REPRESENTACIONES FINITAS DE ANILLOS DE GRUPO DE GRUPOS ABELIANOS.

P. Menal

Introducción

El estudio del radical de Jacobson de un anillo de grupo ha ocupado la atención de muchos algebristas durante los últimos veinte años. El radical de Jacobson de un anillo da idea de "la cantidad" de representaciones irreducibles que posee el anillo. Passman [3] estudió cuándo un anillo de grupo $Q[G]$, donde G es un grupo finitamente generado, tiene muchas representaciones irreducibles finitas. Demostró que el radical finito de Jacobson de $Q[G]$ es cero si y sólo si G es un grupo residualmente finito.

El propósito de este artículo es dar algunos resultados elementales sobre las representaciones finitas de un anillo $K[G]$. Una ampliación de este trabajo es una parte del capítulo I de [2].

1. Radical finito.

Sean K un cuerpo y G un grupo. $K[G]$ denota el anillo del grupo G sobre el cuerpo K. Todos los cuerpos que consideramos son de característica cero.

Una representación

$$\rho : K[G] \longrightarrow \mathrm{En}_K(V)$$

se dice que es finita si V tiene dimensión finita como K-espacio vectorial.

Denotaremos por $R(K[G])$ la intersección de los núcleos de todas las representaciones finitas de $K[G]$.

El radical finito $f^{*}-R(K[G])$ es, siguiendo la notación de [3], la intersección de los núcleos de todas las representaciones irreducibles y finitas de $K[G]$.

Con la notación anterior tenemos que

$$R(K[G]) \subseteq f^{*}-R(K[G]) \qquad J(K[G]) \subseteq f^{*}-R(K[G])$$

donde $J(K[G])$ es el radical de Jacobson de $K[G]$. En el caso de que todas las representaciones irreducibles son finitas tenemos que

$$J(K[G]) = f^{*}-R(K[G]).$$

Si G es un grupo, $R(G)$ denotará la intersección de todos los subgrupos normales de índice finito en G. Si G es un grupo abeliano es fácil demostrar que $R(G) = \bigcap_{n\geq 1} G^n$, donde $G^n = \langle x^n, x \in G \rangle$. Un grupo G se dice que es residualmente finito si $R(G) = \langle 1 \rangle$. G^+ denotará el conjunto de los elementos de G de orden finito.

El ideal aumentador, $\omega(K[G])$, de $K[G]$ es el núcleo de la proyección $K[G] \to K$ en la que $\sum_{x\in G} a_x \cdot x \longmapsto \sum_{x\in G} a_x$. En general si $H \triangleleft G$ la proyección natural $G \to G/H$ extiénde a un epimorfismo $K[G] \to K[G/H]$ cuyo núcleo es el ideal aumentador de $K[H]$ en $K[G]$ y se denota por $\omega(K[H])\ K[G]$.

1.1 Lema (Wallace [5]). Sean G un grupo residualmente finito y $\mathcal{N}$ la colección de sus subgrupos normales de índice finito. Entonces $\bigcap_{N\in\mathcal{N}} \omega(K[N])\ K[G] = (0)$.

Como consecuencia de este lema obtenemos:

1.2 Lema. Dado $K[G]$ se cumple que:

$$R(K[G]) \subseteq f^{*}-R(K[G]) \subseteq \omega(K[R(G)])\, K[G].$$

Demostración. Supongamos primero que G es residualmente finito. Para cada subgrupo normal de índice finito N sea $K[G] \to K[G/N]$ la proyección natural. Del Teorema de Maschke resulta que $f^{*}-R(K[G/N]) = (0)$ y por tanto $f^{*}-R(K[G]) \subseteq \bigcap \omega(K[N])\, K[G]$. Del Lema 1.1 se sigue que $f^{*}-R(K[G]) = (0)$.

