Publ. Mat. U.A.B.
nº 6 des. 1977

ECUACIONES INTEGRALES

J. Ortega.

La primera dificultad que encontramos al tratar con ecuaciones integrales es su propia definición. Suele decirse que una ecuación integral es una ecuación en que una función incógnita aparece bajo un signo integral. Inmediatamente observamos que se trata de una definición excesivamente vaga, imprecisa. Si queremos precisarla explicitando el tipo de operaciones que intervienen en la ecuación integral se observan dificultades; basta señalar un ejemplo. La ecuación con incógnita u

$$\lim_{h \to 0} \int_{x}^{x+h} \frac{u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)}{h^3}\, dt = f(x)$$

lleva, mediante el cálculo del límite, a la ecuación $u''(x)=f(x)$ que es una ecuación diferencial. Si excluimos el paso al límite en las ecuaciones integrales no incluiríamos en las mismas las ecuaciones singulares que tradicionalmente se han considerado como tales.

De hecho no parece posible dar una definición única de ecuaciones integrales sino que lo que si puede hacerse es sistematizar diferentes tipos de ecuaciones integrales. No podemos pretender ahora dar ni siquiera una panorámica de diferentes tipos de ecuaciones integrales; vamos a tratar tan sólo de dar unas pinceladas sobre el inicio de la sistematización del estudio de las ecuaciones integrales, señalar algún tipo particular de las mismas y dar un ligero esbozo sobre su importancia en el desarrollo de amplios campos de la Matemática.

Con anterioridad a los intentos de sistematización de algún tipo de ecuaciones integrales aparecen ecuaciones integrales concretas relacionadas casi siempre con problemas de la técnica o de la física en general.

Así, Laplace en 1782 considera la ecuacifn integral con incógnita $u(x)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} \, u(t)dt$$

Fourier en sus trabajos sobre la ecuación del calor en 1811 encuentra la ecuación

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \cos(xt) \, u(t)dt$$

y la fórmula de inversión

$$u(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \cos(xt) \, f(x)dx \, .$$

Abel en 1823 considera el siguiente problema. Un punto material bajo la acción de la fuerza de la gravedad se mueve en un plano vertical a lo largo de una curva partiendo del reposo en un punto O. Conocido el tiempo de caída desde O a P en función de la abscisa x de este último se trata de hallar la longitud del arco de curva OP en función de x. Llega a una ecuación del tipo:

$$f(x) = \int_{0}^{x} \frac{u(t)}{(x-t)^{1/2}} \, dt$$

que le conduce a estudiar ecuaciones del tipo:

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(t)}{(u-t)^{\alpha}}\, dt \qquad (0<\alpha<1)$$

para las que da su solución:

$$u(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\pi} \quad \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}}\, dx .$$

Liouville en 1832 muestra cómo algunos tipos de ecuaciones diferenciales se pueden resolver mediante ecuaciones integrales. Así, considera ecuaciones diferenciales del tipo:

$$u''(x) + (\rho^2 - \sigma(x))\, u(x) = 0$$

con las condiciones iniciales $u(a) = 1$, $u'(a) = 0$, y prueba que u debe satisfacer a una ecuación integral del tipo:

$$u(x) - \frac{1}{\rho} \int_a^x \sigma(y) \operatorname{sen} \rho(x-y)\, u(y) dy = \cos \rho(x-a).$$

Los parámetros en las ecuaciones diferenciales ordinarias provenían en general de los métodos de separación de variables aplicadas a ecuaciones en derivadas parciales.

Liouville obtuvo la solución por un método de aproximaciones sucesivas, método atribuido a Carl Neumann(1877) en muchas ocasiones y que este último utilizó para resolver la ecuación del potencial $\Delta u = 0$ en una superficie plana acotada por una curva C sobre la que se conocen los valores de u. Lo hizo reduciendo el problema a la resolución de una ecuación del tipo:

$$f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_C \rho(t) \log \frac{1}{r(t;x,y)} dt; \qquad s = (x,y),$$

donde $r(t;x,y)$ es la distancia del punto (x,y) interior o frontera del recinto al punto de la frontera correspondiente al parámetro t y $f(s)$ es el valor de u sobre el contorno en función del parámetro arco s. O bien, alternativamente a la ecuación:

$$f(s)=\frac{1}{2} \phi(s) + \frac{1}{2\pi} \int_C \phi(t) \frac{\partial}{\partial n} (\log \frac{1}{r(t;x,y)} dt$$

que son ecuaciones del tipo de las de Abel y las de Liouville respectivamente, es decir, ecuaciones del tipo:

$$f(x) = \int_a^b K(x,y)\ u(y)\ dy$$

o bien

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)\ u(y)\ dy$$

que más tarde se llamarán ecuaciones de Fredholm de 1ª y de 2ª especie.

