar que $\psi(G)$ es denso en $\varprojlim G/U$.

Un abierto básico de $\varprojlim G/U$ tiene la forma

$$W = (\varprojlim G/U) \cap [\,(\prod_{U \neq U_1,\ldots,U_r} G/U) \times a_1 U_1 \times a_2 U_2 \times \ldots \times a_r U_r\,]$$

donde $a_i \in G$. Sea $V = \bigcap_{i=1}^{r} U_i$.

Supongamos que $W \neq \phi$, y sea $(a_u\ U) \in W$. Entonces

$$\phi_{v\,u_i}(a_v\ V) = a_i\ U, \quad (i = 1,\ldots,r).$$

(Hemos identificado a_i con a_{u_i}). Entonces

$$\psi(a_v) \in W.$$

3. Grupos de Galois

3.1. Sea $K|k$ una extensión de cuerpos algebraica, normal y separable (es decir una extensión galoisiana), y sea $G = G(K|k)$ su grupo de Galois, es decir el grupo de los automorfismos de K que dejan fijos los elementos de k. Si la extensión $K|k$ es finita, sabemos que existe una correspondencia biunívoca entre los cuerpos intermedios de la extensión y los subgrupos de G. Esta correspondencia está dada por el siguiente par de funciones inversas : ϕ y ψ definidas así: a un subgrupo H de G le asociamos el cuerpo intermedio,

$$L = \psi(H) = \{ x \in K \mid \sigma(x) = x, \forall \sigma \in H \};$$

y a un subgrupo intermedio L le hacemos corresponder el subgrupo de G

$$H = \phi(L) = \{ \sigma \in G \mid \sigma(l) = l, \forall l \in L \}.$$

(Véase, e.g., [9], p. 80).

Si ahora suponemos que la extensión $K|k$ es infinita, es fácil encontrar ejemplos que muestran que tal correspondencia no existe, en esta forma tan general. De hecho puede muy bien ocurrir que la función ψ que acabamos de definir, asigne el mismo cuerpo a dos subgrupos distintos de G. Puede verse un ejemplo de esta situación en [7], p. 3).

Si bien la función ψ no es inyectiva, la función ϕ sí que lo es, como se deduce del siguiente resultado que es inmediato:

$\psi\varphi(L) = L$, para todo cuerpo intermedio L. Podemos, por tanto, decir que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los cuerpos intermedios L de la extensión $K|k$, y los subgrupos de G de la forma $\phi(L)$. Esta afirmación, obvia, no tendría mucho interés a no ser que pudieramos caracterizar los subgrupos $\phi(L)$ de G de alguna manera más natural. Pues bien, demostraremos más adelante, que los subgrupos $\phi(L)$ son precisamente los subgrupos cerrados de G, cuando a G se le considera como un grupo topológico con la topología que definiremos a continuación.

3.2. Consideremos la colección $\{K_i \mid i \in I\}$ de todos los subcuerpos de K que son extensiones galoisianas finitas de k. Tenemos entonces que

$$K = \bigcup_{i \in I} K_i ,$$

y es inmediato que :

(i) cada uno de los grupos de Galois $G(K|K_i)$ es normal en G, y

(ii) $$\bigcap_{i \in I} G(K|K_i) = 1.$$

Por tanto (cf. [1], p. 222). los subgrupos $G(K|K_i)$, determinan un sistema fundamental de entornos, que hacen de G un grupo topológico. Esta topología que acabamos de definir, se denomina la <u>topología de Krull</u> del grupo de Galois G.

3.3. Teorema

El grupo de Galois G, con la topología de Krull, es compacto, Hausdorff y totalmente discontinuo, es decir, profinito.

Demostración:

Está claro que $G(K|K_i) \lhd G$

y

$$G / G(K|K_i) \simeq G(K_i|k)$$

donde este isomorfismo está dado por restricción: $\sigma \to \sigma|_{K_i}$.

Pongamos $G(K_i|k) = G_i$.

Consideremos el homomorfismo

$$G \xrightarrow[\psi]{} \lim_{\leftarrow} G_i \longrightarrow \prod_i G_i$$

inducido por las proyecciones canónicas $\psi_i : G \to G_i$.

Bastará demostrar (cf. Teorema 2.2) que el homomorfismo ψ es un homeomorfismo.

Puesto que cada ψ_i es continuo, ψ también lo es.

Es inmediato que $\ker \psi = \bigcap_i G(K|K_i) = \{1\}$,

y por tanto ψ es 1-1. Por otra parte ψ es sobre, pues sea $(\sigma_i) \in \lim\limits_{\leftarrow} G_i$. Definamos $\sigma : K \to K$, de la siguiente forma $\sigma(x) = \sigma_i(x)$, si $x \in K_i$. Está claro que $\sigma \in G$, y $\psi(\sigma) = (\sigma_i)$.

Por último, ψ es abierto, pues

$$\psi(G(K|K_i)) = (\lim_{\leftarrow} G_j) \cap \left[\prod_j X_j\right]$$

donde $X_j = \{1\}$, si $K_j \subseteq K_i$, y

$X_j = G_j$, si $K_j \not\subseteq K_i$.

Este subconjunto es abierto en $\varprojlim G_j$, y por consiguiente ψ es abierto.

3.4. Lema

En un grupo profinito G, los subgrupos cerrados son precisamente las intersecciones de subgrupos abiertos.

Demostración:

Puesto que G es un compacto, los subgrupos abiertos de G son cerrados, y por consiguiente las intersecciones de subgrupos abiertos son subgrupos cerrados. Recíprocamente, supongamos que H sea un subgrupo cerrado de G. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de los subgrupos abiertos normales U de G. Veamos que

$$H = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} H\,U.$$

Sea $g \in G \setminus H$. Bastará demostrar que

$$g \notin H\,U$$

para algún $U \in \mathcal{U}$. Esto se sigue del hecho que H es compacto.

3.5. Corolario

Si $K|k$ es una extensión galoisiana de cuerpos, entonces un subgrupo H de $G(K|k)$ es cerrado en la topología de Krull, si y sólo si es de la forma

$$\bigcap_i G(K|K_i),$$

donde $K_i|k$ son subextensiones finitas de $K|k$.

Demostración:

Basta notar que toda subextensión finita $K_i|k$ de $K|k$, está contenida en una subextensión finita galoisiana, y por tanto los subgrupos abiertos de $G(K|k)$ coinciden con los subgrupos de la forma $G(K|K_i)$, donde $K_i|k$ es una subextensión finita de $K|k$.

Podemos ahora demostrar el teorema fundamental de la teoría de Galois para extensiones infinitas.

3.6. Teorema

Sea $K|k$ una extensión galoisiana de cuerpos, y sea $G = G(K|k)$ su grupo de Galois. Existe entonces una correspondencia biunívoca entre las subextensiones $L|k$ de $K|k$ y los subgrupos cerrados de G, dada por

$$\phi(L) = \{ \sigma \in G \mid \sigma(l) = l, \ \forall\, l \in L \} = G(K|L).$$

Además, si $L|k$ es una extensión normal, $\phi(L)$ es un subgrupo normal de G, y

$$G(L|k) \approx G / G(K|L).$$

Demostración:

Dado un subgrupo cerrado H de G, definamos el subcuerpo $\psi(H)$ de K, de la siguiente manera,

$$\psi(H) = \{ l \in K \mid \sigma(l) = l, \ \forall\, \sigma \in H \}.$$

Nótese, primeramente que

$$\phi(L) = G(K|L) = \bigcap_i G(K|K_i),$$

donde $K_i|k$ es finita, y $K_i \subseteq L$. Por tanto (cf. Cor. 3.5), $\phi(L)$ es cerrado en $G(K|k)$ (de hecho la topología inducida por G en $\phi(L)$ es precisamente la topología de Krull de $G(K|L)$).

Es fácil ver que $\psi\phi(L) = L$. Recíprocamente, comprobemos que $\phi\psi(H) = H$, para todo subgrupo cerrado H de G. Si $H = G(K|L)$, donde $L|k$ es una extensión finita, entonces está claro que

$$\phi\psi(H) = \phi\psi\phi(L) = \phi(L) = G(K|L) = H.$$

En general, sabemos que todo subgrupo cerrado H tiene la forma (Lema 3.5)

$$H = \bigcap_i G(K|K_i) ,$$

donde $K_i|k$ son ciertas subextensiones finitas de $K|k$. Ahora bien,

$$\phi\psi(H) = \phi\psi(\bigcap_i G(K|K_i)) = \phi\left[\bigcup \psi\, G(K|K_i)\right] =$$

$$= \bigcap_i \phi\psi\, G(K|K_i) = \bigcap_i G(K|K_i) = H.$$

Supongamos que $L|k$ sea una subextensión normal de $K|k$, y sean $\sigma \in G(K|L)$, $\tau \in G(K|k)$. Es evidente que $\tau^{-1}\sigma\tau \in G(K|L)$, y por tanto $G(K|L) \triangleleft G(K|k)$. Entonces definamos un homomorfismo

$$G(K|k) \ / \ G(K|L) \longrightarrow G(L|k)$$

por restricción, es decir

$$\sigma \in G(K|k) \longmapsto \sigma|_L \ .$$

Se comprueba con facilidad que este homomorfismo es un isomorfismo.

Finalmente, si $G(K|L) \triangleleft G(K|k)$ entonces para cada $\tau \in G(K|k)$, tenemos

$$G(K|L) = \tau^{-1} G(K|L)\tau = G(K|\tau^{-1} L).$$

Y por lo que acabamos de demostrar,

$$L = \tau^{-1} L.$$

De donde se deduce que $L|k$ es normal.

Podemos ahora establecer el recíproco del Teorema 3.3.

3.7 Teorema

Dado un grupo profinito G, existe una extensión galoisiana $K|k$ de cuerpos, tal que $G(K|k)$, con la topología de Krull, es topológicamente isomorfo a G.

Demostración:

Sea L un cuerpo cualquiera. Denotemos mediante T la unión disjunta

$$T = \bigcup G/U,$$

donde U recorre los subgrupos normales abiertos de G. Consideremos los elementos de T como indeterminadas, y pongamos

$$K = L\,(T),$$

donde L(T) denota el cuerpo de funciones racionales en las indeterminadas $\tau \in T$, con coeficientes en L. El grupo G opera de manera obvia sobre T, y por consiguiente sobre K como grupo de automorfismos. Sea k el subcuerpo de los elementos de K que permanecen fijos bajo esta acción.

Veamos primeramente que $K|k$ es una extensión galoisiana.

Si $f \in K$, pongamos

$$G_f = \{\sigma \in G \mid \sigma f = f\}.$$

Sean $\tau_i \in G/U_i$, $i = 1,2,\ldots, r$, las indeterminadas que aparecen en f. Claramente

$$G_f \supseteq \bigcap_{i=1}^{r} G_{t_i} \supseteq \bigcap_{i=1}^{r} U_i .$$

Puesto que

$$\bigcap_{i=1}^{r} U_i$$

es un subgrupo abierto de G, tenemos que G_f también es abierto, y portanto de índice finito (las clases de G módulo G_f forman un recubrimiento de abiertos de G, y puesto que G es compacto, este recubrimiento ha de ser finito).

