Publ. Mat. U.A.B.
nº 6 des. 1977

VARIETATS COMPLEXES

Per J. Girbau

Introducció.- Aquestes notes constitueixen el contingut d'una conferència donada a la U.A.B. el 7.12.76, dirigida als estudiants dels darrers cursos de llicenciatura i que tenia per objecte interessar-los en aquest tema. Era doncs una conferència de propaganda.

§1.- Generalitats sobre varietats complexes i quasi-complexes.

La teoría de varietats complexes està lligada íntimament a la teoria de funcions analítiques per un costat i a la geometria algebraica per un altre. El concepte de varietat complexe va ser definit rigurosament per primera vegada (en dimensió 2) en el llibre de H. Weyl "Idee der Riemannschen Fläche" (Göttingen, 1913).

Una varietat complexa M és un espai paracompacte, Hausdorff, dotat d'un atlas complex, és a dir, modelat a $\mathbb{C}^n$, els canvis de coordenades del qual es fan per transformacions holomorfes. $\mathbb{C}^n$ i l'espai projectiu $P_n(\mathbb{C})$ en constitueixen els primers exemples. Es poden definir els conceptes d'aplicació holomorfa entre dues varietats complexes i de subvarietat complexa d'una varietat complexa de manera anàloga a com són definits aquests conceptes en les varietats diferenciables, substituint, però, la paraula "diferenciable" per la paraula "holomorfa". Les varietats algebraiques sense singularitats són subvarietats complexes de $P_n(\mathbb{C})$. Chow va demostrar [6] que tota subvarietat complexa compacta de $P_n(\mathbb{C})$ és algebraica, és a dir, pot venir donada com el conjunt de punts de $P_n(\mathbb{C})$ que anul.len simultàniament un nombre finit de polinomis homogenis. Hom pot trobar una demostració simple d'aquest teorema en el llibre de Gunning i Rossi [14].

No es poden considerar exemples de subvarietats complexes de $\mathbb{C}^n$ ja que és fàcil de provar que una tal subvarietat es redueix necessàriament a un punt.

Si M és una varietat complexa de dimensió n definida per un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ i f és l'aplicació

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{2n}$$

$$(z^1 \ldots z^n) \longrightarrow (x^1 \ldots x^n, y^1 \ldots y^n)$$

on $z^i = x^i + \sqrt{-1}\; y^i$, l'atlas $\{(U_i, f \circ \varphi_i)\}$ dota M d'una estructura diferenciable real de dimensió 2n que es diu varietat real subjacent. Es demostra fàcilment que aquesta varietat és sempre orientable.

En cada punt x de M designarem per $T_x(M)$ l'espai tangent a la varietat real subjacent. Es defineix l'endomorfisme J_x de $T_x(M)$ posant:

$$J_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_x \quad , \quad J_x\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_x = -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x .$$

Utilitzant que els canvis de coordenades són holomorfs es demostra fàcilment que l'endomorfisme J_x no depèn del sistema de coordenades elegit per definir-lo.

J s'estèn per complexificació a l'espai ${}^{c}T_x(M)$, complexificat de $T_x(M)$. Els vectors

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\;\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\;\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

són vectors propis de J de valor propi $\sqrt{-1}$ i $-\sqrt{-1}$ respectivament.

Designant per $T_x^{(1,0)}$ el subespai de ${}^cT_x(M)$ dels vectors propis de J de valor propi $\sqrt{-1}$ i per $T_x^{(0,1)}$ el seu conjugat es té la descomposició:

$${}^cT_x(M) = T_x^{(1,0)} \oplus T_x^{(0,1)}$$

que condueix a la noció de "tipus" d'un tensor o d'una forma diferencial, que ara definirem. Donats dos enters $p,q \geq 0$, designarem per $T_x^{(p,q)}$ el subespai de ${}^cT_x{}^r(M)$, $r = p+q$, format per $(\otimes^p T_x^{(1,0)}) \otimes (\otimes^q T_x^{(0,1)})$. Un r-camp tensorial contravariant de tipus (p,q) consisteix en asignar a cada x un element de $T_x^{(p,q)}$ depenent diferenciablement del punt x. Anàlogament es defineix la noció de forma diferencial de tipus (p,q).