Sea ahora G un grupo arbitrario. El grupo $G/R(G)$ es residualmente finito, luego $f^{*}-R(K[G/R(G)]) = (0)$. De ahí que $f^{*}-R(K[G]) \subseteq \omega(K[R(G)])K[G]$. El resultado se sigue, ya que trivialmente $R(K[G]) \subseteq f^{*}-R(K[G])$.

Un grupo G se llama K-lineal si $G \subseteq GL(n,K)$ para cierto entero n.

Consideremos las siguientes clases de grupos

G_K : la clase de los grupos K-lineales

R_F : la clase de los grupos residualmente finitos.

Entonces tenemos:

1.3 Lema. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una clase de grupos cerrada por cocientes y tal que $\mathcal{C} \cap G_K \subset R_F$. Entonces para cada $G \in \mathcal{C}$ se tiene que $R(K[G]) = f^{*}-R(K[G]) = \omega(K[R(G)])\, K[G]$.

Demostración: Teniendo en cuenta el Lema 1.2 basta probar que $\omega(K[R(G)])\, K[G] \subseteq R(K[G])$. Sea $g \in R(G)$ y $\rho : K[G] \to M(n,K)$ una representación finita de $K[G]$. El grupo $\rho(G) \in \mathcal{C} \cap G_K$ y en consecuencia es residualmente finito, así $\rho(g) = 1$. Puesto que el conjunto $\{1-g \mid g \in R(G)\}$ genera el ideal $\omega(K[R(G)])K[G]$ se tiene que $\omega(K[R(G)])K[G] \subseteq R(K[G])$.

Ejemplos de grupos que satisfacen las hipótesis del Lema 1.3 son:

(1) los grupos finitamente generados (Malcev Th.4.2[4]).

(2) los grupos de torsión (si $K = Q$) (Th. 9.33,[4]).

Un grupo G se dice que es un F.C. grupo si cada elemento tiene sólo un número finito de conjugados.

<u>1.4 Proposición</u>. Sea K un cuerpo tal que los grupos multiplicativos de las extensiones finitas de K son residualmente finitos. Sea G un F.C. grupo. Entonces $f^{*}-R(K[G]) = \omega(K[R(G)])K[G]$.

Demostración. Sea $\rho: K[G] \to A$ una representación irreducible y finita de $K[G]$. $\rho(G)$ es un F.C. grupo K-lineal, por tanto es una extensión finita de su centro $Z(\rho(G))$ (Cor. 5.6,[4]). Sea $\hat{Z}$ la K-subálgebra de A generada por $Z(\rho(G))$. Vamos a probar que $\hat{Z}$ es semisimple. En efecto, por ser $\hat{Z}$ central en $\rho(K[G])$ podemos escribir que $J(\hat{Z})\,\rho(K[G]) = \rho(K[G])\,J(\hat{Z})$ y puesto que $J(\hat{Z})$ es nílpotente resulta que $J(\hat{Z})\rho(K[G])$ es un ideal nilpotente de $\rho(K[G])$. Luego $J(\hat{Z})\rho(K[G]) = (0)$, ya que $\rho(K[G])$ es simple. Entonces $\hat{Z}$ es isomorfo con un producto de cuerpos $L_1 \times \ldots \times L_n$, cada L_i es una extensión finita de K. Por tanto $Z(\rho(G)) \hookrightarrow L_1^{*} \times \ldots \times L_n^{*}$ y de las hipótesis se deduce que $Z(\rho(G))$ es residualmente finito. Como $[\rho(G): Z(\rho(G))] < \infty$ resulta que $\rho(G)$ es residualmente finito. Entonces $\omega(K[R(G)])K[G] \subseteq \mathrm{Ker}\,\rho$ y como ρ era una representación finita arbitraria se tiene que

$$\omega(K[R(G)])\,K[G] \subseteq R(K[G]).$$

Hay ejemplos de cuerpos cuyos grupos multiplicativos son residualmente finitos y sin embargo los grupos multiplicativos de algunas de sus extensiones finitas no son residualmente finitos. Basta considerar el cuerpo

$$K = Q(\cos \pi/2^n, \text{ para todo entero } n \geq 1)$$

y la extensión $L = K(i)$.