De aquí deducimos que la órbita de f, bajo la acción de G, es finita. Digamos que

$$f = f_1, f_2, \ldots, f_n$$

son los distintos elementos de esa órbita. Consideremos el polinomio

$$P(X) = (X - f_1)(X - f_2) \ldots (X - f_n).$$

Bajo la acción de G, este polinomio se transforma en sí mismo. Por tanto sus coeficientes pertenecen a k. De aquí deducimos que $K|k$ es una extensión algebraica. Puesto que las raíces de P(X) son distintas, $K|k$ es separable. Los conjugados de f están entre los elementos $f_1, f_2, \ldots f_n$, y por tanto pertenecen a K, i. e., $K|k$ es una extensión normal. Es decir $K|k$ es galoisiana.

Por construcción G es un subgrupo de $G(K|k)$. Esta inclusión es una función continua. Pues, supongamos que

$$K_1 = k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$$

es una subextensión finita galoisiana de $K|k$. Entonces

$$G(K_1|k) \cap G \supseteq \bigcap_{i=1}^{s} G_{\alpha_i}.$$

Pero como acabamos de ver $\bigcap_{i=1}^{s} G_{\alpha_i}$ es abierto en G, y por lo tanto

$$G(K_1|k) \cap G$$

también lo es. Puesto que G tiene la topología inducida por $G(K|k)$, y puesto que G es compacto, tenemos que G es cerrado en $G(K|k)$. Por otra parte k es el cuerpo de elementos fijos tanto de G, como de $G(K|k)$. Tenemos pues, por el Teorema 3.6, que $G = G(K|k)$.

3.8. Ejemplos

1) Sea $\mathbb{F}_l$ el cuerpo con l elementos, donde l es un número primo, y sea $\bar{\mathbb{F}}_l$ su clausura algebraica. Para cada número natural n, existe una única extensión $\mathbb{F}_l(n)$ de $\mathbb{F}_l$ de grado n. Claramente,

$$G(\mathbb{F}_l(n)|\mathbb{F}_l) \simeq Z / n Z,$$

(el generador $1 + n Z$ se hace corresponder con el $\mathbb{F}_l$- automorfismo de $\mathbb{F}_l(n)$ dado por $\varphi(x) = x^l$).

Tenemos, pues, que

$$G(\bar{\mathbb{F}}_l|\mathbb{F}_l) \approx \varprojlim Z/ n Z = \hat{Z} .$$

2) Si l y p son números primos y $\bar{\mathbb{F}}_l^p$ la unión de todas las extensiones de $\mathbb{F}_l$ de grado p^n, entonces

$$G(\bar{\mathbb{F}}_l^p \mid \mathbb{F}_l) \approx \varprojlim Z/p^n Z = Z_p$$

Nótese que Z_p es el grupo aditivo del cuerpo de los números p-ádicos.

4. Grupos libres

4.1. Denotemos mediante $\underline{B}$ (respectivamente $\underline{BP}$) la categoría de los espacios de Boole (es decir, espacios topológicos compactos, Hausdorff y totalmente discontinuos), y funciones continuas (resp. la categoría de espacios topológicos de Boole punteados y funciones continuas que preservan los puntos distinguidos). Sea $\underline{C}$ una clase de grupos finitos que satisfaga las condiciones (i) y (ii) de § 2. Dado un espacio $X \in \underline{B}$, un grupo pro-$\underline{C}$ F y una función continua

$$\eta : X \longrightarrow F,$$

diremos que (F,η), o simplemente F, con función η sobrentendida, es un grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre X, si para cualquier función continua

$$\psi : X \longrightarrow G,$$

donde G es un grupo pro-$\underline{C}$, existe un homomorfismo continuo único

$$\bar{\psi} : F \longrightarrow G,$$

con $\bar{\psi}\eta = \psi$. Es evidente que si tal grupo libre existe, ha de ser único en el siguiente sentido: si (F',η') es otro, existe un único isomorfismo continuo $\phi : F \to F'$ con $\phi\eta = \eta'$. Utilizaremos las notaciones $(F_{\underline{C}}(X),\eta)$ o $F_{\underline{C}}(X)$ o $F(X)$ para referirnos al grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre X. Nótese que $F_{\underline{C}}$ es un funtor de la categoría de grupos pro-$\underline{C}$. De hecho, $F_{\underline{C}}$ es el funtor adjunto por la izquierda del funtor subyacente que asigna a cada grupo pro-$\underline{C}$ su subyacente espacio topológico.

Si consideramos a los grupos pro-$\underline{C}$, como espacios punteados, donde un punto distinguido es el elemento identidad, entonces definimos el funtor $\tilde{F}_{\underline{C}}$ (también denotado $\tilde{F}$) de $\underline{BP}$ a la categoría de grupos pro-$\underline{C}$, como el adjunto por la izquierda del funtor subyacente. Decimos que $\tilde{F}(X,*)$ (también denotado $\tilde{F}(X)$) es el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre el espacio punteado $(X,*)$ con punto distinguido $*$. Tenemos pues la siguiente propiedad universal esquematizada en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(X,*) \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\psi"'] & \tilde{F}(X,*) \arrow[d, dashed, "\exists !", "\bar{\psi}"'] \\
 & G
\end{tikzcd}$$

donde $\eta(*) = 1$, $\psi(*) = 1$, $\bar{\psi}\eta = \psi$.

4.2 Proposición

Las funciones canónicas

$$\eta : X \longrightarrow F(X), \quad \text{o} \quad \eta : X \longrightarrow \tilde{F}(X)$$

son monomorfismos.

Demostración:

Sean $x \neq y$ dos puntos de X. Sea G un grupo en $\underline{C}$

con $|G| > 1$. Entonces existe una función continua

$$\psi : X \to G$$

con $\psi(x) \neq \psi(y)$ (esto se sigue del hecho que la topología de todo espacio de Boole X admite una base de conjuntos abiertos y cerrados). Sea $\bar{\psi} : F(X) \to G$ (o $\bar{\psi} : \tilde{F}(X) \to G$) el correspondiente homomorfismo. Entonces de $\bar{\psi}\eta = \psi$ se sigue que $\psi(x) \neq \psi(y)$, es decir que ψ es 1-1.

4.3. Teorema

F(X) existe (respectivamente, $\tilde{F}(X)$ existe).

Demostración:

Sea D el grupo libre abstracto sobre el conjunto X(respect. $X \setminus \{*\}$, donde $*$ es el punto distinguido de X). Sea $\mathcal{N}$ el conjunto de los subgrupos normales N de D tales que

(i) $D/N \in \underline{C}$, y

(ii) $N \cap X$ es abierto en X (en el caso punteado, $*$ se identifica con $1 \in D$).

Pongamos

$$F(X) = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} D/N$$

(respect. $F(X) = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} D/N$)

Sea

$$\eta : X \longrightarrow F(X)$$

(respect. $\eta : X \longrightarrow \tilde{F}(X)$),

la función continua natural. Se comprueba, entonces, con facilidad que $(F(X), \eta)$ (respect. $(\tilde{F}(X), \eta)$), es un grupo libre pro-C sobre X (respect. sobre el espacio punteado X).

5. Estructura de los grupos libres

5.1. Sea X un espacio de Boole. Consideremos el conjunto $\underline{R}$ de todas las relaciones de equivalencia en X, de manera que X/R, con la topología cociente, sea un espacio finito discreto; esto equivale a decir, que cada clase de equivalencia xR (determinada por el punto $x \in X$) es un conjunto abierto y cerrado. El conjunto $\underline{R}$ no es vacío, puesto que los subconjuntos de X abiertos y cerrados forman una base para la topología de X.

Las funciones continuas canónicas

$$\phi_R : X \longrightarrow X/R$$

inducen una función continua

$$\phi : X \longrightarrow \varprojlim_{\underline{R}} X/R$$

(Nótese que $\underline{R}$ está ordenado así: $R \leq R'$ si y sólo si $xRx' \Rightarrow xR'x'$).

Puesto que cada ϕ_R es una función sobre, se tiene que $\phi(X)$ es denso en $\varprojlim X/R$ (ver el razonamiento en el teorema 2.4) y puesto que $\phi(X)$ es cerrado, ϕ es sobre. Por otra parte, ϕ es 1-1, pues dados $x \neq y$ en X, sea U un entorno abierto y cerrado de x que excluya a y. Consideremos la relación

R_U que tiene como clases de equivalencia U y X-U

Claramente

$$\phi_{R_U}(x) \neq \phi_{R_U}(y),$$

de donde $\phi(x) \neq \phi(y)$.

Hemos demostrado por tanto el siguiente resultado

5.2. Lema

Todo espacio de Boole es límite proyectivo de espacios finitos.

El siguiente teorema expresa los grupos libres sobre cualquier espacio, en términos de grupos libres sobre espacios finitos.

Cada una las funciones ϕ_R, induce un homomorfismo continuo que denotamos también por ϕ_R

$$\phi_R : F(X) \longrightarrow F(X/R)$$

Si $R \geq R'$, existe un epimorfismo inducido,

$$\phi_{RR'} \quad F(X/R) \longrightarrow F(X/R')$$

Obtenemos, por tanto, un homomorfismo continuo,

$$\phi : F(X) \quad \rightarrow \varprojlim F(X/R).$$

ϕ es claramente sobre. Para ver que ϕ es 1-1 bastará definir un homomorfismo continuo

$$\psi : \varprojlim F(X/R) \quad \rightarrow \quad F(X)$$

tal que $\psi\phi$ sea la identidad de $F(X)$. Dado un subgrupo abierto U de $F(X)$, definamos una relación R_U en X de la forma siguiente:

$$x \, R_U \, y \quad \Leftrightarrow \quad x^{-1} y \in U.$$

Está claro que $R_U \in \underline{R}$, y la inclusión,

$$X/R_U \hookrightarrow F(X)/U,$$

induce funciones continuas compatibles

$$\varprojlim F(X/R) \longrightarrow F(X/R_U) \longrightarrow F(X)/U,$$

y por tanto un homomorfismo

$$\phi : \varprojlim F(X/R) \longrightarrow \varprojlim F(X)/U = F(X).$$

Ahora bien, del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim F(X/R) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[d] & F(X) \arrow[l, shift left, "\psi"] \arrow[d, "\rho_U"] \\
F(X/R_U) \arrow[r] & F(X)/U
\end{tikzcd},$$

se deduce fácilmente que para cada U, $\rho_U \psi\phi = \rho_U$, y por tanto $\psi\phi = 1_{F(X)}$. Hemos, pues, demostrado el siguiente resultado.

5.3. Teorema

Todo grupo libre pro-$\underline{C}$ es el límite proyectivo de grupos libres pro-$\underline{C}$ sobre espacios finitos.

Esencialmente la misma demostración nos prueba

5.4. Teorema

Si $X = \varprojlim X_i$, entonces $F(X) = \varprojlim F(X_i)$.

