CONDITIONS DE FINITUDE POUR LES POLYÈDRES (*)

(G. Mislin)

Pour les espaces <u>nilpotents</u> on peut exprimer certaines conditions de finitude d'une manière efficace, en utilisant des critères purement homologiques. Nous traiter ici quelques aspects particuliers de cette théorie; les références générales sont [3] et [4].

Soit X un CW-complexe pointé et connexe. On dit que X est <u>dominé</u> par un complexe fini, s'il existe un complexe fini Y et des applications $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ tel que $gf \simeq 1_X$. Si $\tilde{X}$ dénote le revêtement universelle de X, alors le complexe de chaînes singulières $S_*\tilde{X}$ est un complexe de $\mathbb{Z}\pi$-modules libres ($\pi = \pi_1 X$). Dans le cas où X est dominé par un complexe fini, $S_*\tilde{X}$ a le même type d'homotopie qu'un complexe C_* tel que les C_i sont projectifs de type fini sur $\mathbb{Z}\pi$, et $C_i = 0$ pour i suffisamment large; nous disons que C_* est du type FP.

<u>Le groupe des classes projectives</u>.

Soit Λ un anneau avec 1. Pour un Λ-module M (à gauche, unitaire) nous notons [M] pour sa classe d'isomorphisme. Le groupe des classes projectives est défini par

$K_0\Lambda = Gr\langle [P], P$ projectif de type fini sur $\Lambda \mid [P]+[Q]=[P\oplus Q]$ pour toute paire de générateurs$\rangle$

(*) Cet article résume le contenu d'une conférence que l'auteur a prononcé à l'U.A.B. le 19/20. 5.77.

K_0 est un foncteur (sur la catégorie des anneaux avec 1). Un morphisme $\varphi: \Lambda \to \Gamma$ induit $\varphi_*: K_0\Lambda \to K_0\Gamma$ par $[P] \to [\Gamma \otimes_\Lambda P]$.

On définit le groupe des classes projectives réduit par $\tilde{K}_0\Lambda = K_0\Lambda/\langle[\Lambda]\rangle$.

Exemple: Soit $\pi = \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$, p un premier, et $x \in \pi$ un générateur fixe. Soit $D = \mathbb{Z}[\exp(2\pi i/p)]$ et $\varphi: \mathbb{Z}\pi \to D$ induit par $x \to \exp(2\pi i/p)$. D'après un théorème de Rim l'application

$$\varphi_*: \tilde{K}_0\,\mathbb{Z}\pi \to \tilde{K}_0 D$$

est un isomorphisme. D'autre part, comme D est un anneau de Dedekind, on sait (cf.[2]) que $\tilde{K}_0 D \cong C(D)$, le groupe des classes d'idéaux de D. En particulier on a $|C(D)| = h_p = 1$ pour $p < 23$, $h_{23} = 3$, $h_{37} = 37$, etc.

L'obstruction de Wall.

Pour un complexe C_* de type FP sur Λ on définit $w(C_*) = \Sigma(-1)^i[C_i] \in K_0\Lambda$. Il est facile de voir que $w(C_*)$ ne dépend que du type d'homotopie de C_*. En particulier, si X est dominé par un complexe fini, on peut définir $w(X)$, l'obstruction de Wall, par $w(X) = \Sigma(-1)^i[C_i] \in K_0\mathbb{Z}\pi_1X$, où $C_* \simeq S_*\tilde{X}$, avec C_* du type FP. L'élément $w(X) \in K_0\mathbb{Z}\pi_1X$ est l'obstruction de finitude pour X (cf.[5]).

Rappelons qu'un π-module M est dit nilpotent s'il existe un entier k tel que $I^k M = 0$, I l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}\pi$. Un espace X est appellé nilpotent, si les $\pi_1 X$-modules $H_i\tilde{X}$ sont nilpotents pour tout i. Nous allons établir les théorèmes suivants.

Théorème 1. Soit X un espace nilpotent. X est alors dominé par un complexe fini, si H_*X est un groupe abelien type fini.

Théorème 2. Si X est un espace nilpotent dominé par un complexe fini et si $\pi_1 X$ est un groupe infini, $w(X) = 0$.

Nous disons que X est H-fini, si $H_* X$ est un groupe abelien de type fini. Pour établir les théorèmes 1 et 2 nous allons utiliser les propositions suivantes.

Proposition 1. Si X est H-fini et nilpotent, alors, pour tout revêtement $\tilde{X}$ de X, $\tilde{X}$ est H-fini et nilpotent.