Si K es un cuerpo de números el grupo multiplicativo K^* es suma directa de grupos cíclicos (Th. 127.2, [1]) y en particular residualmente finito.

<u>1.5 Corolario</u>. Sea G un F.C. grupo. Entonces

$$f^*\text{-}R(Q[G]) = \omega(Q[R(G)])\, Q[G]$$

El corolario 1.5 es cierto para otras clases de grupos, por ejemplo para grupos localmente resolubles.

En general, para grupos arbitrarios, el Corolario 1.5 no es cierto. Por ejemplo si $n > 1$ y $G = GL(n,Q)$, la identidad $GL(n,Q) \to GL(n,Q)$ induce una representación irreducible $Q[G] \to M(n,Q)$. Si el corolario 1.5 fuese cierto para G tendriamos que $R(G) = \langle 1 \rangle$ lo cual es absurdo.

<u>2. R(Q[G])</u>. Supondremos que G es un grupo abeliano y demostraremos el siguiente

<u>2.1 Teorema</u>. $R(Q[G]) = \omega(Q[R(G)^+])\, Q[G]$.

Demostración. Procederemos en varias etapas.

(1) $G = Q^+$ (el grupo aditivo de Q). En este caso hemos de probar que $R(Q[G]) = (0)$.

Consideremos las aplicaciones $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por

$$\begin{aligned} \rho_n : Q &\longrightarrow GL(n,Q) \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \binom{x}{1} & 1 & & & \\ \binom{x}{2} & \binom{x}{1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \binom{x}{n-1} & \binom{x}{n-2} \cdots & \binom{x}{n-i} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es fácil comprobar que cada ρ_n es un homomorfismo de grupos. Si $x \neq 0$ el polinomio mínimo de la matriz $\rho_n(x)$ es $(X-1)^n$. Sea $\alpha \in \bigcap_{n\geq 1} \operatorname{Ker} \rho_n^*$ (donde $\rho_n^* : Q[Q] \to M(n,Q)$ es la extensión de ρ_n a $Q[Q]$), $\alpha = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot x_i \in Q[Q]$. Puesto que Q es localmente cíclico sea $x \in Q$ tal que $\langle x\rangle = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Si $x=0$ se tiene que $\alpha = (\sum_{i=1}^{n} q_i)\cdot 0$. Ya que $1 \notin \bigcap_{n\geq 1} \operatorname{Ker} \rho_n^*$ es claro que $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0$ y $\alpha = 0$. Supongamos pues que $x \neq 0$ y escribamos $\alpha = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \lambda_i x$ para enteros λ_i convenientes. Consideremos la fracción racional $q(X) = \sum_{i=1}^{n} q_i \; X^{\lambda_i}$. Multiplicando $q(X)$ por su conveniente X^h se obtiene un polinomio $p(X)=X^{h}q(X)$. Sea m_0 el grado de $p(X)$. Sea $m > m_0$, ya que $\alpha \in \bigcap_{n\geq 1} \ker \rho_n^*$, tenemos que $\sum q_i \; \rho_m(x)^{\lambda_i} = 0$, o sea $p(\rho_m(x)) = 0$. Ya que el polinomio

mio mínimo de $\rho_a(x)$ es $(X-1)^m$ y $m > m_0$, se sigue que $p(X)=0$. Luego $q_i = 0$, $1 \leq i \leq m$, y $\alpha = 0$.

(2) $G = \sum_I Q$. Sea $\alpha \in Q[\sum_I Q]$, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot x_i$. Sea $J \subseteq I$ un conjunto finito tal que $\alpha \in Q[\sum_J Q]$. Sea $\pi : \sum_I Q \to \sum_J Q$ la proyección natural. Tenemos que $\pi(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, tiene una expresión del tipo $\pi(x_i) = (x_{i1}, \ldots, x_{im})$ donde $m = |J|$. Sean $e_{ij} = \pi(x_i) - \pi(x_j)$ $1 \leq i \neq j \leq n$. Ya que $e_{ij} \neq 0$ existe un hiper plano de Q^m que no contiene ningún e_{ij}. En otras palabras existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in Q$ tales que $\overline{x}_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, x_{ij}$, $1 \leq i \leq n$, son todos distintos. Definimos $\omega : \sum_J Q \to Q$ por $\omega(y_1, \ldots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i$.