Tenemos entonces que las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales concretas mediante ecuaciones integrales impulsaron en gran medida el dasarrollo de estas últimas y continuan hoy día siendo técnicas básicas en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Un punto importante en el desarrollo de las ecuaciones integrales es el trabajo de Volterra(1896) que considera ecuaciones de 2ª especie:

$$f(x) = u(x) + \int_a^x K(x,y)\ u(y)\ dy$$

que es un caso particular de los anteriores en que $K(x,y) = 0$ para $y > x$, K y f continuas.

Volterra prueba que la solución existe y es única en el intervalo $[a,b]$. Su método, análogo a los de Liouville y Carl Neumann es por aproximaciones sucesivas:

$$f_1(x) = - \int_a^b K(x,y)\ f(y)\ dy$$

. . . .

$$f_n(x) = - \int_a^b K(x,y)\ f_{n-1}(y)\ dy$$

. . . .

Volterra probó la convergencia uniforme de la serie $u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, serie de Neumann suele llamarse, que, por sustitución, se comprueba es solución de la misma. También Volterra resolvió la ecuación de primera especie $f(x) = \int_a^x K(x,y)\ u(y)\ dy$ reduciendola al primer caso. Hemos ya apuntado que Liouville y Carl Neumann habían estudiado tipos particulares de ecuaciones de $2^{\underline{a}}$ especie con parámetro λ:

$$f(x) = u(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\ u(y)\ dy$$

sin la restricción sobre $K(x,y)$ de Volterra. Su solución, expresada en serie de potencias en λ es ahora convergente para valores de λ suficientemente pequeños.

Fredholm, 1900, investigó estas ecuaciones pero para todo posible valor de λ. Esto y su método son sus principales aportaciones.

Vamos a decir unas palabras sobre el método de Fredholm para resolver la ecuación integral:

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\, u(y)\, dy = f(x) \quad \text{con } K \text{ y } f \text{ continuas.}$$

Fredholm sustituye la integral por una suma:

$$\sum_{j=1}^{n} K(x,y_j)\, u(y_j) h \qquad \left(h = \frac{b-a}{n}\ ,\quad y_j = a + jh\right)$$

y la ecuación integral por un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas $u_j = u(y_j)$

$$u_i - \lambda\, h \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\, u_j = f_i \qquad i = 1,\ldots,n$$

con $K_{ij} = K(y_i,y_j)$, $\quad f_i = f(y_i)$.

El determinante del sistema puede ser desarrollado así:

$$1-\lambda h \sum_i K_{ii} + \frac{\lambda^2 h^2}{2!} \sum_{i,j} \begin{vmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^n \frac{\lambda^n h^n}{n!}$$

$$\sum_{i_1 \ldots i_n} \begin{vmatrix} K_{i_1 i_1} & \ldots & K_{i_1 i_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{i_n i_1} & \ldots & K_{i_n i_n} \end{vmatrix}$$

El sistema admite entonces solución única con la excepción a lo sumo de un número de valores de λ y las soluciones pueden calcularse en la forma conocida.

Fredholm pasa de una manera puramente formal al límite cuando $n \to \infty$ con lo que obtiene unas expresiones que comprueba tienen sentido y que dan la solución de la ecuación integral de 2ª especie. Así, si escribimos

$$K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_n \\ y_1 y_2 \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1\ y_1) \dots K(x_1\ y_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ K(x_n, y_1) \dots K(x_n, y_n) \end{vmatrix} ,$$

el límite formal del determinante es la suma de la serie entera convergente para todo λ:

$$\delta_\lambda = 1 - \lambda \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} dx_1 + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 + \dots$$

A esta función se le llama determinante de Fredholm.