La diferencial exterior d es descomposa llavors de manera natural en $d' + d''$, essent d' un operador que passa de formes de tipus (p,q) a formes de tipus $(p+1,q)$ i d'' un operador que passa de formes de tipus (p,q) a formes de tipus $(p,q+1)$.

Moltes de les propietats de les varietats complexes depenen només de l'operador J i no de l'existència d'un atlas analític complex. Per aquesta raó ha sorgit el concepte de varietat quasi-complexa. S'anomena així tota varietat diferenciable real M, dotada d'un camp tensorial J, una vegada contravariant i una vegada covariant, que en cada punt x de M és un endomorfisme J_x de $T_x(M)$ tal que $J^2 = -$identitat. Les varietats complexes són doncs, en particular, quasi-complexes.

§ 2.- Quan una varietat quasi-complexa és la varietat real subjacent d'una varietat complexa?

Aquest problema va ser abordat per primera vegada per Eckmann i Frölicher [8] i posteriorment per Newlander i Nirenberg [20]. Es redueix en el fons a un problema d'integració.

Donar l'endomorfisme J equival a donar en cada punt x el subespai $T_x^{(1,0)}$ de ${}^{\mathbb{C}}T_x(M)$, que és equivalent a donar localment n formes diferencials $\{ \theta^i \}_{i=1\ldots n}$ de manera que en cada punt constitueixin una base de $(T_x^{(1,0)})^*$. El problema es pot plantejar doncs de la següent manera: Quan existiran funcions diferenciables z^i, a valors complexos, tals que $\theta^i = dz^i$?.

Les diferencials $d\theta^i$ s'expressaran:

$$d\theta^i = \frac{1}{2} \Sigma \; A^i_{jk} \, \theta^j \wedge \theta^k + \Sigma \, B^i_{jk} \, \theta^j \wedge \overline{\theta^k} + \frac{1}{2} \Sigma \, C^i_{jk} \, \overline{\theta^j} \wedge \overline{\theta^k}$$

expressió única si suposem els coeficients A i C antisimètrics en els índexs j,k. La condició de què tots els coeficients C siguin nuls és invariant per canvi de coordenades i és equivalent a la condició de què el tensor següent, dit tensor de torsió de l'estructura complexa, sigui nul:

$$N(X,Y) = 2\,[JX, JY] - 2[X, Y] - J\,[X, JY] - J\,[JX, Y].$$

Evidentment quan $\theta^i = dz^i$ es té $d\theta^i = 0$ i per tant tots els coeficients C són nuls i per tant N és nul. Aquest tensor va ser introduït per Eckmann i Frölicher en el treball que hem mencionat. Aquests autors van demostrar, usant essencialment el teorema de Frobenius, que si la varietat M és analítica real, l'annul.lació del tensor N implica l'existència de funcions z^i tals que $\theta^i = dz^i$. El mateix resultat quan la varietat M és C^∞ va ser obtingut per Newlander i Nirenberg en l'article esmentat més amunt. Una altra demostració del mateix resultat, basada en la resolució de l'anomenat d"-problema de Neumann, va ser donada per J.J. Kohn el 1963 [19].

Del què hem dit es desprèn que el problema de saber si una estructura quasi-complexa donada prové o no d'una estructura complexa està totalment resolt. Basta comprovar si el tensor N s'anul.la o no. Però, donada una varietat quasi-complexa amb tensor de torsió no nul no hi ha manera de decidir, en la majoria dels casos, si existeix o no una altra estructura quasi-complexa integrable (és a dir amb N nul). Per exemple, S^6 pot dotar-se d'una estructura quasi-complexa no integrable de manera natural (vegeu [17] Tom. II pàg. 139), però fins fa ben poc no es sabia si admetia o no una estructura complexa. Recentment A. Alder ha resolt aquesta qüestió de manera negativa [1]. A. van de Ven ha donat altres exemples de varietats quasi-complexes compactes que no admeten cap estructura complexa [22].

§3.- Classes de Chern.