Démonstration. Premier cas: $\tilde{X} \to X$ est un revêtement regulier avec groupe $\mathbb{Z}$. Dans ce cas, la suite exacte

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{1-x} \Lambda \to \mathbb{Z} \to 0$$

avec $\Lambda = \mathbb{Z}[x,x^{-1}] \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ donne une injection $\mathbb{Z} \otimes_\Lambda H_n \tilde{X} \to H_n X$ et on conclut que pour n large $H_n\tilde{X} = IH_n\tilde{X}$, avec I l' ideal d'augmentation. Comme X et nilpotent, $H_n\tilde{X}$ est un Λ-module nilpotent et $H_n\tilde{X} = IH_n\tilde{X}$ implique $H_n\tilde{X} = 0$. Il est clair que les groupes $H_i\tilde{X}$ sont de type fini puisque $\pi_i \tilde{X} \cong \pi_i X$ pour $i \geq 2$; alors, $\tilde{X}$ est H-fini. Deuxième cas: $\tilde{X} \to X$ est un revêtement regulier avec groupe $\pi = \mathbb{Z}/p$, p un premier. Si k est un corps de caracteristique $\neq p$, on a $\mathbb{Z} \otimes_\Lambda H_n(\tilde{X};k) = H_n(X;k)$ avec $\Lambda = \mathbb{Z}[\pi]$. Comme $H_n(\tilde{X};k)$ est un Λ-module semisimple et nilpotent, on a $\mathbb{Z} \otimes_\Lambda H_n(\tilde{X};k) = H_n(\tilde{X};k)$, d'où $H_n(\tilde{X};k) = 0$ pour n large. D'autre part, si $k = \mathbb{Z}/p$, l'idéal d'augmentation $I \subset k[\pi]$ est nilpotent et on voit facilement que $\dim H_i(\tilde{X}; \mathbb{Z}/p) \leq$ $\leq p \dim H_i(X; \mathbb{Z}/p)$. On conclut que $\tilde{X}$ est H-fini. Il est alors bien connu que si $G \subset \pi_1 X$ est un sous groupe arbitraire, il existe une série normale

$$G_0 = \pi_1 X \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n = G$$

avec $G_i/G_{i+1} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/p$, p premier. Si X_i dénote le revêtement de X avec $\pi_1 X_i = G_i$, on obtient une factorisation

$$X_n = \widetilde{X} \to X_{n-1} \to \dots \to X_1 \to X_0 = X$$

où $X_i \to X_{i-1}$ est un revêtement du type considéré auparavant.

Alors, par induction, tout revêtement X de X est H-fini.

<u>Proposition 2.</u> Si X es H-fini et nilpotent avec $\pi_1 X$ fini, alors X est dominé par un complexe fini.

On trouve une démonstration dans [3, Lemma 1.5]. Il est maintenant facile de prouver les théorèmes 1 et 2.

<u>Démonstration du théorème 1</u>. Soit $G \subset \pi_1 X$ le sous groupe de torsion et $H = \pi_1 X/G$. On sait que dans ce cas l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(H,1)$ peut être réalisé par une variété differentiable compacte. Le revêtement $\widetilde{X} \to X$ avec $\pi_1 \widetilde{X} = G$ donne une fibration

$$(*) : \widetilde{X} \to X \to K(H,1).$$

Comme $\pi_1 \widetilde{X}$ est fini, il résulte des propositions 1 et 2 que $\widetilde{X}$ est dominé par un complexe fini. D'autre part, $K(H,1)$ est un complexe fini..Un théorème de Lal [1] nous garantit alors que l'espace total X de la fibration (*) est dominé par un complexe fini.

<u>Démonstration du théorème 2</u>. Considérons la fibration (*) de la démonstration du théorème 1. Comme $\pi_1 X$ est fini, $H \neq 1$ et la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(K(H,1))$ est égal a 0 (puisque $K(H,1)$ puet être fibré en cercles). Une formule de Lal [1] nous permet de calculer $w(X)$ par

$$w(X) = (j_* w(\widetilde{X})) \cdot \chi\ (K(H,1))$$

où j_* est l'application induite par $\widetilde{X} \to X$. Il resulte que $w(X) = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.J. Lal, Wall obstruction for a fibration. Inv. Math. 6(1968), 67-77.

[2] J. Milnor, Introduction to Algebraic K-Theory. Princeton University Press, 1971.

[3] G. Mislin, Wall's obstruction for nilpotent spaces. Topology, 14 (1975), 311-317.

[4] G. Mislin, Finitely dominated nilpotent spaces. Ann. of Math. 103 (1976), 547-556.

[5] C.T.C. Wall, Finiteness conditions for CW-complexes, Ann of Math. 81(1965), 56-69.