6. Grafos de Boole

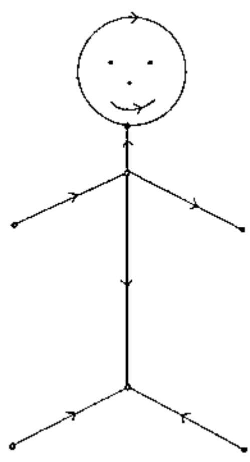
6.1. Un grafo de Boole Γ consiste en un par de funciones continuas,

$$A(\Gamma) \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} V(\Gamma) \quad ,$$

entre los espacios de Boole $A(\Gamma)$ y $V(\Gamma)$. El espacio $A(\Gamma)$ es el espacio de las aristas (orientadas) de Γ. Si $a \in A(\Gamma)$, $d_0(a)$ es el origen de a y $d_1(a)$ es el punto final de a

6.2. Ejemplos

1) Todo grafo finito (orientado) es un grafo de Boole. E.g., la siguiente figura representa un grafo de Boole finito:



2) Sea G un grupo profinito, y X un subconjunto cerrado de G. Definamos un grafo de Boole $\Gamma = \Gamma(G,X)$ asociado a G y X de la forma siguiente: $V(\Gamma) = G$ (como espacio topológico); $A(\Gamma) = G \times X$ (con la topología producto); si $(g,x) \in G \times X$, pongamos $d_0(g,x) = g$, y $d_1(g,x) = g\,x$. Es evidente que las funciones así definidas,

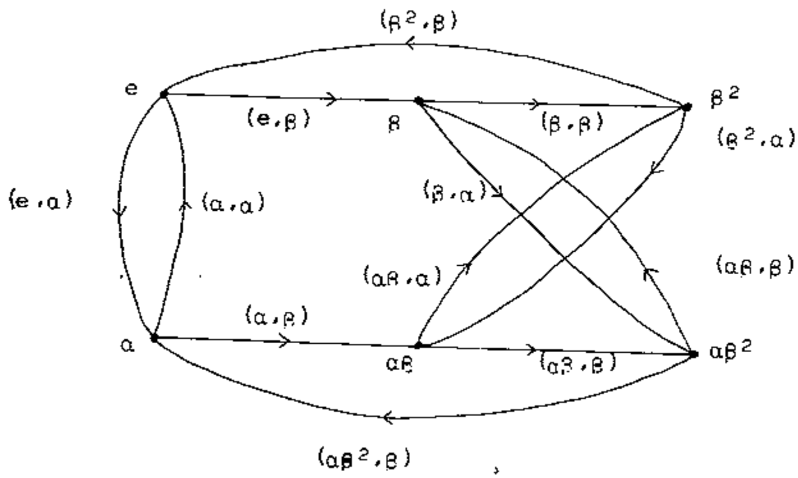
$$G \times X \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} G$$

son continuas. E.g., si G es el grupo simétrico

$$S_3 = \{\alpha = (1,2),\ \beta = (1\,2\,3),\ e = (1),\ \beta^2 = (1\,3\,2)$$

$$\alpha\beta = (2\,3),\ \alpha\beta^2 = (1\,3)\},$$

y $X = \{\alpha,\beta\}$, entonces $\Gamma(G,X)$ es el grafo



6.3. Si Γ y Γ' son dos grafos de Boole, un <u>morfismo</u>,

$$\phi : \Gamma \longrightarrow \Gamma',$$

es un par de funciones continuas

$$\phi_1 : V(\Gamma) \longrightarrow V(\Gamma')$$

y

$$\phi_2 : A(\Gamma) \longrightarrow A(\Gamma')$$

que satisfacen las condiciones de compatibilidad

$$d_0(\phi_2(a)) = \phi_1(d_0(a)),$$

$$d_1(\phi_2(a)) = \phi_1(d_1(a)), \quad \forall\ a \in A(\Gamma).$$

Con la definición natural de composición de morfismos, los grafos y sus morfismos forman una categoría.

Sea $(I,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, y sea $\{\Gamma_i, \phi_{ij}\}$, $(i,j\in I)$ un sistema proyectivo de grafos de Boole (véase el § 1 para la definición análoga de sistema proyectivo de grupos topológicos). Se tiene entonces un concepto natural de límite proyectivo $\Gamma = \varprojlim \Gamma_i$, que es evidentemente un grafo de Boole.

<u>6.4 Proposición</u>

Si Γ es un grafo de Boole, entonces Γ es el límite pro yectivo de grafos finitos.

Demostración:

Pongamos $A = A(\Gamma)$ y $V = V(\Gamma)$. Sea $\underline{R}$ el conjunto de relaciones de equivalencia en V, tales que cada clase de equivalencia xR, $(x \in V)$, es un conjunto abierto y cerrado de V. Sea $\underline{R}'$ el conjunto de las relaciones de equivalencia (abiertas y cerradas) de A tales que dado $R' \in \underline{R}'$, exista $R \in \underline{R}$, de manera que si E es una clase de equivalencia de R' entonces $d_0(E)$ y $d_1(E)$ están contenidos en alguna clase de equivalencia de R (no necesariamente la misma). Si R' y R están relacionados de esta manera, las funciones

$$A \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} V,$$

determinan un grafo finito,

$$\Gamma(R,R') : A/R \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} V/R'.$$

Siempre que $R \subseteq R_1$ y $R' \subseteq R_1'$ $(R, R_1 \in \underline{R},\ R', R_1' \in \underline{R}')$, existe un morfismo natural de grafos

$$\Gamma(R,R') \longrightarrow \Gamma(R_1, R_1').$$

Los grafos finitos $\Gamma(R,R')$, junto con estos morfismos forman un sistema proyectivo, y se comprueba con facilidad que

$$\Gamma = \varprojlim \Gamma(R,R').$$

6.5 <u>De ahora en adelante $\underline{C}$ denotará una clase de grupos finitos que satisface las siguientes condiciones</u>

1) Todo subgrupo de un grupo en $\underline{C}$, está en $\underline{C}$;

2) Todo cociente de un grupo en $\underline{C}$, está en $\underline{C}$;

3) Si H es un subgrupo normal de un grupo finito G, y H, G/H $\in \underline{C}$, entonces G $\in \underline{C}$.

6.6 Sea $Z_{\underline{C}}$ el grupo libre pro-$\underline{C}$ en un generador. obsérvese que

$$Z_{\underline{C}} = \prod_{Z/p\,Z \in \underline{C}} Z_p$$

Nótese que $Z_{\underline{C}}$ es, también, un anillo topológico.

Si G es un grupo profinito, denotaremos mediante $\mathcal{Al}(G)$ la $Z_{\underline{C}}$-álgebra,

$$\mathcal{Al}(G) = \varprojlim Z_{\underline{C}}[G/U],$$

donde U recorre los subgrupos abiertos normales de G (cf.[2] y [4]). Si X es un espacio de Boole, $\mathcal{A}(X)$ denotará el grupo libre abeliano pro-$\underline{C}$ sobre X (o de manera más precisa, si Ab($\underline{C}$) es la clase de los grupos de $\underline{C}$ que son abelianos, $\mathcal{A}(A)$ es el grupo libre pro- Ab($\underline{C}$) sobre X). Nótese que $\mathcal{Al}(G)$, considerado como grupo abeliano pro-$\underline{C}$, coincide con $\mathcal{A}(G)$ (donde G se considera, simplemente, como un espacio topológico).

6.7 Sea Γ un grafo de Boole. Definiremos el primer grupo de homología $H_1(\Gamma) = H_1(\Gamma, Z_{\underline{C}})$, de Γ, como el núcleo del homomorfismo,

$$\mathcal{A}(A(\Gamma)) \xrightarrow{d} \mathcal{A}(V(\Gamma)),$$

determinado por $d(a) = d_1(a) - d_0(a)$, $\forall \ a \in A(\Gamma)$.

Diremos que Γ es <u>C-acíclico</u> si $H_1(\Gamma) = 0$.

Si X es un conjunto, denotemos mediante L(X) el grupo abeliano (discreto) libre sobre X.

<u>6.8 Lema</u>

Sea Γ un grafo discreto, entonces Γ posee circuitos si y sólo si el homomorfismo,

$$\bar{d} \ : \ L(A(\Gamma)) \to L(V(\Gamma)),$$

definido por $d(a) = d_1(a) - d_0(a)$, $(a \in A(\Gamma))$, tiene un núcleo no trivial.

Demostración:

Si Γ tiene un circuito, evidentemente $\ker \bar{d} \neq 0$. Recíprocamente, supongamos que $\bar{d}(n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots + n_r a_r) =$
$= n_1 d_1(a_1) - n_1 d_0(a_1) + n_2 d_1(a_2) - n_2 d_0(a_2) + \ldots - n_r d_0(a_r) = 0.$

(estamos suponiendo $n_i \neq 0$, $\forall$ i, y ningún a_i es un lazo). En tonces, existe a_i $(i=2,\ldots n)$, digamos a_2, tal que uno de sus vértices coincide con $d_1(a_1)$, digamos $d_0(a_2) = d_1(a_1)$. Si $d_1(a_2) = d_0(a_1)$, hemos terminado; si no, existe a_j $(j=3,\ldots,r)$ uno de cuyos vértices coincide con $d_1(a_2)$, digamos $d_0(a_3) = d_1(a_2)$. Es evidente que este proceso tiene que terminar con un a_l, $l \leq r$ uno de cuyos vértices coincida con $d_0(a_1)$. Tenemos entonces que $a_1, a_2, \ldots a_l$ forman un circuito.

6.9 Proposición

1) El límite proyectivo de grafos de Boole $\underline{C}$-acíclicos es $\underline{C}$-acíclico.

2) Un grafo finito es $\underline{C}$-acíclico si y sólo si no tiene circuitos.

Demostración:

1) Sea $\Gamma = \lim \Gamma_i$. Por el Teorema 5.4,

$$\mathcal{A}(A(\Gamma)) \xrightarrow{d} \mathcal{A}(V(\Gamma_i))$$

es el límite proyectivo de

$$\mathcal{A}(A(\Gamma_i)) \xrightarrow{d} \mathcal{A}(V(\Gamma_i)).$$

Por otra parte $\varprojlim$ preserva monomorfismos.

2) Como hemos visto en el lema 6.8, un grafo finito Γ no tiene circuitos si y sólo si el homomorfismo

$$\overline{d} : L(A(\Gamma)) \longrightarrow L(V(\Gamma)),$$

es 1-1. Puesto que $L(A(\Gamma)$ y $L(V(\Gamma))$ son subgrupos de $\mathcal{A}(A(\Gamma))$ y $\mathcal{A}(V(\Gamma))$ respectivamente, y $\overline{d}$ es la restricción de d, tenemos que si Γ es $\underline{C}$-acíclico, entonces Γ no tiene circuitos.

Recíprocamente, supongamos que Γ no tiene circuitos. Entonces d es 1-1. Por otra parte d es el resultado de aplicar el funtor $\underline{C}$-compleción a $\overline{d}$. Nuestro resultado se sigue pues del siguiente lema.