El numerador de la fórmula clásica de las soluciones del sistema lineal finito por un paso al límite formal lleva a la serie:

$$\delta_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\ K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda^2 \int_a^b K\begin{pmatrix} x\ x_1 \\ y\ x_1 \end{pmatrix} dx_1 + \frac{\lambda^3}{2!} \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} x\, x_1\, x_2 \\ y\, x_1\, x_2 \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \dots$$

que es convergente y cuya suma se llama menor del determinante de Fredholm.

Si $\delta_\lambda \neq 0$ Fredholm obtiene que la solución de la ecuación es única y viene dada por:

$$u(x,\lambda) = f(x) + \int_a^b \frac{\delta_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\delta_\lambda} f(y)\, dy$$

Si λ_I es una raíz de δ_λ entonces la ecuación homogénea

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\ u(y)\ dy$$

tiene un número finito de soluciones linealmente independientes, número que no excede a la multiplicidad del cero de δ_λ.

Las raíces de δ_λ se llaman los valores característicos de K y a su conjunto espectro, y las soluciones de la ecuación homogénea para cada λ_i se llaman funciones características o valores propios.

Fredholm establece la siguiente alternativa: o bien para un λ la ecuación homogénea no tiene otra solución que $u = 0$ en cuyo caso la ecuación no homogénea tien siempre solución o si la homogénea tiene n soluciones independientes entonces la ecuación con núcleo traspuesto

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(y,x)\ u(y)\ dy$$

también tiene n soluciones $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ independientes y la primera es resoluble si y sólo si $\int_a^b f(x)\ \varphi_i(x)\ dx = 0$.

Se tiene entonces una situación análoga a la de los sistemas lineales en espacios de dimensión finita, un teorema de unicidad implica uno de existencia y éste es el punto esencial de la solución de Fredholm al problema de Dirichlet. La unicidad es consecuencia elemental del principio del extremo para funciones armónicas. El método de Fredholm es simplemente probar que la determinación de la función u puede reducirse a la resolución de una ecuación integral de 2ª es pecie y, sin necesidad de resolver esta, la alternativa da lugar a la existencia de la solución.

Los trabajos de Fredholm llevaron a Hilbert a estudiar en los años 1904-1910 las ecuaciones integrales y sus aplicaciones a la física matemática. Hilbert sigue el trabajo de Fredholm en el sentido de aproximar la ecuación integral por sistemas de ecuaciones lineales y rigoriza el paso al límite de los sistemas finitos de ecuaciones lineales al caso infinito. Por otra parte mediante una "función de Green K" para una región G y la ecuación del potencial, la ecuación diferencial de la membrana oscilante $\Delta u + \lambda u = 0$ se convierte en una ecuación integral homogénea

$$u(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)\ u(t)dt = 0$$

con núcleo simétrico $K(t,s) = K(s,t)$ y se percata que el problema de los valores propios de esta ecuación es el análogo para integrales al de la transformación de una forma cuadrática de n variables a sus ejes principales. Prueba que existe una sucesión de valores propios reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots \to \infty$ y un conjunto de funciones u_n, funciones propias correspondientes tales que la forma bilineal se expresa:

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\ f(s)\ f(t)\ ds\ dt = \sum_n \frac{g_n^2}{\lambda_n}$$

con ξ_n el coeficiente de Fourier $\xi_n = \int_0^1 f(s)\ u_n(s)\ ds$ y prueba que si $f(s) = \int_0^1 K(s,t)\ g(t)\ dt$ entonces $f(s) = \sum_n \xi_n\ u_n(s)$.

Estos resultados le llevarán a considerar la forma bilineal infinita $K(x,y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq}\, x_p\, y_q$ que se aplica a vectores (X_p) de longitud $(\sum_n X_p^2)^{1/2}$ finita, con K acotada.

Hilbert prueba que por una transformación ortogonal K se expresa:

$$K(x,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^2}{\lambda_i} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu,x)}{\mu},$$

donde la integral se extiende a un recorrido o espectro continuo. La consideración de este espectro es una de las mayores contribuciones de Hilbert en este contexto; para eliminar este término introduce el concepto de completa continuidad para K.