El problema d'existència de k camps vectorials continus, $X_1 \ldots X_k$, sobre una varietat diferenciable, de tal manera que en cada punt siguin linealment independents, va donar lloc als voltants de l'any 1940 al concepte de classes característiques de Stiefel-Whitney, que són unes classes de cohomologia que mesuren d'alguna manera l'obstrucció a l'existència d'uns tals camps. El problema anàleg per les varietats complexes va ser abordat per Chern el 1946 [4].

Sigui M una varietat complexa de dimensió n. Un camp vectorial complex consisteix per definició en assignar a cada x de M un vector X_x de ${}^cT_x(M)$. Donat un enter k, $0 < k \leq n$, preguntem-nos per l'existència de k camps vectorials continus sobre M, $X_1 \dots X_k$, de tal manera que en cada punt siguin independents. Sigui E el conjunt de totes les k-ples, $(v_1 \dots v_k)$, on els v_i són vectors tangents complexos en un punt qualsevol x de M, linealment independents. E constitueix, amb la projecció canònica natural $E \xrightarrow{\pi} M$, un fibrat de fibra F la varietat de Stiefel complexa $V_{n,k}$ formada pel conjunt de k-ples $(v_1 \dots v_k)$ on els v_i són vectors independents de $\mathbb{C}^n$.

Preguntar-se sobre l'existència de k camps continus $X_1 \dots X_k$ independents en cada punt equival a preguntar-se sobre l'existència d'una secció continua del fibrat E. En l'estudi de l'existència de seccions d'aquest fibrat, els grups d'homotopia de la fibra jugaran un paper important, com veurem.

Ehresmann a l'any 1939 [10] ja havia vist que els primers grups d'homotopia de la varietat de Stiefel $V_{n,k}$ eren:

$$\pi_i\,(V_{n,k}) = 0 \qquad \text{si} \quad i < 2n - 2k + 1$$

$$\pi_i\,(V_{n,k}) = Z \qquad \text{si} \quad i = 2n - 2k + 1$$

Anem a veure com juguen aquests grups d'homotopia en l'existència de seccions del fibrat E. Agafem una triangulació regular de la varietat M, suficientment fina perquè cada símplex estigui contingut en un obert U tal que E sigui trivial sobre U. Designem per K el complex simplicial així obtingut. Per ser M una varie tat orientable, podem considerar K orientat. Designem per K^i l'esquelet de dimensió i del complex K. L'esquelet K^o estarà constituït per punts aïllats. Per tant sobre l'esquelet K^o podrem definir una secció arbitrària de E fent correspondre a cada x de K^o una k-pla arbitrària $(X_1)_x \dots (X_k)_x$ de vectors de ${}^cT_x(M)$ linealment independents. Intentem estendre aquesta secció a K^1. Per cada símplex σ de K^1 tenim definida la secció a $\partial\sigma$. σ està contingut en una carta local en la qual el fibrat és trivial. Escollida una trivialització en cada una d'aquestes cartes locals, donar una secció continua sobre σ equival a donar una aplicació continua de σ a la fibra standard $V_{n,k}$. La secció que tenim en K^o ens determina una aplicació de $\partial\sigma$ a $V_{n,k}$ que volem estendre ara a una funció continua de σ a $V_{n,k}$. Això és possible ja que $V_{n,k}$ és connex Per tant ja tenim estesa la secció a K^1. Intentem estendre-la a K^2. Per cada σ de K^2 la secció que tenim a K^1 ens dóna una aplicació de $\partial\sigma$ a la fibra $V_{n,k}$. Com que $\partial\sigma$ és S^1. aquesta aplicació dóna un element de $\pi_1(V_{n,k})$. Si suposem que n i k són tals que $2n-2k+1>1$. $\pi_1(V_{n,k})=0$. Llavors l'aplicació de $\partial\sigma$ a $V_{n,k}$ es pot estendre (per un resultat elemental de teoria de l'homotopia) a una aplicació de σ a $V_{n,k}$. Aquesta aplicació, per cada σ, ens dóna lloc a una secció del fibrat E sobre K^2. Tractem d'aplicar el mateix procediment per estendre-la a K^3. Això ens serà possible si $\pi_2(V_{n,k})=0$. De la mateixa manera si $\pi_3(V_{n,k})=0$ la podrem estendre a K^4, etc.. Com que $\pi_i(V_{n,k})=0$ si $i<2n-2k+1$, resulta que podem estendre aquesta secció sense cap dificultat fins a $K^{2n-2k+1}$. Per cada símplex σ de $K^{2n-2k+2}$ la secció que tenim definida a $K^{2n-2k+1}$ donarà lloc a una aplicació de $\partial\sigma$ a $V_{n,k}$ la qual donarà lloc a un element de $\pi_{2n-2k+1}(V_{n,k})=Z$. Per tant associem a cada símplex σ de