6.10 Lema

El funtor $\underline{C}$-compleción (ver 2.1), preserva monomorfismos de grupos abelianos finitamente generados, $A \hookrightarrow B$.

Demostración:

Basta demostrar que si U es un subgrupo de A tal que $A/U \in \underline{C}$, existe un subgrupo V de B tal que $B/V \in \underline{C}$ y $V \cap A \subseteq U$.

Nótese primeramente que el funtor $\underline{C}$-compleción, de la categoría de grupos abelianos, a la categoría de grupos abelianos pro-$\underline{C}$, es aditivo, es decir preserva sumas directas finitas.

Sean $A \hookrightarrow B$ grupos abelianos finitamente generados. Por la observación anterior, podemos suponer que A y B son ambos finitos o ambos libres finitamente generados. En este último caso, elijamos una base de B de forma que

$$A = n_1 \ Z_1 \oplus \ldots \oplus n_t \ Z_t \ \rightarrow \ B = Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_t$$

donde $Z_i = Z$, $n_i \in Z$. Basta pues demostrar el resultado para el caso $A = n\,Z$, $B = Z$, que no ofrece problemas: sea $U = q\,n\,Z$ un subgrupo de $n\,Z$, tal que $n\,Z / U \in \underline{C}$; digamos que $n = n_1\, n_2$, donde los primos que dividen a n_1 dividen el orden de algún grupo de $\underline{C}$, y los primos que dividen a n_2 no dividen el orden de ningún grupo en $\underline{C}$; sea $(n\,Z : U) = m$; pongamos $V = n.m\,Z$; entonces $Z/V \in \underline{C}$ y

$V \cap n Z = U$. Si los grupos A y B son finitos, podemos descomponerlos en sumas directas de sus p-componentes. Por tanto podemos suponer que ambos grupos A y B son p-grupos finitos. Si p divide el orden de algún grupo en $\underline{C}$, entonces $A, B \in \underline{C}$, y por tanto coinciden con su compleción. Si p no divide al orden de ningún grupo en $\underline{C}$, entonces las compleciones de A y B son triviales.

6.11 Nótese que, por la proposición 6.9, el concepto de $\underline{C}$-aciclicidad es independiente de $\underline{C}$, en el caso de que el grafo considerado Γ sea bien un grafo finito o bien el límite proyectivo de grafos $\underline{C}$-acíclicos finitos. Veremos más adelante (Teorema 7.6) que en general, el concepto de aciclicidad depende de $\underline{C}$.

6.12 Dado un espacio de Boole X, el homomorfismo

$$\varepsilon : \mathcal{Q}(X) \longrightarrow Z_{\underline{C}} ,$$

determinado por $\varepsilon(x) = 1 \quad \forall\, x \in X$, se denomina homomorfismo de aumentación. Su núcleo, ker ε, se denota mediante I_X.

Describiremos primeramente generadores topológicos para el grupo I_X. Necesitamos antes algunas observaciones.

<u>6. 13 Lema</u>

En la categoría de grupos abelianos finitamente generados, el funtor $\underline{C}$-compleción es exacto.

Demostración:

Sea $$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0 ,$$

una sucesión exacta de grupos abelianos finitamente generados. Consideremos la correspondiente sucesión de grupos abelianos pro-C:

$$0 \longrightarrow \hat{A} \xrightarrow{\hat{\varphi}} \hat{B} \xrightarrow{\hat{\psi}} \hat{C} \longrightarrow 0$$

donde ^ denota la compleción pro-C. Ya hemos visto, en el lema 6.10, que $\hat{\varphi}$ es un monomorfismo. Basta pues ver que $\hat{\psi}$ es el conúcleo de $\hat{\varphi}$. Supongamos que $\hat{B} \xrightarrow{\rho} K$ sea el conúcleo de $\hat{\varphi}$, en la categoría de grupos abelianos pro-C. Puesto que $\hat{\psi}\hat{\varphi} = 0$, existe un homomorfismo continuo $\eta: K \longrightarrow \hat{C}$ tal que $\eta\hat{\psi} = \rho$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "r"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{A} \arrow[r, "\hat{\varphi}"] & \hat{B} \arrow[r, "\hat{\psi}"] \arrow[dr, "\rho"'] & \hat{C} \arrow[d, bend left, "\zeta"] & \\
 & & & K \arrow[u, "\eta"] \arrow[dr] & \\
 & & & & 0
\end{tikzcd}$$

Por otra parte, puesto que $\beta\varphi = 0$, existe $\delta: C \longrightarrow K$ con $\delta\psi = \rho\beta$. Sea $\zeta: \hat{C} \longrightarrow K$ el homomorfismo continuo inducido por δ. Es fácil comprobar que η y ζ son isomorfismos inversos.

6. 14 Proposición

Si X es un espacio de Boole, entonces I_X es el subgrupo cerrado de $\mathcal{Q}(X)$ generado por los elementos

$\{x - y \mid x, y \in X\}$.

De hecho, I_X es el grupo pro-($\underline{C}$-abeliano) libre sobre $\{x - x_0 \mid x \in X\}$, donde x_0 es un elemento fijo de X.

Demeostración:

Sea R una relación de equivalencia en X abierta y cerrada (es decir, las clases de equivalencia de R son abiertas y cerradas en X). Tenemos entonces un diagrama conmutativo con filas exactas,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}(X) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d] & Z_{\underline{C}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_{X/R} \arrow[r] & \mathcal{A}(X/R) \arrow[r, "\varepsilon"] & Z_{\underline{C}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por el Teorema 5.4, $\varprojlim \mathcal{A}(X/R) = \mathcal{A}(X)$. Por otra parte el funtor $\varprojlim$ es exacto (cf. [7], p. 35). Tenemos pues que $I_X = \varprojlim I_{X/R}$. Por tanto basta demostrar nuestro resultado cuando X es un espacio finito. Ahora bien, por el Lema 6.13, I_X es la $\underline{C}$-compleción de ker ε_1, donde $\varepsilon_1 : L(X) \to Z$, es el homomorfismo de grupos abelianos discretos dado por $\varepsilon_1(x) = 1$, $\forall\ x \in X$, y donde $L(X)$ es el grupo libre abeliano discreto sobre X. Pero es bien sabido (e inmediato), que ker ε_1 es el subgrupo de $L(X)$ generado por $\{x - y \mid x, y \in X\}$. Como I_X es la clausura de ker ε_1 en $\mathcal{A}(X)$, tenemos la primera parte de nuestro resultado.

Para demostrar la segunda parte, supongamos primero que X es finito y sea $x_0 \in X$ un elemento fijo. Está claro que ker ε_1 es un grupo abeliano libre (discreto) sobre

$\{x - x_0 \mid x \in X\}$. Ahora bien, por el Lema 6.13, la $\underline{C}$-compleción de ker ε_1 coincide con el subgrupo cerrado de $\mathcal{A}(X)$, generado por $\{x - x_0 \mid x \in X\}$. Pero la $\underline{C}$-compleción de ker ε_1 es el grupo pro-($\underline{C}$-abeliano) libre sobre $\{x - x_0 \mid x \in X\}$.
El resultado en el caso genral, es decir cuando X es un espacio de Boole cualquiera, se obtiene del caso finito tomando el límite proyectivo.

6.15 Diremos que un grafo de Boole Γ, es $\underline{C}$-conexo si la sucesión

$$\mathcal{A}(A(\Gamma)) \xrightarrow{d} \mathcal{A}(V(\Gamma)) \xrightarrow{\varepsilon} Z_{\underline{C}} \longrightarrow 0$$

es exacta, es decir

$$d(\mathcal{A}(A(\Gamma)) = I_{V(\Gamma)}.$$

6.16 Lema

Un grafo finito Γ es $\underline{C}$-conexo si y sólo si es conexo en el sentido ordinario, es decir, si dos cualesquiera de sus vértices se pueden unir por medio de un camino en Γ.

Demostración:

Supongamos que Γ es conexo en el sentido ordinario, y sean $v_1, v_2 \in V(\Gamma)$.

Sean $a_1, a_2, \dots, a_t$ las aristas consecutivas de un camino de v_1 a v_2. Entonces $v_2 - v_1 = (-1)^{\varepsilon_1} d(a_1) + (-1)^{\varepsilon_2} d(a_2) + \dots + (-1)^{\varepsilon_t} d(a_t)$, donde $\varepsilon_i = 0, 1$ según sea necesario. Esto demuestra que $d(\mathcal{A}(X)) = I_{V(\Gamma)}$. Recíprocamente, supongamos que Γ es $\underline{C}$-conexo. Entonces $d(\mathcal{A}(A(\Gamma)) = I_{V(\Gamma)}$. Dado un vértice fijo v_0 y un vértice cualquiera v, necesitamos demostrar que existe una sucesión finita de aristas $a_1, a_2, \ldots, a_t$ de manera que

$$v - v_0 = \sum_{i=1}^{t} (-1)^{\varepsilon_i} d(a_i),$$

donde $\varepsilon_i = 0,1$. Si tal sucesión de aristas no existiera para cierto v_1, entonces $I_{V(\Gamma)}$ estaría contenido en el subgrupo cerrado de $\mathcal{A}(V(\Gamma))$ generado por $\{v - v_0 \mid v \in V(\Gamma), v \neq v_1\}$. Pero este subgrupo no contiene a $v_1 - v_0$, puesto que el subgrupo cerrado de $\mathcal{A}(V(\Gamma))$, generado por

$$\{v - v_0 \mid v \in V(\Gamma)\},$$

es libre pro-($\underline{C}$-abeliano) sobre esa base (ver la Proposición 6.14).

6. 17 Proposición

Para un grafo de Boole Γ, el concepto de $\underline{C}$-conexión es independiente de la clase $\underline{C}$.

Demostración:

Por el Lema 6.16, el resultado es cierto para grafos finitos. Los epimorfismos de grafos de Boole preservan la $\underline{C}$-conexión. Todo grafo Γ es el límite proyectivo de grafos finitos (ver Prop. 6.4), que desde luego son imágenes epimórficas de Γ. Por otra parte, el límite proyectivo de grafos $\underline{C}$-conexos es C-conexo.

Teniendo en cuenta esta proposición, de ahora en adelante utilizaremos el término de grafo de Boole conexo, en vez de $\underline{C}$-conexo.

6.18 Proposición

Sea G un grupo profinito, y X un subconjunto cerrado de G. Entonces el grafo de Boole $\Gamma = \Gamma(G,X)$ es conexo si y sólo si X genera a G topológicamente.

Demostración:

Si G es un grupo finito, la proposición es inmediata. Si U es un grupo abierto normal de G, denotemos mediante X_U la imagen canónica de X en G/U. El conjunto X genera a G topológicamente si y sólo si para cada U, el conjunto X_U genera a G/U. Por último,

$$\Gamma(G,X) = \varprojlim \Gamma(G/U, X_U).$$

El resultado se sigue, por tanto, de

1) el límite proyectivo de grafos de Boole conexos es conexo, y

2) la imagen de un grafo de Boole conexo es conexa.