Digamos simplemente que la contribución de Hilbert es no sólo de resultados nuevos sino sobre todo de clasificación y simplificación de métodos. Constituyen una pieza básica del punto de partida del Análisis Funcional.

Los métodos de Hilbert extendidos posteriormente a operadores de clase traza en 1948 por Ruston y en 1956 independientemente por Grothendieck a operadores de clase traza en espacios localmente convexos.

Es interesante hacer notar en el contexto de estos trabajos de Hilbert que la prueba de la equivalencia entre funciones con cuadrado integrable Lebesgue y el espacio de sucesiones de cuadrado sumable es posterior a las mismas realizadas por Fischer y Riesz; con ello se aclaraba la teoría de Hilbert y se extendían los resultados a ecuaciones integrales de núcleo K de cuadrado sumable.

Es preciso comentar algo más sobre los trabajos de Riesz. En 1910 extiende los resultados de Hilbert al caso en que la función f y las incógnitas sean de un espacio L^p. Obtiene resultados análogos a los de Fredholm y lo que es más interesante introduce el concepto abstracto de operador y define para él el concepto de completa continuidad. Su artículo quizá principal data de 1917 y los métodos difieren de los anteriores. Se considera un operador completamente continuo K en un espacio L^2 y si llamamos $T = I - K$ y $M_i = \text{Nuc}\, T^i$, se verifica que los espacios M_i son de dimensión finita y que existe un $\nu \geq 0$ tal que:

$$M_0 = \{0\} \subset M_1 \subset \cdots \subset M_\nu = M_{\nu+1} = M_{\nu+2} = \cdots .$$

Análogamente si $N_i = \text{Img}\, T^i$ prueba que son subespacios cerrados y que existe $\mu \geq 0$ de manera que:

$$N_0 = L^2 \supset N_1 \supset \cdots N_\mu = N_{\mu+1} = N_{\mu+2} = \cdots$$

Prueba que $\mu = \nu$ y que todo $f \in L^2$ admite una descomposición y una sola $f = u + v$ con $u \in M_\nu$ y $v \in M_\nu$ y que para cada $g \in N_\nu$ y $n \geq 0$ la ecuación $T^n f = g$ admite una solución y una sola de N_ν.

Se presentan entonces dos casos esencialmente distintos según ν sea 0 o no. Si $\nu = 0$ la ecuación $Tf = g$ admite una solución única f para cada g y $T = I - K$ admite inversa, es decir $\lambda = 1$ no es valor espectral de K. Si $\nu \geq 1$, T no puede tener inverso. Si designamos por S y R las transformaciones lineales que coinciden con K en M_ν (respectivamente en N_ν) y se anulan en N_ν (respectivamente en M_ν) se tiene $K = S + R$, $SR = RS = 0$ y $\lambda = 1$ es regular para R y singular respecto a S; S es de rango finito. A partir de esta descomposición puede obtenerse el teorema de la alternativa de Fredholm en la forma que ya había hecho Schmidt de aproximar K por un operador de rango finito de forma que la diferencia sea lo suficientemente pequeña que permita aplicar el método de las aproximaciones sucesivas.

Hagamos la observación que, en este contexto, durante los años 1920-22 aparece la definición general de espacio normado dada por Banach, Hahn, Helly y Wiener. El trabajo del primero es quizá el de mayor importancia y es de notar que fue motivado por una generalización de las ecuaciones integrales. Prueba, por ejemplo, que para una ecuación del tipo $x + hF(x) = y$ con F continuo operando sobre lo que ahora llamamos un espacio de Banach y $|h| < \frac{1}{||F||}$ existe una solución x y una única que verifica

$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h^n F^n(y)$ que es una generalización del método de Volterra de resolución de una ecuación integral.

La teoría de Riesz se extiende a un espacio de Banach cualquiera y prácticamente ya aparece así en la memoria original, es decir, la alternativa de Fredholm es válida para una transformación lineal completamente continua en un espacio de Banach.