$K^{2n-2k+2}$ un número enter. Això és una $(2n-2k+2)$-co-cadena. Es demostra fàcilment que aquesta co-cadena és un co-cicle el qual dóna lloc a un element de $H^{2n-2k+2}(M,Z)$. Es demostra fàcilment que condició necessària i suficient perquè la secció es pugui perllongar a $K^{2n-2k+2}$ és que aquest element de $H^{2n-2k+2}(M,Z)$ sigui nul. Es a dir, aquesta classe de cohomologia entera mesura l'obstrucció a què la secció es pugui perllongar a l'esquelet de dimensió $2n-2k+2$.

Per cada k, aquestes classes de cohomologia entera s'anomenen classes de Chern de la varietat M.

La inclusió natural $Z \xrightarrow{i} \mathbb{R}$ dóna lloc a un morfisme $H^p(M,Z) \longrightarrow H^p(M,\mathbb{R})$ per cada p. Les classes de Chern, mitjançant el morfisme anterior, donen lloc a elements de $H^{2n-2k+2}(M,\mathbb{R})$. Com que en geometria diferencial és més còmode treballar amb la cohomologia de De Rham que amb cohomologia simplicial, podem proposar-nos el problema de trobar per cada k una $(2n-2k+2)$-forma diferencial tancada, la classe de cohomologia de la qual sigui la classe de Chern. Aquest problema es resolt utilitzant una mètrica hermítica qualsevol h sobre M (vegeu el paràgraf següent). La mètrica h dóna lloc a una mètrica de Riemann a la varietat real subjacent. Sigui $(\Omega_{i,j})$ la matriu de curvatura d'aquesta mètrica de Riemann en una carta local. Llavors la $2(n-k+1)$-forma definida en cada carta local per la següent expressió

$$\Psi_k = (1/(2\pi\sqrt{-1})^{n-k+1}\ (n-k+1)!)\ \Sigma\varepsilon(i_1 \ldots i_{n-k+1}, j_1 \ldots j_{n-k+1})$$

$$\Omega_{i_1 j_1} \ldots \Omega_{i_{n-k+1},\, j_{n-k+1}}$$

és tancada i es pot demostrar que la seva classe de cohomologia és precisament la k-èssima classe de Chern tal com l'hem definida abans. Això permet definir les classes de Chern mitjançant la curvatura de la connexió associada a una mètrica hermítica.

Les classes de Chern, que s'han generalitzat després a fibrats vectorials complexos qualssevol sobre una varietat diferenciable, han jugat un paper molt important en l'estudi de la topologia de les varietats complexes.

§ 4.- Mètriques hermítiques i mètriques kählerianes.

Sigui M una varietat complexa. Donar una mètrica hermítica h sobre M consisteix per definició en assignar a cada x de M una mètrica hermítica definida positiva, h_x , sobre el $\mathbb{C}$-espai vectorial $T_x^{(1,0)}$, de manera que h_x depengui diferencialment del punt x.

Utilitzant un argument de particions de la unitat es veu de manera immediata que és possible donar una mètrica hermítica sobre una varietat complexa paracompacta.

Les mètriques hermítiques en una varietat complexa donen lloc a mètriques de Riemann a la varietat real subjacent, com direm a continuació.