6.19 Se dice que un grafo de Boole Γ es un $\underline{C}$-árbol si es a la vez conexo y $\underline{C}$-acíclico. Es decir si la siguiente sucesión de grupos pro-($\underline{C}$-abelianos) es exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(A(\Gamma)) \xrightarrow{d} \mathcal{A}(V(\Gamma)) \xrightarrow{\varepsilon} Z_{\underline{C}} \longrightarrow 0.$$

7. Caracterización de los grupos libres pro-$\underline{C}$.

Sea H un grupo libre discreto y X un subconjunto de H. Entonces Bass y Serre [8], demuestran que H es libre sobre X si y sólo si el grafo $\Gamma(H,X)$ es un árbol (discreto). La situación en el caso profinito no es, desgraciadamente, tan simple. Sin embargo, si nos restringimos a ciertas clases

$\underline{C}$, veremos que obtenemos un resultado análogo.

Necesitamos primeramente una serie de conceptos. Si G es un grupo pro-$\underline{C}$, el grupo pro-($\underline{C}$-abeliano) $\mathcal{A}$(G) es, de hecho, una $Z_{\underline{C}}$-álgebra donde su estructura multiplicativa está determinada por las de $Z_{\underline{C}}$ y G. Cuando nos refiramos a este álgebra, utilizaremos la notación $\mathcal{Al}$(G). De manera específica

$$\mathcal{Al}(G) = \varprojlim_{U} Z_{\underline{C}}[G/U],$$

donde $Z_{\underline{C}}[G/U]$ denota la $Z_{\underline{C}}$-álgebra del grupo G/U. El álgebra $\mathcal{Al}$(G) posee una topología natural, y con respecto a ella es una $Z_{\underline{C}}$-álgebra pseudocompacta (cf. [2], para una definición precisa). Sea $\underline{PM}$ la categoría de los $\mathcal{Al}$(G)-módulos topológicos A, tales que A sea, al mismo tiempo, un grupo abeliano pro-$\underline{C}$ (está es precisamente la categoría de los $\mathcal{Al}$(G)-módulos pseudocompactos [2], y [4], p. 61).

<u>7.1 Lema</u>

Sea G un grupo pro-$\underline{C}$. Entonces

$$\mathrm{Der}\,(G, M) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{Al}(G)}(I_G, M)$$

para todo $M \in \underline{PM}$, donde Der(G,M) es el grupo abeliano de las derivaciones continuas

$$d : G \longrightarrow M$$

(es decir, $d(u,v) = u\, d(v) + d(u)$, para todo $u, v \in G$).

Demostración:

Veremos que existen homomorfismos inversos

$$\mathrm{Der}\,(G,M) \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Al}(G)}\,(I_G, M).$$

Por el lema 6.14, I_G es el grupo abeliano pro-$\underline{C}$ libre sobre $\{g - 1 \mid g \in G\}$. Si $d \in \mathrm{Der}\,(G,M)$, pongamos $\phi(d) = f$, donde $f(g - 1) = d(g)$. Se comprueba facílmente que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Al}(G)}(I_G,M)$. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Al}(G)}(I_G, M)$, pongamos $\psi(f) = d$, donde $d(g) = f(g - 1)$. Entonces $d \in \mathrm{Der}\,(G,M)$, y ϕ y Ψ son homomorfismos inversos.

7.2. Si A es un $\mathcal{Al}(G)$-módulo pseudocompacto, e Y un espacio de Boole, decimos que A es libre sobre Y (con respecto a una función canónica $\rho: Y \longrightarrow A$) si para cada $\mathcal{Al}(G)$-módulo pseudocompacto B y cada función continua $\phi: Y \to B$, existe un único homomorfismo de módulos $\overline{\phi}: A \longrightarrow B$, con $\overline{\Phi}\rho = \phi$.

Si A y B son dos grupos abelianos pro-$\underline{C}$, se define su <u>producto tensorial completo</u> $A \hat{\otimes}_{Z_{\underline{C}}} B = A \hat{\otimes} B$, como el grupo abeliano pro-$\underline{C}$ que satisface la propiedad universal siguiente: existe una función bilineal $A \times B \to A \hat{\otimes} B$, $(a,b) \longmapsto a \otimes b$, y si M es un grupo abeliano pro-$\underline{C}$, y $f : A \times B \to M$ es una función bilineal, existe un único homomorfismo continuo $\overline{f} : A \hat{\otimes} B \longrightarrow M$, tal que $\overline{f}\,(a \otimes b) = f(a,b)$. Es inmediato comprobar que $A \hat{\otimes} B$ existe y de hecho

$$A \hat{\otimes} B = \varprojlim_{U,V} (A/U \otimes B/V),$$

donde U, V varían sobre el conjunto de subgrupos de A y B respectivamente.

Nótese que si X e Y son espacios de Boole, entonces

$$\mathcal{A}(X \times Y) = \mathcal{A}(X) \hat{\otimes} \mathcal{A}(Y).$$

<u>7.3 Lema</u>

Sea X un espacio de Boole (respect. un espacio de Boole punteado) y F(X) el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre X (respect. $\tilde{F}(X)$ el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre el espacio punteado X). Entonces,

(i) $I_{F(X)}$ es el $\mathcal{Al}(G)$-módulo pseudocompacto libre sobre el espacio punteado $\{ x - 1 \mid x \in X \}$);

(ii) $I_{F(X)}$ es el grupo abeliano pro-$\underline{C}$ libre sobre el espacio $F(X) \times X$ con respecto a la función canónica $\eta: F(X) \times X \to I_{F(X)}$, dada por $\eta(f, x) = f_x - f$.

Demostración:

Expondremos la demostración solamente para el caso en que X es no punteado. El otro caso es similar.

Sea M un $\mathcal{Al}(F(X))$-módulo pseudocompacto, y sea $\rho: X \to M$ una función continua. Puesto que M es un grupo pro-$\underline{C}$, ρ induce un homomorfismo continuo,

$$\bar{\rho} : F(X) \longrightarrow M,$$

que a su vez induce un homomorfismo continuo,

$$\bar{\bar{\rho}} : F(X) \longrightarrow M \times_s F(X),$$

dado por $\bar{\bar{\rho}}(f) = (\bar{\rho}(f), f)$.

($M \times_s F(X)$ es el producto semidirecto, donde $F(X)$ opera sobre M a través de $\mathcal{A}\ell(F(X))$.) Ahora bien, la composición,

$$d : F(X) \xrightarrow{\bar{\bar{\rho}}} M \times_s F(X) \xrightarrow{\pi} M,$$

donde π es la proyección canónica, es una derivación continua como se comprueba fácilmente. Por el Lema 7.1, d determina un $\mathcal{A}\ell(F(X))$-homomorfismo continuo

$$\bar{d} : I_{F(X)} \longrightarrow M,$$

con

$$\bar{d}(x-1) = d(x) = \rho(x).$$

Es decir, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
I_{F(X)} \arrow[r, "\bar{d}"] & M \\
X \arrow[u, "\phi"] \arrow[ur, "\rho"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\phi(x) = x - 1$. Nótese que sólo hay un $\mathcal{A}\ell(F(X)$-homomorfismo continuo $\bar{d}$, que hace que este diagrama conmute, puesto que $I_{F(X)}$, como $\mathcal{A}\ell(G)$-módulo, está topológicamente generado por $\{x - 1 \mid x \in X\}$. Por tanto $I_{F(X)}$ es $\mathcal{A}\ell(G)$-libre sobre

$\{ x - 1 \mid x \in X\}$. Esto demuestra la parte (i).

La segunda parte se deduce ahora fácilmente:

$$\mathcal{A}(F(X) \times X) \overset{\alpha}{\underset{\approx}{\to}} \mathcal{A}(F(X)) \hat{\otimes} \mathcal{A}(X) \overset{\beta}{\underset{\approx}{\to}} I_{F(X)},$$

donde α es el isomorfismo continuo de grupos pro-$\underline{C}$, determinado por $\alpha(f, x) = f \otimes x$, $(f \in F(X), x \in X)$; y donde β es el isomorfismo de $\mathcal{Al}(F(X))$-módulos determinado por $\beta(f \otimes x) = fx - f$, $(f \in F(X), x \in X)$. (Para ver que β es un isomorfismo, basta observar que si G es un grupo pro-$\underline{C}$, y X un espacio de Boole, entonces

$$\mathcal{Al}(G) \quad \hat{\otimes} \ \mathcal{A}(X)$$

es el $\mathcal{Al}(G)$-módulo pseudocompacto libre sobre el espacio $\{ 1 \otimes x \mid x \in X\}$.).

La demostración del lema que sigue, necesitaría algunos resultados de Algebra Homológica, cuyo tratamiento alargaría excesivamente estas notas. El lector interesado puede encontrar en sus términos esenciales la demostración en [2], p. 459.

<u>7.4 Lema</u>

Sea

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\eta} G \longrightarrow 1$$

una sucesión exacta de grupos pro-$\underline{C}$, donde $F = F(X)$ es el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre el espacio de Boole X. Se tiene entonces una sucesión exacta de $\mathcal{Al}(G)$-módulos pseudocompactos,

$$0 \longrightarrow R_{ab} \xrightarrow{\theta} M \xrightarrow{\partial} \mathcal{Al}(G) \xrightarrow{\varepsilon} Z_{\underline{C}} \longrightarrow 0$$

donde M es un $\mathcal{Al}(G)$-módulo libre pseudocompacto sobre el espacio de Boole $\{e_x \mid x \in X\}$; donde $\delta(e_x) = \eta_x - 1$; donde R_{ab} es el abelianizado de R, con la $\mathcal{Al}(G)$-estructura natural.

7.5 Proposición

Supongamos que los grupos en $\underline{C}$ son resolubles. Sea G un grupo pro-$\underline{C}$, y supongamos que I_G es un $\mathcal{Al}(G)$-módulo pseudocompacto libre sobre $\{x-1 \mid x \in X\}$, donde X es un cierto subconjunto cerrado de G. Entonces G es el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre X.

Demostración:

Sea $F = F(X)$ el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre X, y definamos

$$\eta : F \longrightarrow G$$

mediante $\eta(x) = x$, $(x \in X)$. Pongamos $R = \ker \eta$. Por el lema 7.4, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R_{ab} \xrightarrow{\theta} M \xrightarrow{\partial} \mathcal{Al}(G) \xrightarrow{\varepsilon} Z_{\underline{C}} \longrightarrow 0.$$

Puesto que $I_G = \partial(M)$, y hemos supuesto que I_G es libre sobre $\{x-1 \mid x \in X\}$, tenemos que ∂ es un isomorfismo, y por tanto $R_{ab} = 0$; es decir R coincide con R' (la clausura de su grupo derivado). Esto implica que para todo subgrupo normal abierto U de R, el grupo finito R/U coincide con su derivado. Pe ro ésto no es posible más que si $R/U = 1$ para todo U, puesto que R/U es resoluble. Por tanto $R = 1$, y por consiguiente $F(X) = G$.