Ahora bien el campo de las ecuaciones integrales no se acaba ni mucho menos con las ecuaciones para las que vale el teorema de Fredholm ni con los operadores completamente continuos. Así, pueden presentarse ecuaciones en que a los valores propios les corresponden infinitas funciones propias linealmente independientes o ecuaciones como la de Lalesco-Picard

$$u(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} u(y)\, dy = f(x)$$

en que $e^{-|x-y|}$ no es de clase L^2 y que dan un espectro continuo; o pueden considerarse ecuaciones integrales no lineales, etc..

Vamos a limitarnos a tratar un tipo particular de ecuaciones singulares unidimensionales, las ecuaciones singulares de Cauchy, teoría elaborada casi inmediatamente después de la de Fredholm. El comienzo de la teoría se debe a H. Poincaré "Leçons de Mécanique Céleste" en 1910 y a los trabajos de Hilbert sobre problemas de contorno de la teoría de funciones analíticas en 1904 y 1910. La teoría tiene importantes aplicaciones en la de las funciones analíticas y en física matemática.

Supongamos que Γ es una curva abierta o cerrada del plano complejo y $f(\zeta)$ una función definida casi por todo sobre Γ. Sea t de Γ y supongamos que si llamamos Γ_ε al conjunto de los puntos de Γ que distan de t en más o igual que ε, la función f es integrable sobre Γ_ε y que existe el límite:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(\zeta)\, d\zeta$$

Recordemos que a este valor se le llama integral singular y lo denotaremos $\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta$. A la integral $\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta$ se le llama integral de Cauchy. Pueden darse diversas condiciones sobre la regularidad de Γ y de u que permitan asegurar la existencia de la integral; por ejemplo, supondremos en lo sucesivo que $u(\zeta)$ es integrable sobre Γ y que ésta es cerrada, con curvatura continua y con un número finito de cambios de concavidad.

La integral singular de Cauchy puede ser considerada como un operador que aplica funciones u(t) sumables sobre Γ en funciones:

$$(Su)\ (t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta \quad .$$

Una cuestión importante es encontrar espacios invariantes por el operador S; por ejemplo los espacios $L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$ son invariantes por S y éste es un operador acotado en tal espacio. Si Γ es un contorno de Liapunov (existe tangente en cada punto y el ángulo que forman las mismas correspondientes a los puntos t_1, t_2 satisfacen una desigualdad $\theta \leq K|t_1-t_2|^{\alpha}$ para K y α constantes positivas) entonces $Lip_{\beta}(\Gamma)$ $0 < \beta < 1$ es invariante y S es acotado en este espacio.

Dado un operador lineal cerrado A en un espacio de Banach F es interesante el concepto de regularizador por la izquierda como el operador acotado B tal que BA = I + K, K operador compacto; y análogamente el de regularización por la derecha. Un operador se dice normalmente resoluble si para que Au = f tenga solución es necesario y suficiente que f sea incidente con todos los ceros del adjunto de A, A^*; es decir, si el "teorema de Fredholm" vale para esta ecuación o lo que es equivalente Rec A es cerrado. Si A es un operador y admite una regularización por la izquierda entonces el operador es normalmente resoluble y si α (A) es la dimensión del espacio de los ceros de A, éste es finito. Si A admite una regularización por la derecha α(A) es finita. Se llama $\operatorname{Ind} A = \alpha(A) - \alpha(A^*)$ y se verifica $\operatorname{Ind}(A+K) = \operatorname{Ind} A$ para K compacto, A con regularizador a la izquierda.

Para operadores acotados A_1, A_2 con índices finitos se verifica que :

$$\operatorname{Ind}(A_1 A_2) = \operatorname{Ind}(A_2 A_1) = \operatorname{Ind} A_1 + \operatorname{Ind} A_2 .$$

Volviendo a la integral de Cauchy se llama ecuación singular del tipo de Cauchy a una ecuación en $L^p(\Gamma)$ de la forma:

$$(Au)(t) = a(t)\, u(t) + b(t)\, (Su)(t) + (Ku)(t) = f(t),$$

a,b funciones contínuas en Γ y K operador compacto en $L^p(\Gamma)$.

Vamos a dar condiciones suficientes para que un tal operador A verifique el teorema de Fredholm.