Sigui h una mètrica hermítica. En una carta local complexa $(U, z^1 \ldots z^n)$ definim la mètrica de Riemann g associada a h de la següent manera:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 2\mathrm{Re}\, h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right)$$

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = 2\,\mathrm{Im}\, h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right)$$

Aquesta mètrica riemanniana així definida verifica la propietat següent:

$$g(X,Y) = g(JX,JY) \quad \text{per qualssevol } X,Y.$$

Recíprocament es pot veure que donada una mètrica de Riemann g a la varietat real subjacent, verificant la propietat anterior, prové d'una mètrica hermítica h pel procediment esmentat. Si una tal mètrica de Riemann s'estén, en cada punt, de l'espai tangent real $T_x(M)$ a ${}^cT_x(M)$, la condició $g(X,Y) = g(JX,JY)$ implica

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right) = 0, \quad g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = 0 .$$

Per tant en una carta local $(U, z^1 \dots z^n)$ una tal mètrica només tindrà termes $g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)$ no nuls (que escriurem $g_{i\bar{j}}$). La 2-forma diferencial complexa F definida localment per

$$F = \sqrt{-1} \;\; g_{i\bar{j}} \;\; dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

es diu forma de Kähler associada a la mètrica hermítica. Una mètrica hermítica es diu kähleriana si la seva forma de Kähler és tancada. Aquestes mètriques van ésser introduïdes per Kähler l'any 1933 [15]. Una varietat complexa amb una mètrica kähleriana es diu una varietat kähleriana.

Així com en una varietat complexa paracompacta sempre hi ha una mètrica hermítica, el problema d'existencia de mètriques kählerianes és molt més seriós. Segons un treball de Gromov del 1969 [12], les varietats complexes no compactes admeten sempre mètriques kählerianes. En canvi la situació és molt diferent per les varietats compactes. D'aquest problema en parlarem més endavant. Anem ara a esmentar els exemples més interessants de varietats kählerianes.

Fubini va introduir el 1903 [11] una mètrica hermítica sobre l'espai projectiu complex $P_n(\mathbb{C})$ de la següent manera. Siguin $(z^0,\dots,z^n)$ coordenades homogènies a $P_n(\mathbb{C})$. Sigui U_0 l'obert donat per $z^0 \neq 0$. Anàlogament es defineixen $U_1 \dots U_n$. Prenem a U_0 les coordenades $(t^1 \dots t^n)$ amb $t^i = \dfrac{z^i}{z^0}$. Considerem a U_0 la mètrica

$$ds^2 = \frac{(1+\Sigma t^i \bar{t}^i)(\Sigma dt^i d\bar{t}^i) - (\Sigma \bar{t}^i dt^i)(\Sigma t^i d\bar{t}^i)}{(1+\Sigma t^i \bar{t}^i)^2}$$

Anàlogament es defineix sobre $U_1 \dots U_n$. Es prova fàcilment que aquesta mètrica és definida positiva i que la seva forma de Kähler és

$$F = \sqrt{-1}\left\{\frac{\Sigma dt^i \wedge d\bar{t}^i}{1+\Sigma t^i \bar{t}^i} - \frac{(\Sigma \bar{t}^i dt^i)\wedge(\Sigma t^i d\bar{t}^i)}{(1+\Sigma t^i \bar{t}^i)^2}\right\} =$$

$$= \sqrt{-1}\; d' d'' \log(1+\Sigma t^i \bar{t}^i),$$

que és evidentment tancada. Per tant és una mètrica kähleriana. Així doncs $P_n(\mathbb{C})$ amb la mètrica de Fubini és una varietat kähleriana. De la definició de mètrica kähleriana es desprèn que si g és una tal mètrica sobre una varietat complexa M i M' és una subvarietat complexa de M, la restricció de g a M' és una mètrica kähleriana sobre M'. Es dedueix d'aquí que qualsevol subvarietat complexa de $P_n(\mathbb{C})$ és una varietat kähleriana. Per tant totes les varietats algebraiques sense singularitats són Kählerianes.