7.6 Teorema

El grafo de Boole $\Gamma(F(X),X)$, donde $F(X)$ es el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre un espacio de Boole X, es un $\underline{C}$-árbol. Recíprocamente, supongamos que G es un grupo pro-$\underline{C}$, X un subconjunto cerrado de G, y que $\Gamma(G,X)$ es un $\underline{C}$-árbol; si $\underline{C}$ consiste en grupos finitos resolubles, entonces G es el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre X.

Demostración:

Por la Proposición 6.18, $\Gamma = \Gamma(F(X),X)$ es conexo, puesto que X genera a $F(X)$ topológicamente. Por el Lema 7.3, el homomorfismo

$$d : \mathcal{A}(A(\Gamma)) = \mathcal{A}(F(X) \times X) \longrightarrow \mathcal{A}(V(\Gamma)) = \mathcal{A}(F(X))$$

es inyectivo.

Recíprocamente, sea G un grupo pro-$\underline{C}$, X un subconjunto cerrado de G y supongamos que $\Gamma = \Gamma(G,X)$ sea un $\underline{C}$-árbol. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(G \times X) \xrightarrow{d} \mathcal{A}(G) \xrightarrow{\varepsilon} Z_{\underline{C}} \longrightarrow 0$$

es exacta.

Por la Prop. 6.18, X genera a G topológicamente. Puesto que

$$\mathcal{A}(G \times X) \xrightarrow{d} I_G$$

es un isomorfismo de $\mathcal{A}\ell(G)$-módulos y $\mathcal{A}(G \times X) = \mathcal{A}\ell(G) \hat{\otimes} \mathcal{A}(X)$ es el $\mathcal{A}\ell(G)$-módulo pseudocompacto libre sobre $\{1 \otimes x \mid x \in X\}$, tenemos que I_G es el $\mathcal{A}\ell(G)$-módulo pseudocompacto libre sobre $\{x-1 \mid x \in X\}$. Puesto que los grupos en $\underline{C}$ son resolubles, nuestro resultado se sigue de la Proposición 7.5.

7.7 El teorema anterior caracteriza los grupos libres pro-$\underline{C}$ sobre un espacio de Boole X (cuando $\underline{C}$ consiste en grupos resolubles). Para obtener un resultado similar para grupos libres $\tilde{F}(X)$ sobre espacios punteados, necesitamos, primeramente, introducir un nuevo concepto. Diremos que un grafo de Boole Γ es un pseudo-$\underline{C}$-árbol si

(i) Γ es conexo,

(ii) existe una inyección

$$\mu : V(\Gamma) \longrightarrow A(\Gamma)$$

que es el nivelador de las funciones

$$A(\Gamma) \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} V(\Gamma)$$

en la categoría de espacios de Boole, y

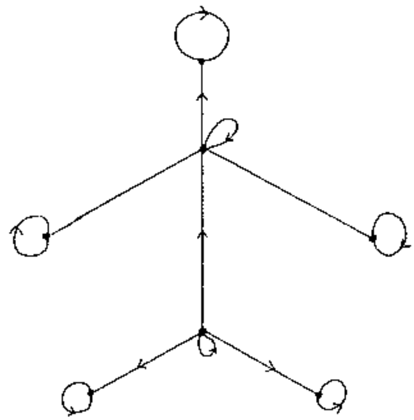
(iii) μ induce un isomorfismo natural $\mathcal{A}(V(\Gamma)) \approx H_1(\Gamma)$.

Tenemos, pues, que Γ es un pseudo-$\underline{C}$-árbol si la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(V(\Gamma)) \xrightarrow{\overline{\mu}} \mathcal{A}(A(\Gamma)) \xrightarrow{d} \mathcal{A}(V(\Gamma)) \xrightarrow{\varepsilon} Z_{\underline{C}} \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $\overline{\mu}$ está inducido por μ.

Nótese que si Γ es finito, entonces Γ es un pseudo-$\underline{C}$-árbol si y sólo si, una vez excluidos los lazos $\mu(v)$ $(v \in V(\Gamma))$, obtenemos un árbol en el sentido ordinario. Por ejemplo el siguiente grafo finito es un pseudo-$\underline{C}$-árbol (Para todo $\underline{C}$):



7.8 Lema

Sea G un grupo pro-$\underline{C}$ y X un subconjunto cerrado de G que contiene la identidad. Si M denota el submódulo cerrado del $\mathcal{Al}(G)$-módulo pseudocompacto $\mathcal{A}(G \times X)$, engendrado por $\{(g,1) \in G \times X \mid g \in G\}$, entonces $\mathcal{A}(G \times X)/M$ es el $\mathcal{Al}(G)$-módulo pseudocompacto sobre el espacio de Boole punteado $(X,1)$, con función canónica $\eta : X \longrightarrow \mathcal{A}(G \times X)/M$ dada por $\eta(x) = (1,x) + M$.

Demostración:

Sea T el $\mathcal{Al}(G)$-módulo pseudocompacto sobre el espacio punteado X, con función canónica $\zeta : X \longrightarrow T$. Definamos $\mathcal{Al}(G)$-homomorfismos continuos,

$$T \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}(G \times X)/M,$$

de la manera siguiente:

$$\phi \zeta(x) = (1,x) + M$$

$$\Psi[(g,x) + M] = g \zeta(x).$$

Tenemos entonces que $\phi\Psi$ y $\Psi\phi$ son identidades, y por tanto ϕ un $\mathcal{Al}(G)$-isomorfismo.

7.9 Teorema

El grafo $\Gamma(\tilde{F}(X),X)$ de un grupo libre pro-$\underline{C}$ $\tilde{F}(X)$ sobre un espacio punteado X, es un pseudo-$\underline{C}$-árbol. Recíprocamente, (supongamos que los grupos en $\underline{C}$ son resolubles) si G es un grupo pro-$\underline{C}$, X un subconjunto cerrado de G que contiene el elemento identidad de G, y si $\Gamma(G,X)$ es un pseudo-$\underline{C}$-árbol, entonces G es el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre el espacio punteado (X,1).

Demostración:

Es inmediato que la función,

$$\mu : \tilde{F}(X) \longrightarrow \tilde{F}(X) \times X,$$

dada por $\mu(f) = (f,1)$ es el nivelador de

$$\tilde{F}(X) \times X \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} \tilde{F}(X) .$$

Tenemos, pues, que demostrar que la sucesión,

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(\tilde{F}(X)) \xrightarrow{E} \mathcal{A}(\tilde{F}(X) \times X) \xrightarrow{d} \mathcal{A}(\tilde{F}(X)) \xrightarrow{\varepsilon} Z_{\underline{C}} \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $\bar{\mu}$ está inducida por μ. Puesto que μ es un monomorfismo, también los es $\bar{\mu}$ (esto se sigue de una combinación del Lema 6.10, el Teorema 5.4 y el hecho que $\varprojlim$ preserva monomorfismos). Puesto que X genera a $\tilde{F}(X)$ topológicamente, tenemos que im d = ker ε. Por el Lema 7.3, $I_{\tilde{F}(X)}$ es el $\mathfrak{Al}(G)$-módulo libre pseudocompacto sobre el espacio punteoado X, con función canónica $\eta: X \longrightarrow I_{\tilde{F}(X)}$, dada por $\eta(x) = x - 1$. Deducimos por tanto del Lema 7.8 que im $\bar{\mu}$= ker d.

Recíprocamente, supongamos que G es un grupo pro-$\underline{C}$ y X un subconjunto cerrado de G que contiene al elemento 1. Supongamos que $\underline{C}$ consiste en grupos resolubles, y que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A}(G) \xrightarrow{\bar{\mu}} \mathfrak{A}(G \times X) \xrightarrow{d} \mathfrak{A}(G) \xrightarrow{\varepsilon} Z_{\underline{C}} \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $\bar{\mu}(g) = (g,1)$. Entonces d induce un isomorfismo (que está claro es isomorfismo de $\mathfrak{Al}(G)$-módulos pseudocompactos)

$$\mathfrak{A}(G \times X) / \bar{\mu}(\mathfrak{A}(G)) \longrightarrow I_G.$$

Por consiguiente I_G es un $\mathfrak{Al}(G)$-módulo pseudocompacto libre sobre el espacio punteado X con función canónica,
$\eta: X \longrightarrow I_G$, dada por $\eta(x) = x - 1$. Utilizando un argumento similar al de la Prop. 7.5, deducimos que G es libre sobre el espacio puntado X.

8. Grupos operando sobre grafos

8.1 Sea G un grupo pro-$\underline{C}$ y sea Γ un grafo de Boole. Diremos que G opera sobre Γ, si opera de manera continua sobre $V(\Gamma)$ y $A(\Gamma)$, de forma que

$d_i(x\,a) = x\,d_i(a), \quad \forall \;\; x \in V(\Gamma),\; a \in A(\Gamma),\; i = 0,1.$

Dada esta situación, definimos el grafo de las órbitas $G\backslash\Gamma$ de la manera siguiente: los vértices de $G\backslash\Gamma$ son las órbitas de $V(\Gamma)$ bajo la acción de G (es decir el espacio cociente $V(\Gamma)/R'$, donde R' es la relación de equivalencia en $V(\Gamma)$ definida $xR'y \Leftrightarrow \exists\; g \in G$ con $x = gy$; nótese que R' es cerrada y que $V(\Gamma)/R'$ es un espacio de Boole); las aristas de $G\backslash\Gamma$ son las órbitas de $A(\Gamma)$ bajo la acción de G (es decir el espacio cociente $A(\Gamma)/R$, donde R es la relación de equivalencia en $A(\Gamma)$ definida por $xRy \Leftrightarrow \exists\; g \in G$ con $x = gy$); y las funciones continuas

$$A(\Gamma)/R \;\underset{\overline{d}_1}{\overset{\overline{d}_0}{\rightrightarrows}}\; V(\Gamma)/R'$$

están inducidas por d_0 y d_1.

8.2 Ejemplo.

Sea G un grupo pro-$\underline{C}$ y X un subconjunto cerrado de G. Entonces G opera de manera natural sobre $\Gamma(G,X)$ (en los vértices, utilizando la multiplicación de G, y en las aristas (g,x), operando sobre la primera componente). Nótese que $G\backslash\Gamma(G,X)$ tiene un solo vértice, y el espacio de sus aristas es homeomorfo a X.

8.3 Si G opera sobre Γ, diremos que opera libremente si $g\,x = x \;\Leftrightarrow\; g = 1 \quad (x \in A(\Gamma) \cup V(\Gamma))$. En el ejemplo anterior, es fácil ver que G opera libremente sobre $\Gamma(G,X)$.

El resultado final al que queremos llegar en esta sección, caracteriza (bajo ciertas condiciones) a los grupos que operan libremente sobre $\underline{C}$-árboles. Necesitamos primeramente unos resultados auxiliares.

8.4 Lema

Sea Γ un $\underline{C}$-árbol o un pseudo-$\underline{C}$-árbol, y sean T_0 y T_1 subgrafos conexos de Γ, que no tengan ni aristas ni vértices en común. Existe entonces como máximo una arista $a \in A(\Gamma)$ con $d_0(a) \in V(T_0)$ y $d_1(a) \in V(T_1)$.