Se verifica que $S^2 = I$ y que el operador S y $a(t)I$ no son conmutativos pero el operador diferencia:

$$S(au) - aSu = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{a(\zeta) - a(t)}{\zeta - t}\, u(\zeta)\, d\zeta \text{ es compacto en}$$

$L^p(\Gamma)$. De aquí que si llamamos símbolo del operador A a la función: $\phi_A(t,\theta) = a(t) + b(t)\theta$ definida sobre $\Gamma\times\{+1,-1\}$ se puede probar que el símbolo es no degenerado (es decir no se anula en ningún punto) si y sólo si el operador admite una doble regularización que viene dada por $\dfrac{1}{a^2(t) - b^2(t)}(a(t)u(t) - b(t)(Su)(t))$

y por tanto que las ecuaciones integrales singulares de Cauchy con símbolo no degenerado verifican el "teorema de Fredholm".

Puede probarse inmediatamente que el símbolo de la suma o el producto es la suma o el producto respectivamente de los símbolos, que el símbolo de la unidad es la unidad y que el símbolo de un operador compacto es cero.

Digamos también que una expresión muy interesante del índice de un tal operador es la obtenida por Noether en 1921

$$\text{Ind } A = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \quad \arg \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}$$

para operadores con símbolo no degenerado y con condiciones de regularidad sobre Γ. De esta expresión se obtienen inmediatamente condiciones de invarianza del índice por transformaciones adecuadas de Γ y del operador.

Las propiedades sobre el símbolo, conocidas ya en la década de los años 50, sugieren la consideración del mismo como la representación de Gelfand de un álgebra de Banach.

Así sea B la subálgebra del álgebra de los operadores acotados en $L^2(\Gamma)$ definida como la adherencia del conjunto de los operadores del tipo: $a(t)I + b(t)S + K$ y sea $\mathcal{A}$ el álgebra cociente de ésta por el ideal cerrado de los operadores compactos. $\mathcal{A}$ será un álgebra conmutativa de Banach. Veamos el Spec $\mathcal{A}$. La aplicación identidad sobre Γ, su conjugada y S forman un sistema de generadores topológicos de $\mathcal{A}$. De la relación $S^2 = I$ y del morfismo natural $\mathcal{C}(\Gamma) \to \mathcal{A}: a(t) \mapsto a(t)I$ obtenemos que todo elemento $\phi \in \text{Spec}\,\mathcal{A}$ da un elemento de $\Gamma \times \{+1, -1\}$ y puede probarse que recíprocamente todo elemento de $\Gamma \times \{+1, -1\}$ da un elemento de Spec $\mathcal{A}$. Una verificación puede hacerse por reducción al absurdo. De lo contrario existirá un operador $T = a(t) + b(t)S$ con imagen del símbolo con infinitos puntos de acumulación y del radical de $\mathcal{A}$ lo que es absurdo pues puede probarse que los elementos del radical de $\mathcal{A}$ tienen un espectro con cero como único posible punto de acumulación mientras que para λ en la imagen del símbolo de **T**:

$$a(t)I + b(t)S - \lambda I$$

tienen un símbolo degenerado que implica no tiene regularización y por tanto no tiene inverso en $\mathcal{A}$. Hemos llegado a contradicción.

Tendremos entonces que el símbolo de un operador A no es otra cosa que la representación de Gelfand del mismo como elemento de $\mathcal{A}$. Si Γ es el círculo unidad entonces $\mathcal{A}$ es un C^*-álgebra conmutativa y el supremo del símbolo coincide con

$\inf_{K \text{ compacto}} ||A + K||$. No vamos a entrar en el estudio de los operadores con símbolos degenerados, digamos tan sólo que no vale ya el teorema de Fredholm. Tampoco no podemos entrar en detalle sobre la resolución efectiva de las ecuaciones singulares. Apuntemos tan sólo la intema relación de esta teoría con la de las funciones analíticas. Así la ecuación
$a(t)\, u\,(t) + b(t)\,(Su)(t) = f(t)$ con símbolo no degenerado con $a(t)$ y $b(t)$ Lipzchitzianas con exponente positivo, $f \in L^p(\Gamma)$ y Γ contorno de un simplemente conexo que separa las regiones interior D^+ y exterior D^-. Si