Supongamos ahora que $\alpha \in R(Q[\sum_I Q])$. Entonces si ω^* y π^* son las respectivas extensiones de ω y π al anillo de grupo, se tiene que $(\omega^* \pi^*)(\alpha) \in R(Q[Q])$ y, de (1), tenemos que $(\omega^*\pi^*)(\alpha) = 0$, o sea $0 = (\omega^* \pi^*)(\alpha) = q_1 \cdot \overline{x}_1 + \cdots + q_n \overline{x}_n$.

Por construcción los elementos $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ son distintos, entonces $q_1 = \ldots = q_n = 0$ y $\alpha = 0$.

(*) Observemos que si $R(K[H]) = 0$ y $[G : H] = n < \infty$, entonces $R(K[G]) = 0$. En efecto $K[G]$ es un $K[H]$-módulo libre (por la izquierda) de dimensión n. Entonces $K[G] \hookrightarrow M(n, K[H])$.

(3) G es libre de torsión. Entonces $G \hookrightarrow \sum_I Q$ para un conjunto de índices I conveniente. Como $R(Q[G]) \leq R(Q[\sum_I Q])$ el resultado se sigue de (2).

(4) G^+ es residualmente finito. Sea $\alpha = \sum q_i \cdot x_i \in R(Q[G])$.

Ya que G^+ es residualmente finito existe su subgrupo N de G^+ tal que $[G^+ : N] < \infty$ y $x_i \, x_j^{-1} \notin N$ para $i \neq j$.

Supongamos primero que G^+ es un sumando directo de G, es decir $G = G^+ \times T$. Entonces $G/N \cong T \times G^+/N$. Por tanto G/N es una extensión finita del grupo T que es libre de torsión. De (*) y (3) se deduce que $R(Q[G/N]) = (0)$. En la proyección natural $Q[G] \to Q[G/N]$ se tiene que $\alpha \to \overline{\alpha} = \Sigma\, q_i \cdot \overline{x}_i$ y los elementos $\overline{x}_i$ son distintos. Como $\overline{\alpha} \in R(Q[G/N]) = (0)$ tenemos $q_i = 0$ y $\alpha = 0$. Supongamos ahora que G^+ no es necesariamente un sumando directo de G. Tenemos que el subgrupo de torsión de $\overline{G} = G/N$ es finito. Sea $n \geq 1$ un entero tal que $\overline{G}^n$ es libre de torsión. Entonces $G \hookrightarrow \overline{G}^n \times \overline{G}/\overline{G}^n$. El resultado se sigue de la primera parte.

(5) G es un grupo abeliano arbitrario. Se deduce de (4) que $R(Q[G/R(G)^+]) = (0)$. De ahi que $R(Q[G]) \leq \omega\,(Q[R(G)^+])\, Q[G]$. La otra inclusión se sigue del hecho que los grupos Q-lineales de torsión son finitos (TH. 9.33, [4]).

B I B L I O G R A F I A

[1] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups. Acad. Press, 1970.

[2] P. Menal, Tesis, presentada en la Universidad Autónoma de Barcelona, 1977.

[3] D.S. Passman, On groups with enough finite representations, Proc. Amer. Math. Soc., 14 (1963), 782-787,

[4] B.A.F. Wehrfritz, Infinite Linear Groups, Springer-Verlag, 1973.

[5] D.A.R. Wallace, The Jacobson Radinals of the Group Algebras of a Group and of Certain Normal subgroups. Math. Zeitschr, 100 (1967), 282-294.