Demostración:

Supongamos que existan dos aristas distintas a y a' en $A(\Gamma)$, con $d_i(a) = t_i \in V(T_i)$, y $d_i(a') = t_i' \in V(T_i)$, $i=0,1$. Consideremos el subgrafo Δ de Γ, definido por

$$A(\Delta) = A(T_0) \cup A(T_1) \cup \{a\} \cup \{a'\},$$

$$V(\Delta) = V(T_0) \cup V(T_1).$$

Puesto que T_0 y T_1 son conexos, existen $u_i \in \mathcal{Q}(A(T_i))$ con

$$d(u_i) = t_i - t_i', \qquad (i=0,1).$$

Pongamos $y = u_0 + a$, $z = u_1 + a'$. Entonces, $d(y-z) = 0$. Si Γ es un $\underline{C}$-árbol, esto implica que $y = z$. Si Γ es un pseudo-$\underline{C}$-árbol, entonces $y \equiv z \pmod{\bar{\mu}\, \mathcal{Q}(V(\Gamma))}$, donde $\bar{\mu}: \mathcal{Q}(V(\Gamma)) \longrightarrow \mathcal{Q}(A(\Gamma))$ es el homomorfismos asociado con el pseudo-$\underline{C}$-árbol Γ. Puesto que

$$\mathcal{Q}(A(V)) \cap \bar{\mu}(\mathcal{Q}(V(\Gamma)) \subseteq \mathcal{Q}(A(T_0) \cup A(T_1)),$$

tenemos, en ambos casos, que

$$0 \equiv y - z \equiv a - a' \pmod{\mathcal{Q}(A(T_0) \cup A(T_1)))}.$$

Pero esto es imposible, pues consideremos el grafo finito $\overline{\Delta}$ que tiene un solo vértice t, y tres aristas $\overline{a}, \overline{a}'$ y l; definamos un morfismo de grafos

$$\pi : \Delta \longrightarrow \overline{\Delta}$$

por $\qquad \pi(V(T_0) \cup V(T_1)) = \{t\},$

$$\pi(a) = \overline{a}, \quad \pi(a') = \overline{a}', \quad y$$

$$\pi(A(T_0) \cup A(T_1)) = \{l\}.$$

Entonces $\overline{a} - \overline{a}'$ es un $Z_{\underline{C}}$- múltiplo de l en $\mathcal{A}(A(\overline{\Delta}))$, lo que no es posible.

8.5 Lema

Sea Γ un $\underline{C}$-árbol (respect. un pseudo-$\underline{C}$-árbol). Sea T un sub-$\underline{C}$-árbol (respect. sub-pseudo-$\underline{C}$-árbol). Si $a \in A(\Gamma)$ y $d_0(a)$, $d_1(a) \in V(T)$, entonces $a \in A(T)$.

Demostración:

Pongamos $d_i(a) = t_i$ $(i = 0,1)$. Existe entonces $u \in \mathcal{A}(A(T))$ con $du = t_1 - t_0$. Por tanto $a - u \in \ker d$. De donde, si Γ es un $\underline{C}$-árbol, tenemos

$$a = u \in \mathcal{A}(A(T)) \cap A(\Gamma) = A(T).$$

Si Γ es un pseudo-$\underline{C}$-árbol, tenemos

$$a \equiv u \pmod{\mu\ \mathcal{A}(V(\Gamma))}.$$

Consideremos el subgrafo Δ de Γ, definido por $A(\Delta) = A(T)\cup\{a\}$, $V(\Delta) = V(T)$. Tenemos

$$\mathcal{A}(A(\Delta)) \cap_{\bar{\mu}} \mathcal{A}(V(\Gamma)) \subseteq \mathcal{A}(A(T));$$

y por tanto

$$a \equiv u \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \mathcal{A}(A(T));$$

es decir

$$a \in \mathcal{A}(A(T)) \cap A(\Gamma) = A(T).$$

8.6 Dado un grafo de Boole Γ, decimos que un sub-$\underline{C}$-árbol o un sub-pseudo-$\underline{C}$-árbol T de Γ es <u>maximal</u> si $V(T)' = V(\Gamma)$.

Si un grupo pro-$\underline{C}$ G opera sobre un grafo de Boole Γ, existe una evidente proyección canónica de grafos de Boole

$$\phi : \Gamma \longrightarrow G\backslash\Gamma.$$

Diremos que un subgrafo L de $G\backslash\Gamma$ se puede <u>elevar</u> a Γ si existe un subgrafo L' de Γ tal que ϕ, restringido a L' es un isomorfismo de grafos

$$\phi_{L'} : L' \longrightarrow L$$

<u>8.7 Teorema</u>

Supongamos que un grupo pro-$\underline{C}$ G opera libremente sobre un $\underline{C}$-árbol (respct. un pseudo-$\underline{C}$-árbol) Γ, y que $G\backslash\Gamma$ contiene un sub-$\underline{C}$-árbol maximal (respct. un sub-pseudo-$\underline{C}$-árbol maximal) T', que se puede elevar a Γ. Supongamos, además, que

$$\Gamma' \approx \Gamma(G,S).$$

Esta isomorfismo es obvio en los vértices. En el espacio de las aristas es la función

$$\alpha : A(\Gamma') \longrightarrow G \times S$$

dada por

$$\alpha(a') = (g,\ g^{-1} g_1),$$

donde a' denota una arista de $gV(T)$ a $g_1V(T)$. Es fácil comprobar que α es una función continua y sobre. Por otra parte, $\alpha(x\,a') = (xg,\ g^{-1}g_1)$, $\forall\ x \in G$. Por tanto, para ver que α es 1-1, es suficiente demostrar que si a_1 y a_2 son dos aristas en Γ' que van de T a gT, entonces

$$\alpha(a_1) = \alpha(a_2) = (1,g) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Si $g \neq 1$, esto se sigue del Lema 8.4, y si $g = 1$, del Lema 8.5.

Para completar la demostración de este resultado, basta, pues, probar que Γ' es un pseudo-$\underline{C}$-árbol (ver Teorema 7.9). Nótese primeramente que el núcleo de la proyección natural

$$\mathcal{Q}(V(\Gamma)) \longrightarrow \mathcal{Q}(V(\Gamma'))$$

es el subgrupo cerrado de $\mathcal{Q}(V(\Gamma))$ generado por

$$\{g(x-y) \mid x,\ y \in V(T),\ \ g \in G\}.$$

Este núcleo coincide, por tanto, con la imagen $d(\mathcal{Q}(GA(T)),$

puesto que cada $gA(T)$ es conexo.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}(A(\Gamma)) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{A}(V(\Gamma)) \arrow[d, "\pi"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(V(\Gamma')) \arrow[r, "\bar{\zeta}"] & \mathcal{A}(A(\Gamma')) \arrow[r, "d'"] & \mathcal{A}(V(\Gamma')) \arrow[r] & Z_{\underline{C}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sea

$$\zeta : V(\Gamma') \longrightarrow A(\Gamma')$$

la función $\zeta(gV(T)) = g\,A(T)$. Es evidente que ζ es el nivelador de

$$A(\Gamma') \underset{d_1'}{\overset{d_0'}{\rightrightarrows}} V(\Gamma').$$

Sea $\bar{\zeta}$ el homomorfismo inducido por ζ (ver el diagrama), y denotemos mediante π las proyecciones naturales. Nos falta demostrar que $\operatorname{im} \bar{\zeta} = \ker d'$. Desde luego $d'\bar{\zeta} = 0$. Supongamos que $d'(z) = 0$, y sea $\omega \in \mathcal{A}(A(\Gamma))$ tal que $\pi(\omega) = z$. Entonces $\pi d(\omega) = 0$, y por tanto $d(\omega) = d(\omega')$, donde $\omega' \in \mathcal{A}(GA(T))$. Claramente $\pi(\omega) \in \operatorname{im} \bar{\zeta}$. Ahora bien, si Γ es un $\underline{C}$-árbol, entonces $\omega = \omega'$, y por consiguiente $z \in \operatorname{im} \bar{\zeta}$. Si, por el contrario, Γ es un pseudo-$\underline{C}$-árbol, entonces $\omega - \omega'$ está en la imagen del homomorfismo

$$\bar{\mu} : \mathcal{A}(V(\Gamma)) \longrightarrow \mathcal{A}(A(\Gamma))$$

asociado al pseudo-$\underline{C}$-árbol Γ. Por otra parte, está claro que

$$\pi(\mathrm{im}\,\bar{\mu}) \subseteq \mathrm{im}\,\tilde{\xi}\,.$$

Por consiguiente, $\pi\omega - \pi\omega' \in \mathrm{im}\,\bar{\mu}$, y por tanto, $z = \pi\omega \in \mathrm{im}\,\bar{\mu}$.

8.8 Corolario

Si todos los grupos en $\underline{C}$ son resolubles, y G es un grupo pro-$\underline{C}$, entonces G es un grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre un espacio de Boole punteado, si y sólo si G opera libremente sobre un pseudo-$\underline{C}$-árbol Γ de tal manera que $G\backslash\Gamma$ contenga un sub-pseudo-$\underline{C}$-árbol maximal que pueda ser elevado a Γ.

Demostración:

Una de las implicaciones es simplemente el Teorema 8.7. Recíprocamente, supongamos que $G = \tilde{F}(X)$ es el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre el espacio punteado X. Claramente $\tilde{F}(X)$ opera libremente sobre el grafo $\Gamma = \Gamma(\tilde{F}(X),X)$, que como hemos visto (Teorema 7.9) es un pseudo-$\underline{C}$-árbol. El grafo $G\backslash\Gamma$ sólo tiene un vértice, y por tanto $G\backslash\Gamma$ contiene un pseudo-$\underline{C}$-árbol maximal que evidentemente puede ser elevado a Γ.

9. Aplicaciones

Supondremos en esta sección que los grupos en $\underline{C}$ son resolubles.

9.1 Queremos utilizar los resultados obtenidos en las secciones anteriores, para describir la estructura de ciertos subgrupos cerrados de grupos libres pro-$\underline{C}$. En cada uno de los casos que vamos a estudiar, tenemos la siguiente situación general. Sea $\tilde{F}(X)$ (respct. $F(X)$) un grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre un espacio de Boole punteado (respct. no punteado) X, H un subgrupo cerrado de $\tilde{F}(X)$ (respect. $F(X)$). Consideremos el gratodos los grupos en $\underline{C}$ son resolubles. Entonces, G es un grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre un cierto espacio de Boole que describiremos explícitamente en la demostración.

Demostración:

Sea T el "elevado" de T' a Γ. Definamos un grafo de Boole Γ' con vertices

$$V(\Gamma') = V(\Gamma) / R_V ,$$

donde R_V es la relación de equivalencia cerrada $V(\Gamma)$ cuyas clases de equivalencia son $gV(T)$ (una para cada $g \in G$); con aristas

$$A(\Gamma') = A(\Gamma)/R_A \quad ,$$

donde R_A es la relación de equivalencia cerrada de $A(\Gamma)$ cuyas clases de equivalencia son por una parte, $g\,A(T)$ (una para cada $g \in G$), y por otra $\{a\}$ (una para cada $a \in A(\Gamma) \setminus \bigcup_{g \in G} g\,A(T)$); y con funciones

$$A(\Gamma') \underset{d_1'}{\overset{d_0'}{\rightrightarrows}} V(\Gamma')$$

inducidas por d_0 y d_1.