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad z \in D^+ \cup D^- \quad y\ \phi^+\ y\ \phi^-$$

son las respectivas restricciones a D^+ y D^-

$$\phi^+(t) = \lim_{z\to t} \phi^+(z) \qquad \phi^-(t) = \lim_{z\to t} \phi^-(z)$$

para t de Γ, entonces:

$$\Phi^{+}(t) = \frac{u(t)}{2} + \frac{1}{2}\,Su(t)$$

$$\Phi^{-}(t) = \frac{-u(t)}{2} + \frac{1}{2}\,Su(t)$$

con adecuadas condiciones de regularidad sobre u.

De esta manera la ecuación integral se puede escribir como:

$$\Phi^{+}(t) - \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\,\Phi^{-}(t) = \frac{f(t)}{a(t)+b(t)} \qquad t \in \Gamma,$$

con lo que la ecuación integral se reduce a un problema de encontrar funciones holomorfas Φ^{+} y Φ^{-} en D^{+} y D^{-} respectivamente cuyos valores en la frontera se relacionan por la ecuación anterior. El problema ha sido tratado y resuelto por numerosos autores y no insistiremos más sobre él.

Sí queremos añadir que el ejemplo de los operadores de Cauchy lo hemos querido traer a colación como una muestra más del interés de la conexión entre la teoría de álgebras de Banach y la de las ecuaciones integrales o en general la de los operadores en un álgebra de Banach. Es pues natural el estudio del álgebra de Calkin $\frac{B(X)}{K(X)}$ sobre un espacio de Banach X así como de las subálgebras de la misma (B(X) operadores acotados en un espacio de Banach y K(X) el ideal de los compactos). Por ejemplo los operadores acotados en un espacio de Banach con recorrido cerrado y con núcleo y conúcleo de dimensión finita se llaman operadores de Fredholm y son los que dan elementos inver tibles del álgebra de Calkin; los operadores del radical del álgebra de Calkin son los llamados de Riesz y pueden ser caracterizados espectralmente y en términos de las dimensiones de Rec $((\lambda I-T)^k)$ y de Nuc $((\lambda I-T)^k)$, etc, etc. Muchas cuestiones sobre estas álgebras son hoy día motivo de investigación... Lo que queremos insistir una vez más es cómo la teoría de las ecuaciones integrales, en muchos casos ligadas muy directamente al mundo físico, han dado lugar al estudio de toerías abstractas del Análisis Funcional.

Digamos también y por último que el estudio de las ecuaciones integrales de Cauchy se ha extendido a sistemas de ecuaciones y a ecuaciones multidimensionales singulares y que en los últimos 15 años se han estudiado ecuaciones integrales en espacios de distribuciones para Γ infinitamente diferenciable. La consideración de éstos y otros tipos de ecuaciones integrales y diferenciales ha dado lugar al estudio de los operadores pseudodiferenciales, tema en el que se investiga actualmente y en el que naturalmente no podemos entrar ahora.

B I B L I O G R A F I A

Caradus y otros - Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces. Lect. Not. 9 Marcel Dekker.

Dunford-Schwartz - Linear Operators. Interscience Publishers.

Grothendieck,A. - La Théorie de Fredholm. Bull. Soc. Math. France, 84, 1956, pp 319-384.

Klein,M. - Mathematical Thought form Ancient to Modern Times. Oxford, Univ. Press.

Mikhlin - Linear Integral Equations. Industan Publishing Congr. 1960.

Muskhelishmili - Singular Integral Equations. Noordhoff-Groningen- Holland.

Neri Umberto - Singular Integrals, L.N. 200

Reid,C.- Hilbert, Springer-Verlag, Berlin.

Riesz-Nagy - Leçons d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars.

Ringrose,J.R. - Compact Non-Self - Adjoint Operators. Van Nostrand Reinhold Math. Studies.

Rustar,A.F. - On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach space. 1948.

Taylor,M. - Pseudo Differential Operators. L.N. 416

Tricomi - Integral equations. Interscience Publ.

Zabreyko y otros - Integral equations - a reference text. Noordhoff, Interscience Publ.

Proceedings of a Conference on Operator Theory, L.N. 345.