La mètrica usual de $\mathbb{C}^n$, $ds^2 = \Sigma\, dz^i\, d\bar{z}^i$, és kähleriana ja que la seva forma de Kähler és $F = \sqrt{-1}\ \Sigma\, dz^i \wedge d\bar{z}^i$. Per tant $\mathbb{C}^n$ és una varietat kähleriana.

Un tor complex $T_n = \mathbb{C}^n/\Gamma$, essent Γ un subgrup discret de $\mathbb{C}^n$ de rang 2n, amb la mètrica induïda per la mètrica usual de $\mathbb{C}^n$, és evident una varietat kähleriana.

Eckmann i Guggenheimer van descubrir l'any 1949[7],[9], que si una varietat complexa compacta M admet una mètrica kähleriana, els seus números de Betti $b_i(M)$ tenen que verificar les següents condicions:

(a) Si $i = 2r$, $b_i(M) \neq 0$.

(b) Si $i = 2r+1$, $b_i(M)$ té que ser parell.

(c) $b_i(M) \leq b_{i+2}(M)$ si $i < n$, essent n la dimensió complexa de M.

(d) $b_i(M) = b_{2n-i}(M)$ (Poincaré).

Aquest coneixement dels números de Betti de les varietats kählerianes compactes va permetre de donar exemples de varietats complexes compactes no kählerianes i en particular no algebraiques. Calabi i Eckmann [3], basant-se en un treball anterior de Hopf, van introduir el 1953 una estructura complexa a $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$. Com que $b_2(S^{2p+1} \times S^{2q+1}) = 0$, aquesta varietat no pot admetre cap mètrica kähleriana ja que contradiria la condició(a) esmentada anteriorment.

El problema de determinar les condicions necessàries i suficients perquè una varietat complexa compacta M admeti una mètrica kähleriana no ha sigut mai abordat de manera general. El què s'ha fet, però, és tractar de resoldre aquest problema per les varietats que són fibrats analítics complexos sobre varietats complexes. (L'exemple de Calabi-Eckmann, $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$, és un fibrat sobre $P_p(\mathbb{C}) \times P_q(\mathbb{C})$ amb fibra $S^1 \times S^1$). Resultats excelents en aquesta direcció van ser obtinguts per Kodaira [18], Blanchard [2] i Kobayashi [16].

§ 5.- Varietats algebraiques i mètriques de Hodge.

Sigui M una varietat complexa. Una classe de cohomologia de $H^p(M,\mathbb{C})$ direm que és entera si pertany a la imatge del morfisme $H^p(M,Z) \to H^p(M,\mathbb{C})$ induït per la inclusió natural $Z \xrightarrow{i} \mathbb{C}$. Això és equivalent a dir que la integral d'aquesta classe sobre qualsevol p-cicle enter és un número enter. Les classes de Chern són classes enteres, per exemple.

Suposem que M admet una mètrica kähleriana g. Això vol dir que la seva forma de Kähler F és tancada. Dóna lloc per tant a una classe de cohomologia de $H^2(M,\mathbb{C})$. Si aquesta classe és entera hom diu que la mètrica g és de Hodge. Una varietat complexa dotada d'una mètrica de Hodge es diu varietat de Hodge.

La mètrica de Fubini del projectiu $P_n(\mathbb{C})$ és de Hodge ja que es pot demostrar que la classe de cohomologia de la seva forma de Kähler és precissament la classe Chern d'un fibrat de linia sobre $P_n(\mathbb{C})$ i per tant és una classe de cohomologia entera. De la definició de mètrica de Hodge es desprèn que si M' és una subvarietat complexa de M i si g és una mètrica de Hodge sobre M, la restricció de g a M' és de Hodge. Per tant les varietats algebraiques sense singularitats (que són subvarietats complexes de $P_n(\mathbb{C})$) són varietats de Hodge. Kodaira va demostrar el 1953 [17] el recíproc del resultat anterior: Tota varietat de Hodge compacta és algebraica. Després d'aquest important resultat hi ha equivalència doncs entre les varietats de Hodge compac tes i les varietats algebraiques sense singularitats. Això ha permès tractar molts problemes referents a les varietats algebraiques sense singularitats per mètodes de geometria diferencial. Per exmple, el teorema de Riemann-Roch referent a les corbes algebraiques va poder ser estès a les varietats algebraiques de dimensió superior per Hirzebruch [13] utilitzant aquests mètodes i posteriorment per Patodi [21] a les varietats kählerianes compactes.