Consideremos el subconjunto cerrado de G

$$S = \{g \in G \mid \exists\ a \in A(\Gamma) \quad \text{con} \quad d_0(a) \in T \text{ y } d_1(a) \in g\,T\}.$$

Vamos a demostrar, primeramente, que

fo $\Gamma = \Gamma(\tilde{F}(X),X)$. (respect. $\Gamma = \Gamma(F(X),X)$). $\tilde{F}(X)$, y por tanto H, opera libremente sobre Γ, de manera natural: por ejemplo, en el caso punteado, si $f \in \tilde{F}(X)$ y $v \in V(\Gamma) = \tilde{F}(X)$, entonces fv es simplemente multiplicación en $\tilde{F}(X)$; si $f \in \tilde{F}(X)$ y $(f', x) \in A(\Gamma) = \tilde{F}(X) \times X$, entonces $f(f',x) = (ff', x)$.

El grafo de las órbitas $H\backslash\Gamma$, tiene como vértices las clases (digamos a la derecha) de H en $\tilde{F}(X)$; y como aristas los pares (Hf, x), $(f \in \tilde{F}(X))$.

Para poder aplicar el Teorema 8.7 (que es lo que vamos buscando), tenemos que poder verificar sus hipótesis, es decir, que por una parte $H\backslash\Gamma$ contiene un sub-pseudo-$\underline{C}$-árbol maximal (respect. un sub-$\underline{C}$-árbol maximal), y por otra, que éste se puede elevar a Γ. En todos los casos que vamos a estudiar, utilizaremos siempre esta notación.

9.2 Ejemplo

Sea H un subgrupo abierto de $\tilde{F}(X)$. Consideremos el grupo libre discreto $D = D(X \setminus \{*\})$ sobre el conjunto $X \setminus \{*\}$, donde $*$ es el punto distinguido del espacio punteado X. Entonces (cf. Teorema 4.3), D es un subgrupo denso de $\tilde{F}(X)$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook] & \tilde{F}(X) \\ D \cap H \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & H \arrow[u, hook] \end{tikzcd} .$$

Escojamos un sistema de representantes de Schreier de $D \cap H$ en D (cf. [5], p. 93), es decir, un sistema completo de representantes,

$$T = \{ g_0=1, g_1, g_2, \ldots, g_r \},$$

donde cada g_i es de la forma

$$g_i = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_t^{\varepsilon_t} \quad , x_i \in X\backslash\{*\}, \ \varepsilon_i = \pm 1 \ ;$$

de manera que todo segmento inicial $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_s^{\varepsilon_s}$, $(s \leq t)$, de g_i, también es un elemento g_j de T. Está claro que T es también un sistema completo de representantes de H en $\tilde{F}(X)$. Es evidente que $1, g_1, \ldots, g_r$ son los vértices de un subárbol finito de Γ, que es isomorfo a su imagen en $H\backslash\Gamma$, y ésta es un subárbol maximal de $H\backslash\Gamma$. Por tanto, según el Teorema 8.7, H es un grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre un espacio punteado S. En este caso S tiene la forma (cf. demostración del Teorema 8.7) :

$$S = \bigcup_{i,j=0}^{r} (H \cap g_i \, X g_j^{-1}$$

De aquí deducimos también el siguiente resultado: si el punto distinguido 1 de X está aislado en X, es decir si $\tilde{F}(X)$ es en realidad $F(X\backslash\{1\})$ (un grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre un espacio de Boole no punteado), entonces el punto distinguido de S que es también 1, está igualmente aislado; es decir H es libre pro-$\underline{C}$ sobre un espacio de Boole no punteado.

9.3 Ejemplo

Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ y

$$H = \overline{[\ F(X),\ F(X)\ ]},$$

la clausura del subgrupo derivado de $F(X)$. Consideremos el pro-$\underline{C}$-árbol $\Gamma = (F(X), X)$. Consideremos el subgrafo T de Γ, cuyos vértices son

$$V(T) = \{ x_1^{\alpha_1} \; x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_i \in Z_{\underline{C}} \} ,$$

y cuyas aristas son de la forma

$$(x_1^{\alpha_1} \; x_2^{\alpha_2} \ldots x_i^{\alpha_i} , \quad x_j),$$

donde $j = i, i+1, \ldots, n$. Entonces, T es un $\underline{C}$-árbol: es clara mente $\underline{C}$-acíclico, puesto que Γ lo es; por otra parte T es conexo, pues, nótese primeramente que $I_{V(T)}$ está topológicamen te generado por los elementos de la forma

$$x_1^{m_1} \; x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} \quad - \quad x_1^{m_1} \; x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$$

$(m_i \in Z)$ y es fácil comprobar que estos elementos son de la forma $d(a)$, donde $a \in \mathcal{Q}(A(T))$ (de hecho, a es una Z-combina ción lineal finita de aristas de la forma

$$(x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_i^{r_i} , \; x_j),$$

con $r_t \in Z$, $j = i, i+1, \ldots, n$); por tanto $d(\mathcal{Q}(A(T)) = I_{V(T)}$.

Ahora bien, T es isomorfo con su imagen canónica en $H \backslash \Gamma$, y esta imagen es un sub-$\underline{C}$-árbol maximal de $H \backslash \Gamma$. Podemos pues, aplicar el Teorema 8.7, para afirmar que H es un grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre un espacio punteado S. Nótese que los elementos de S son todos los de la forma

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i} \ldots x_n^{\alpha_n} \; x_i \;\; (x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i + 1} \ldots x_n^{\alpha_n})^{-1}$$

$(\alpha_i \in Z_{\underline{C}})$.

9.4 Antes de exponer nuestro último ejemplo, queremos hacer una observación sobre presentaciones de grupos profinitos. Dado un grupo pro-$\underline{C}$ G, un espacio de Boole X, y un conjunto R de elementos de $F(X)$, decimos que

$$\langle X \mid R \rangle$$

es una presentación pro-$\underline{C}$ del grupo pro-$\underline{C}$ G, si G es topológicamente isomorfo al grupo cociente

$$F(X) / [R] \text{ ,}$$

donde $F(X)$ es el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre X, y $[R]$ es el subgrupo normal cerrado de $F(X)$ engendrado por R. Es decir que existe una sucesión exacta de grupos profinitos

$$1 \longrightarrow [R] \longrightarrow F(X) \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

9.5 Lema

Sea X un conjunto finito, y sea $G = \langle X \mid R \rangle$ una presentación discreta de un grupo discreto. Entonces $\langle X \mid R \rangle$ es también una presentación pro-$\underline{C}$ del grupo $\hat{G}$ (la compleción pro-$\underline{C}$ de G; ver 2.1).

Demostración:

Sea $D = D(X)$ el grupo libre discreto sobre X. Tenemos entonces una sucesión exacta de grupos discretos

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow D(X) \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1 \text{ ,}$$

donde K es el subgrupo normal de $D(X)$ generado por R.

Consideremos el conjunto de sucesiones exactas de grupos finitos

$$1 \longrightarrow KN/N \longrightarrow D/N \xrightarrow{\psi} G/\psi N \longrightarrow 1 ,$$

donde N varía sobre los subgrupos normales de D con $D/N \in \underline{C}$. Tomando límites proyectivos, obtenemos

$$1 \longrightarrow \bar{K} \longrightarrow \hat{D} \xrightarrow{\psi} \hat{G} \longrightarrow 1,$$

donde $\hat{D} = F(X)$ (el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre X), y $\bar{K}$ es el subgrupo cerrado de F(X) generado por R.

9.6 Supongamos que $\underline{C}$ contiene a todos los 2-grupos. El grupo diédrico infinito dicreto D_∞ tiene la presentación

$$D_\infty = \langle\, x,\ y \mid x^2,\ (x\,y)^2 \,\rangle ,$$

y es bien sabido que es isomorfo al grupo multiplicativo de las matrices

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a = \pm 1 ,\ b \in Z \right\} ,$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Por el Lema 9.5, la compleción pro-$\underline{C}$ $\hat{D}_\infty$ de D_∞ tiene como presentación pro-$\underline{C}$

$$\langle\, x,\ y \mid x^2,\ (x\,y)^2 \,\rangle .$$

Por otra parte está claro que

$$\hat{D}_\infty = \begin{pmatrix} \pm 1 & Z_{\underline{C}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

y todo elemento de $\hat{D}_\infty$ tiene la forma única

$$x^i \; y^\alpha \qquad (i = 0,1;\ \alpha \in Z_{\underline{C}}).$$

9.7 Ejemplo

Supongamos que $\underline{C}$ contiene todos los 2-grupos. Sea $F = F(x,y)$ el grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre el espacio con dos elementos $\{x,y\}$. Sea H el subgrupo normal cerrado de F engendrado por x^2, $(xy)^2$. Consideremos el subgrafo T de $\Gamma = \Gamma\ (F(x,y),\ \{x,y\})$ con vértices

$$\{x^i y^\alpha \mid i = 0,1;\ \ \alpha \in Z_{\underline{C}}\},$$

y con aristas de la forma

$$(x^i\ y^\alpha,\ y) \quad \text{o} \quad (x^i,\ x).$$

Se comprueba con facilidad que T es un $\underline{C}$-árbol, y que T es isomorfo a su imagen canónica en $H \backslash \Gamma$ (ver 9.6). Esta imagen es un sub-$\underline{C}$-árbol maximal de $H \backslash \Gamma$. Tenemos, pues, por el Teorema 8.7, que H es un grupo libre pro-$\underline{C}$ sobre el espacio punteado S, cuyos elementos son de la forma

$$x\,y^\alpha\ x\,y^{-\alpha} \quad \text{o} \quad y^\alpha\,x\,y^{-\alpha}\ x^{-1} \quad (\alpha \in Z_{\underline{C}}).$$

B I B L I O G R A F I A

1. N. Bourbaki, General Topology, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.
2. A. Brumer, Pseudocompact algebras, profinite groups and class formations, J. of Algebra, 4 (1966) 442-470.
3. D. Gildenhuys y L. Ribes, Profinite groups and Boolean graphs, J. of Pure and Applied Algebra, 1977.
4. M. Lazard, Groupes analytiques p-adiques, I.H.E.S.,Paris, 1965.
5. W. Magnus, A. Karras y D. Solitar, Combinatorial group theory, Interscience, New York, 1966.
6. D. Montgomery y L. Zippin, Topological transformation groups, Interscience, New York, 1964.
7. L. Ribes, Introduction to profinite groups and Galois cohomology, Queen's Papers in Pure and Applied Math., nº 24, Kingston, 1970.
8. J-P. Serre, Groupes discrets, Collège de France, 1968-69.
9. O. Zariski y P. Samuel, Commutative Algebra, Van Nostrand, Princeton, 1958.

I N D I C E