Per acabar, donem un exemple concret d'aplicació del teorema esmentat de Kodaira d'equivalència entre les varietats de Hodge i les algebraiques.

Considerem un tor complex $T_n = \mathbb{C}^n/\Gamma$. Utilitzant només la definició de mètrica de Hodge es poden donar fàcilment (vegeu[5] pàg 61-64) les relacions precises que tenen que verificar els generadors de Γ perquè T_n admeti una mètrica de Hodge. Es veu llavors que segons quin subgrup Γ es prengui de $\mathbb{C}^n$, el tor T_n admet o no una mètrica de Hodge i per tant és o no una varietat algebraica.

Bibliografia citada en el text.

[1] Alder "The second fundamental form on S^6 and $P_n(\mathbb{C})$". Amer. J. Math. 91 (1969) 657-670.

[2] Blanchard "Sur les variétés analytiques complexes". Ann. Sc. Norm. Sup. 73 (1956) 157-202.

[3] Calabi-Eckmann "A class of complex manifolds which are not algebraic". Ann. of Math. 58 (1953) 494-500.

[4] Chern "Characteristic classes of Hermitian manifolds". Ann. of Math. 47 (1946) 85-121.

[5] Chern Complex manifolds without potential theory. Van Nostrand Reinhold, 1967.

[6] Chow "On complex compact analytic varieties". Amer. Math. J. 71(1949) 893-912.

[7] Eckmann "Quelques propiétés globales des variétés kähleriennes". Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 229 (1949) 577-579.

[8] Eckmann-Frölicher "Sur l'intégrabilité des structures presque complexes". Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 232(1951) 2284-2286.

[9] Eckmann-Guggenheimer "Formes différentielles et métrique hermitienne sans torsion". Comptes Rendus 229 (1949) 464-466, 489-491.

"Sur les variétés closes à métrique hermitienne sans torsion". Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 229 (1949) 503-505.

[10] Ehresmann "Sur la topologie des groupes simples clos". Comptes Rendus Ac. Sc. Paris. 208 (1939) 1263-1265.

[11] Fubini "Sulle metrische definite da una forma hermitiana". Atti Inst. Veneto, 6(1903) 501-513.

[12] Gromov "Stable mappings of foliations into manifolds". Math. U.S.S.R. Izvestia, 3 (1969) 671-699.

[13] Hirzebruch Neue topologische Methoden in algebraichen Geometrie. Springer-Verlag(Ergebnisse d. Math,9) 1956.

[14] Gunning-Rossi Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall, 1965.

[15] Kähler "Über eine bermerkenswerte Hermitische Metrik" Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 9(1933) 173-186.

[16] Kobayashi "On the automorfism group of a certain class of algebraic manifolds". Tôhoku Math. J. 11 (1959).

[17] Kobayashi-Nomizu Foundations of differential geometry. Tome 2, Interscience Publishers, 1969.

[18] Kodaira "On Kähler varieties of restricted type" Ann. of Math. 60 (1954) 28-48.

[19] Kohn "Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds" Ann. of Math. 78 (1963) 112-148; 79 (1964) 450-472.

[20] Newlander-Nirenberg "Complex coordinates in almost complex manifolds". Ann. of Math. 65(1957) 391-404.

[21] Patodi "An analytic proof of Riemann-Roch-Hirzebruch theorem for Kaehler manifolds". J. of Diff. Geom. 5(1971) 251-283.

[22] Van de Ven "On Chern numbers of certain complex and almost complex manifolds". Proc. Nat. Ac. Sc. USA, 55(1966) 1624-1627.

Llibres on es pot trobar una exposició ordenada i detallada dels principals conceptes i resultats que hem relatat.

A més de [5] i [17] recomanem:

Morrow-Kodaira Complex manifolds. Holt Reinhart and Winston, Inc. 1971.

Wells Differential analysis on complex manifolds. Prentice-Hall, 1976.